孙 蕾　　谷德峰

一. 引言

自古以来，飞蛾扑火的现象就引起了人们的注意。早在唐代，诗人张祜就曾在《赠内人》一诗中提到“斜拔玉钗灯影畔，剔开红焰救飞蛾。”描述的是灯火旁，一名宫女拔下玉钗，剔开火焰，试图解救扑火的飞蛾。图 1 是近代著名国画大师齐白石先生的一幅写意小品，描述的也是飞蛾扑火的情形。人们不禁要问：飞蛾扑火，明明是自取灭亡，为什么这个习性延续了这么久呢？图 2 是 2010 年美国《国家地理》杂志摄影竞赛的入围作品，它描述的是灯光下蛾子飞行的轨迹。更让人疑惑的是既然蛾子喜欢扑向灯火，为什么不沿直线直接扑过去，而要按照螺旋线的轨迹飞行呢？

图 1 齐白石笔下的“飞蛾扑火”

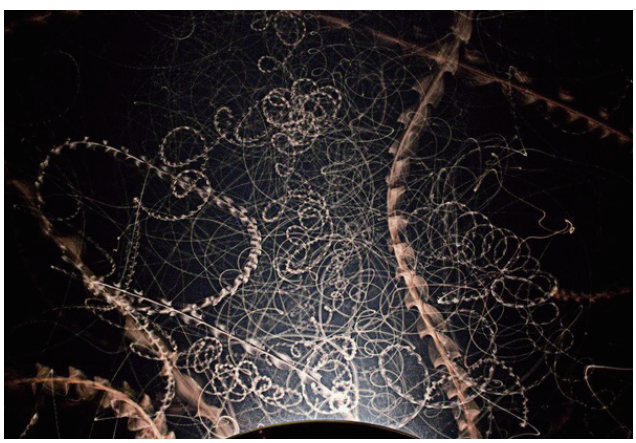


图 2 2010 年美国《国家地理》摄影竞赛作品

为了解释蛾子这些古怪的习性，本文从一道有趣的数学题入手，运用几何知识建立常微分方程，通过分析方程解的几何特征，从数学建模的角度来探索飞蛾扑火之谜。

二. “四虫爬行”问题

James Stewed 撰写的美国著名微积分教程 *Calculus* 中有一道附加题：

例 1 四只小虫放在边长为 a 的正方形的四个顶点上。小虫同时沿着逆时针的方向以相同的速度爬行，而且每只小虫爬行的方向都时刻正对着下一只小虫。小虫将会沿着螺旋线接近正方形的中心，如图 3 所示。以正方形的中心为极点，求小虫爬行轨迹的极坐标方程。

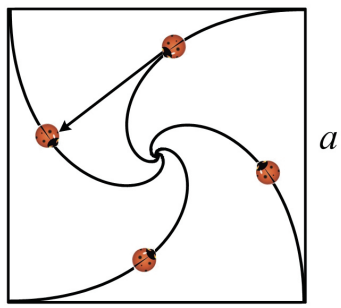


图 3 “四虫爬行”问题

我们将这个问题简称为“四虫爬行”问题。当然也有人把四只小虫换成四只小狗或者四只乌龟，但问题本质是一样的。首先我们来分析一下小虫运动轨迹的几何特征：

如图 4 所示，以正方形的中心 O 为极点，小虫的初始位置分别位于为正方形的四个顶点 A, B, C, D 处。在某一时刻，四只小虫分别位于点 A_1, B_1, C_1, D_1 处。由小虫爬行的一致性和图形的对称性，可知四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 是一个正方形，并且这个正方形的中心就是极点 O。由于位于 A_1 处的小虫正对着位于 B_1 处的小虫，因此 A_1 处的小虫的速度方向与向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 一致，它也是小虫的爬行轨迹在 A_1 处的切向量。向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 平分正方形的一个直角，于是 $\angle OA_1B_1$ 等于 $\frac{\pi}{4}$，这也意味着向量 $\overrightarrow{A_1B_1}$ 与向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 成定角 $\frac{3\pi}{4}$。

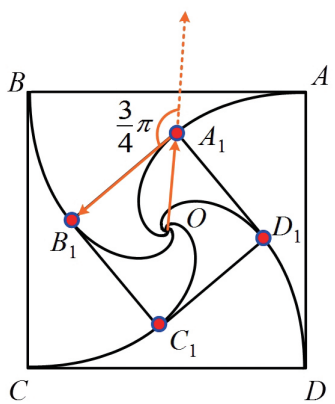


图 4 “四虫爬行”问题的几何图形

由小虫始终以同样的方式爬行，在任意时刻，小虫的速度方向都与极点 O 至小虫的位置形成的向量成定角 $3\pi/4$。于是这个问题就可以归结为求一曲线的极坐标方程，该曲线上任意点 A_1 处的切向量都与极点 O 至此点 A_1 所成的向量 $\overrightarrow{OA_1}$ 成定角 $3\pi/4$。我们可以把问题推广为更一般的情形，如图 5 所示：求一曲线的极坐标方程，该曲线上任意点 P 所对应的切向量都与极点 O 至此点 P 成的向量 $\overrightarrow{OP}$ 成定角 α，$0<\alpha<\pi$。其中，向量 $\overrightarrow{OP}$ 定义为点 P 关于极点 O 的向径。

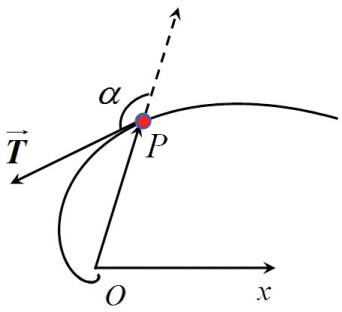


图 5 极坐标下切向量与向径成定角的曲线

于是可以利用切向量与向径成定角的关系来建立常微分方程。设该曲线的极坐标方程为 $\rho=\rho(\theta)$。把它化成参数方程的形式，

$$\begin{cases} x=\rho(\theta)\cos\theta \\ y=\rho(\theta)\sin\theta \end{cases}.$$

于是点 $P(x,y)$ 关于极点 O 的向径就是向量 $\overrightarrow{OP}$，且

$$\overrightarrow{OP}=\{\rho(\theta)\cos\theta,\ \rho(\theta)\sin\theta\}.$$

设过点 $P(x,y)$ 的切向量为 $\vec{T}$，则

$$\vec{T}=\{\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta,\ \rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta\}.$$

再利用向径与切向量成定角的关系，由向量的夹角公式有，

$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\frac{\overrightarrow{OP}\bullet\vec{T}}{\left|\overrightarrow{OP}\right|\left|\vec{T}\right|}\\&=\frac{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)\rho(\theta)\cos\theta+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)\rho(\theta)\sin\theta}{\rho(\theta)\sqrt{(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta)^2+(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho(\theta)\cos\theta)^2}}\\&=\frac{\rho'(\theta)}{\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}}.\end{aligned}$$

由于 $0<\alpha<\pi$，利用上面的结果就可以得到

$$\sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\frac{\rho(\theta)}{\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}}.$$

于是有

$$\cos\alpha=\rho'(\theta)/\rho(\theta).$$

解这个常微分方程，可得

$$\rho(\theta)=Ce^{\theta\cot\alpha}.$$

其中 C 是任意正常数。

再回到例 1 中，由于小虫爬行轨迹中任意一点的切向量与向径始终是成 $3\pi/4$ 的定角的，小虫的爬行轨迹也会满足 $\rho(\theta)=Ce^{\theta\cot\frac{3\pi}{4}}$。

四只小虫在初始位置的极坐标分别为

$$A(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{\pi}{4}),\quad B(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{3\pi}{4}),\quad C(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{5\pi}{4}),\quad D(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{7\pi}{4})。$$

将这些初值条件带入常微分方程解的表达式，就可以求得四只小虫爬行轨迹的极坐标方程如下：

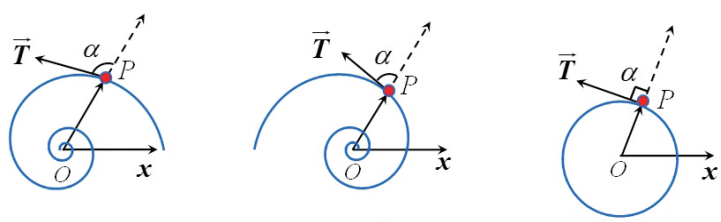
$$\rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}-\theta},\ \rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{3\pi}{4}-\theta},\ \rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{5\pi}{4}-\theta},\ \rho(\theta)=\frac{a}{\sqrt{2}}e^{\frac{7\pi}{4}-\theta}$$

三. 对数螺线及其性质

观察小虫爬行轨迹的特点，由上节 $\rho(\theta)$ 的表达式，我们可以发现当 θ 趋向于正无穷的时候，ρ 趋向于 0。这也就意味着四只小虫明明彼此相望，却殊途同归地爬向了极点 O。那么飞蛾扑向灯火会不会和这个爬行轨迹有所关联呢？

接下来我们就看一看切向量与向径成定角 α 的曲线的几何特征。

在极坐标方程 $\rho(\theta)=Ce^{\theta\cot\alpha}$ 中，当 $\alpha\in(\pi/2,\pi)$ 时，切向量与向径成钝角，$\cot\alpha<0$，极径 ρ 随着 θ 的增加而减小，曲线随着 θ 角的增大成螺旋线状接近极点 O。当 $\alpha\in(0,\pi/2)$ 时，切向量与向径成锐角，$\cot\alpha>0$，ρ 随着 θ 的增加而增加，



$\pi/2<\alpha<\pi$　　$0<\alpha<\pi/2$　　$\alpha=\pi/2$

图 6 对数螺线的几何特征