大师的数学启蒙书

林开亮

我的眼界第一次被拉乌（A. E. Love）教授打开了，……。但我最要感谢他这位应用数学家的是，他建议我阅读约当（C. Jordan）著名的《分析教程》；我永远都不会忘记阅读这本了不起的著作时所产生的惊喜，对我们那个时代的许多数学家来说，这是第一个启迪，而且，在阅读那本书时我第一次体会到了数学的真正意义。从那以后，我就怀有彻底的抱负和对数学的真正激情，以我自己的方式成为真正的数学家了。

哈代（G. H. Hardy），《一个数学家的辩白》（*A Mathematician's Apology*）[1]

我从来不读太多的数学文献。多数时候我看文献是想知道其他人都干了什么，看看我能理解些什么，然后按我的方式去构建它。我没有读过几本数学书，但我读过的书都对我起了很大作用。我关注文章胜过教科书。但有一本书对我来说意义非凡，就是赫克（Erich Hecke）的《代数数论》（*Algebraische Zahlentheorie*）[2]，我从这本书中学到了很多东西。它是一件珍品。……就代数数论而言，有很多书我都试着去读，但没有一本符合我看待事情的方式。我发现赫克的书很容易理解，例如他引入和讨论理想这一概念的方式。外尔（Hermann Weyl）写过一部篇幅很短的代数数论的书，朗道（E. Landau）也写过一本同样主题的书。可是，我没有从他们的书中找到舒服的感觉。我喜欢赫克看待事物的方式，他用这种方式干得相当好……

塞尔伯格（A. Selberg）[3]

最近，有位高人给笔者推荐了台湾大学物理系教授高涌泉先生的文章《启蒙书》[4]，该文讲述了英国物理学家金斯（James Jeans）的科普书《神秘的宇宙》（*The Mysterious Universe*）对杨振宁的启蒙作用，让笔者联想到其他科学大师曾经遇到的数学启蒙书。兹就笔者所了解的情况与读者分享这些已成为历史的小秘密。

杨振宁（1922–）

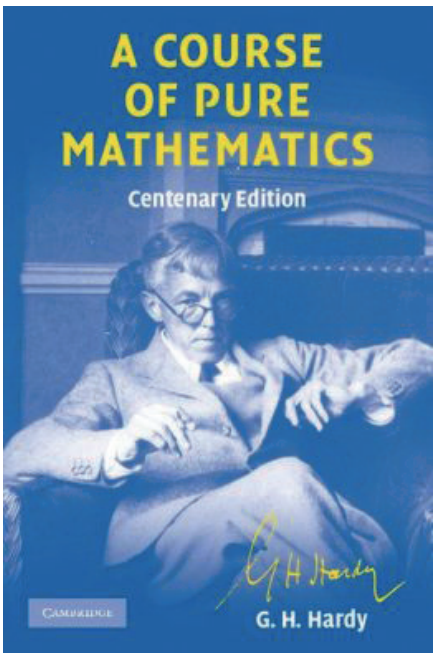
我们仍然从杨振宁先生说起，他是当代最有成就的理论物理学家之一，从某方面来说，他的物理成就与他深厚的数学功底密不可分，这也许是大家并不太了解的。杨振宁先生的数学才能一方面是受之于他的数学家父亲杨武之，另一方面则是得益于他所接受到的很好的数学启蒙。例如，英国数学家哈代的《纯数学教程》（*A Course of Pure Mathematics*）就曾给年少的杨振宁以很深的印象。2004 年 5 月 12 日，杨先

[1] 有两个中译本：王希勇译，商务印书馆，2007 年；也被收入李文林、戴宗铎、高嵘编译的哈代的非专业论文集《一个数学家的辩白》，大连理工大学出版社，2009 年。

[2] 有英译本，Lectures on the Theory of Algebraic Numbers, GTM 丛书第 77 号；有根据英译本的中译本，《代数数理论讲义》，王元译，科学出版社，2005 年。王元先生在译后记中也对该书赞誉有加。

[3] N. A. Baas, C. F. Skau, The lord of the numbers, Atle Selberg. On his life and mathematics. Bull. Amer. Math. Soc., 45(2008), No. 4: 617-649. 中译文，数的主人 Atle Selberg 的生活与数学，冯绪宁译，《数学译林》，第 28 卷（2009 年）第 4 期和第 29 卷（2010 年）第 1 期。

[4] 高涌泉，启蒙书，《科学人》，2013 年 4 月，第 26 页。



哈代的《纯数学教程》

生在清华大学中文系的无题漫谈[5]中讲到：

同学们要我举出对我影响最深的书，一本英文的，一本中文的。这个问题很难回答，因为世界上书太多了。不过我想可以换一个说法，推荐几本有意思的书。先讲数学。我在大学一年级的时候，我父亲从图书馆借来一本《纯数学教程》，这是英国的一个大数学家在二十世纪初写的。我看了这本《纯数学教程》之后大开眼界，什么缘故呢？因为世界上所有的数学在开始的时候都是教小孩子像1，2，3，4、小数点、分数这样出来的，但是，对整个逻辑系统没有注意。这本书整个方法是从逻辑的系统开始的，这使得当时十六岁的我忽然了解到，数学的结构原来还可以有另外一种看法，这对我是一个很大的启发。这本书很有名，相当于大学一二年级数学的程度，可是它吸取了近代数学的精神，对任何一个对数学有兴趣的同学我都推荐。

《纯数学教程》自1908年问世以来，在1914-1952年不到四十年的时间里重版九次，仅第九版就三次重印，而1952年的第十版先后重印七次。2008年，剑桥大学出版社推出了该书的一百周年纪念版，特别邀请剑桥大学的数学教授柯勒（T. W. Körner）写了前言。值得一提的是，自1937年第七版开始，哈代在书中收入了剑桥大学学士荣誉学位考试（Mathematical Tripos）的考题作为练习，对正文提供了极丰富的补充。我们借用柯勒的话来向读者推荐《纯数学教程》：

了解哈代[6]就是了解一位对于自身能力有充分认识的数学家，同时他把你作为一个自然的平等对象。希望这本书能带给你它曾经带给我那般多的愉悦。

《纯数学教程》第一章讲的是实数的基本理论，这大概就是令杨振宁年少时最为震惊的一章，对一个习惯了轻松阅读的现代高中生来说，也许会感到枯燥无聊，我们用另一个中学生的小故事来鼓励读者。他就是后来成为了一代数学大师的挪威数学家塞尔伯格，刚好这里有一张塞尔伯格与杨振宁的合照。

塞尔伯格和杨振宁

塞尔伯格（Atle Selberg, 1917−2007）

1987年，印度天才数学家拉马努金（Srinivasa Ramanujan, 1887-1920）诞辰一百周年，数论专家塞尔伯格应邀在纪念活动上做了讲话[7]，回忆起拉马努金的著作对他的影响：

拉马努金的著作对于我成为一个数学家起了十分重要的作用。我第一次见到他的名字是在1934年。

[5] 杨振宁，无题漫谈——2004年5月12日在清华大学中文系的讲演，《清华大学学报》，第19卷（2004年）第4期。

[6] 关于哈代，斯诺（C. P. Snow）曾写过一篇极好的文章，有中译文，见哈代《一个数学家的辩白》前言；此外也可从卡尼格尔（Robert Kanigel）所著《知无涯者：拉马努金传》（有中译本，胡乐士、齐民友译，上海世纪出版集团，2008年）第四章得一了解。

[7] A. Selberg, Reflections around the Ramanujan centenary. Resonance, 1996,1(12): 81-91. 有中译文，Ramanujan百周年诞辰之际的反思，冯绪宁译，《数学译林》第9卷（1990年）。

那时，我见到刊登在《挪威数学会期刊》上的一篇文章。我父亲订阅这种期刊。文章的名字（从挪威文翻译过来）是“印度人斯里尼瓦萨·拉马努金——一个非凡的数学天才”。但是我要补充说明一句，在挪威语与英语之间是不存在一一对应的。此处被我译成“非凡的”那个挪威词的原意是“不寻常而且有点奇怪的”。文章是奥斯陆大学的一位数学教授写的，他的名字叫斯托摩（Carl Störmer）。他年轻时就对数论开始感兴趣，后来转而研究北极光的数学领域，而且在该领域颇有声望，但仍然保持了对（纯）数学的爱好。

那篇文章主要选材于1927年剑桥大学出版社出版的《拉马努金论文集》（*Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*）中的一篇传记[8]。文中概述了拉马努金的一生，并且引证了他相当多的结果和例子。在我看来，那都是极为神奇、美妙而惊人的公式。如果我没记错的话，那篇文章大约有十五页到二十页的光景。然而，它却在我脑海中留下了深刻而持久的印象，对我有极大的魔力。

当时，我还是一个中学生，已经自修了几年数学，不过毫无系统性，也没什么计划。所读的书是从我父亲的图书馆中找到的。以私人藏书而言，这个图书馆是够大的。

这里我要说几句题外话，因为这反映出机遇在人的一生中起着何等重要——是难以估量——的作用。我大约在十三岁开始读数学。当时，我偶然打开一本书，就看见了关于$\pi/4$的莱布尼兹公式（Leibniz's formula）：

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\cdots.$$

它由奇数的倒数加正负号交错变化构成。在此之前，学校课堂上的数学一直令我乏味，但是这个式子看起来不仅奇怪而且漂亮，因此我下决心要读一读这本书，以便知道这个式子是怎样得到的。

现在回想起来，很令人吃惊的是，我居然读完了这本书；考虑到这本书的开篇是讨论实数的概念以及戴德金分割（Dedekind cuts）的很长的一章，这实在不是一个吸引人的开头。

无论如何，在我读到关于拉马努金的文章之前，我就已经决定投身于数学，但究竟是搞哪一类数学还不清楚。我觉得那时我想得最多的是搞解析函数的一般理论，是像奈望林奈理论（Nevanlinna's theory）那样的东西。这在当时是非常前沿的课题，而且我的大哥已经开始做这方面的研究了。他是大学里的研究员。我的另一个哥哥，已经在数学系读了几年书，他也读了关于拉马努金的这篇文章，所以从大学图书馆借了《拉马努金论文集》，假期时他把这本书带回家。

于是，我就有了一个机会，用几周的时间浏览了全书。这简直像是在发现新大陆；一个新的世界展现在我面前。我要说，与我此前所读的书完全不同，这本书极大地唤起了我的想象力。而且，坦率地说，直到现在我仍然感到非常激动，那时感受到的神秘气氛至今犹存。正是这本书给予我自发研究数学的动力。我开始独自在通常称之为q-级数和与之相关的恒等式方面进行探究。

华罗庚（1910–1985）

华罗庚是自学成才的大数学家，据他的传记作者王元与杨德庄讲，他初中毕业后在家自学，“所能见到的数学书籍只有一本《大代数》，一本《解析几何》，以及一本约50页的《微积分》。此外还有两本与数学有点关系的杂志《科学》与《学艺》。”这些书也许就是华先生的启蒙读物吧，但这些书对华先生的影响应该仅仅停留在起步阶段，其水准也许都不及目前高中数学教学大纲的要求。对于职业数学家的成长而言，更重要的一类启蒙书是那些激发了其研究而不仅仅是学习兴趣的著作。由于品味与风格各异，每个数学家遇到的研究启蒙读物也各不相同。塞尔伯格告诉我们，开启了他的数学研究之路的是拉马努金的数学论文集，那么，真正启迪了华先生刻苦钻研数学的又是哪些书呢？对此，他的弟子徐利治[9]曾有记载：

华先生很重视做学问需要有“看家本领”。所谓看家本领指的是做科研时必不可少的最基本而有用的本事。据他所说，他的扎实的看家本领主要来源于三部经典著作。一是克里斯托尔（G. Chrystal）的两卷《代数学》，二是朗道的三大卷《数论教程》，三是特恩波尔（W. H. Turnbull）与艾德肯（A. C. Aitken）合著的《矩阵标准型理论导引》他说，《代数学》使他学会了计算技巧，《数论教程》使他获得了从事数学研究的分析功底，而《矩阵标准型理论导引》虽是一本

[8] 当指哈代为拉马努金写的讣告，有中译文，《印度数学家拉马努金》，收入李文林、戴宗铎、高嵘编译的哈代的非专业论文集《一个数学家的辩白》，大连理工大学出版社，2009年。

[9] 徐利治，回忆我的老师华罗庚先生——纪念华老诞辰90周年，《数学通报》，2000。

薄薄的书，却是帮助他后来完成矩阵几何和复分析丰硕研究成果的基本工具。

也许可以说，华先生进入近代数学之门主要是靠这三本书的引导。对于这三本书的作者，我们简单了解一下。克里斯托尔是英国人，是十九世纪的大物理学家麦克斯韦（J. C. Maxwell）的学生，而他本人的一个得意门生则是二十世纪抽象代数的先驱之一韦德布恩（J. H. M. Wedderburn）。朗道是德国数学家，他的书写得非常浓缩，几乎全是欧几里得风格的“定义—定理—证明”的模式。特恩波尔与艾德肯都是英国人，特恩波尔有一个名叫威廉森（J. Williamson）的学生，对矩阵论贡献很大；艾德肯是统计学家，《矩阵标准型理论导引》也曾被许宝騄用作矩阵论教材。

此外，还有一本书对华罗庚影响深远，这就是外尔的《典型群》（*The Classical Groups*），这一点是他的学生冯克勤[10]透露的：

华罗庚在讨论班和日常谈话中有许多观点是大家熟知的，例如他把“班门弄斧”反其道而行之，主张“弄斧一定到班门”，即研究工作一定要与大师交手，才会有所提高。他主张读书要“从薄变厚，再从厚变薄”，并举例说他花了两年的功夫念外尔的《典型群》，终于懂了其中的精髓。我们在他的著作《多复变数函数论中的典型域的调和分析》中看到他是如何把群表示加以消化，用自己独特的矩阵技巧表达出来。

陈省身（1911–2004）

比起华罗庚来，陈省身所接受的教育要正规得多。据他在《数学陶冶我一生》[11]中讲，他 1923-1926 年在天津扶轮中学的四年高中的数学课程有：第一年，算术，使用中文课本；第二年，代数，使用霍尔（Hall）与奈特（Knight）的课本；第三年，几何，使用文特沃思（Wentworth）与史密斯（Smith）的课本；第四年，三角学和高等代数，分别使用文特沃思与史密斯及霍尔与奈特的课本。陈先生特别提到了霍尔与奈特的《高等代数》（*Higher Algebra*）[12]：

我的老师都很有能力，又极富有奉献精神，我做了大量习题。到第四年，我已能做霍尔与奈特《高等代数》书中引用的剑桥大学荣誉学位考试的许多题目。

在其他场合，陈先生提到了该书对他的影响[9]：

陈省身先生跟人讲过，他搞几何之所以会比美国的几何学家高明一点，就是与他年轻时学过霍尔与奈特合著的《高等代数》有关系。而美国的不少几何学家青少年时代都没有受过计算技巧方面很好的训练。

在南开大学时代（1926-1930），陈省身在姜立夫教授的指引下读了一些几何著作，例如库里奇（Coolidge）的《非欧几何学》与《圆与球的几何学》，萨蒙（Salmon）的《圆锥曲线》与《立体解析几何》，以及卡斯泰尔诺沃（Castelnuovo）的《解析几何与射影几何》等。尤其使他着迷的是奥托·施陶德（Otto Staude）的二卷本著作《线构造》。

此外，陈省身还读了（至少是浏览了）一些大数学家的论文集，他在为英国数学家阿蒂亚（M. F. Atiyah）的论文集的中国影印版所作的序言中写道：

我将建议我的中国同行和学生将这部论文集视为一套高级的“课本”。不论一个新的论述如何细化或改进，关于某个课题的原始文章通常更直接而切中要害。我年少时，曾从阅读庞加莱、希尔伯特、克莱因、胡尔维兹（Adolf Hurwitz）等名家的作品的建议中受益，后来我更加深入地阅读了布拉施克（Wilhelm Blaschke）、埃利·嘉当（Élie Cartan）和霍普夫（Heinz Hopf）的论文。这也与中国的传统相通：古人被要求熟读孔门经典、韩愈的散文与杜甫的诗。我真诚地希望，这些论文集不是被束之高阁，而是在年轻的数学家手中被翻烂。

庞加莱、希尔伯特、克莱因自不必说了，他们是十九世纪下半叶数学界的领袖。至于胡尔维兹，声名也许不及前三位那么显赫，但他的工作是极其优美的，就连被誉为“数学界的莫扎特”的塞尔（J. P. Serre）都为之击节。特别要提到的是后三位：布拉施克、埃利·嘉当和霍普夫。1931 年，陈省身成为清华大学的研究生，师从孙光远先生。1932 年，德国几何学家布拉施克应邀来北大开设“微分几何中的拓扑问题”的系列讲座，这使陈省身眼界大开，他在《数学陶冶我一生》一文中曾写道：

[10] 冯克勤，我怎样走向学习代数数论之路，收入张继平主编《新世纪代数学》，北京大学出版社，2002 年。

[11] 陈省身，My Mathematical Education. 有中译文，数学陶冶我一生，《数学译林》1993 年第 2 期。

[12] 有中译本，《Hall-Knight 大代数》，席小云译，北京：科学普及出版社，1983-1985 年。