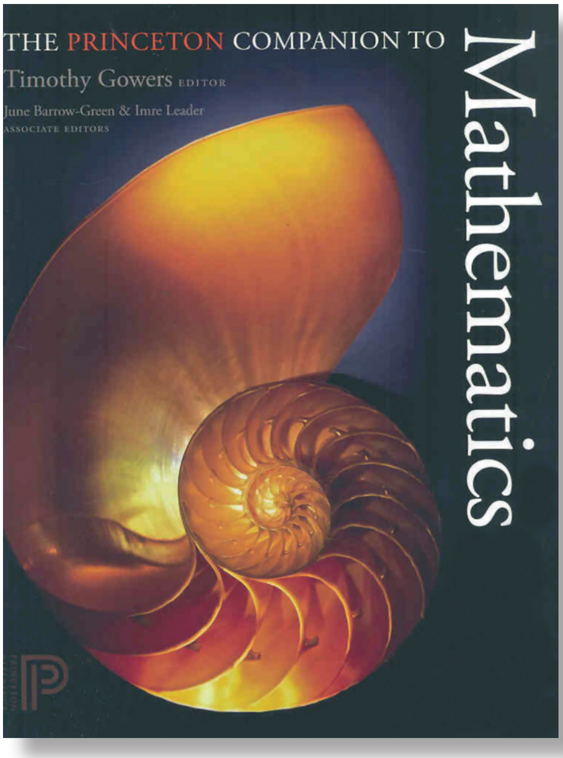
现代数学主要分支学科的通俗介绍

——读《普林斯顿数学指南》

陈跃



《普林斯顿数学指南》获得2011年美国数学协会欧拉图书奖

20世纪是数学飞速发展的世纪，尤其是在20世纪的下半叶，数学知识出现了前所未有的大爆炸。如今的现代数学真正成为了人类知识领域中最博大精深的一个，其抽象与艰深的程度登峰造极，这对任何学习现代数学的人们来说都是巨大的挑战。

回想五十多年前，前苏联一批数学家为了普及近代数学知识，为当时的学生撰写了一套三卷的名著《数学——它的内容、方法和意义》[1]。这套书主要是讲在18与19世纪中形成的近代数学，它分章通俗介绍了以下17个分支学科，包括数学分析（即微积分）、平面与空间解析几何、代数方程理论、常微分方程、偏微分方程、曲线和曲面的微分几何、变分法、复变函数论、初等数论、概率论、函数逼近法、实变函数论、线性代数、非欧几何、拓扑学、泛函分析、抽象代数等。这套名著抓住这些分支学科的最基本的思想，深入浅出地通俗介绍这些学科的研究方法。这套书被译成中文后受到普遍欢迎，多次再版，可以说影响了国内整整一代数学家的成长。我们可以看到，这套书给出的这个近代数学分支学科的基本框架实际上就是以后几十年为大家所熟悉的大学数学专业的课程体系。它大致反映了数学这个学科从18世纪到20世纪初期的发展进程和主要成就。

时代发展到今日，虽然这套书对于数学专业本科生的教育还有一定的作用，但对于研究生阶段学习的现代数学来说，显然已经不够用了。令人高兴的是现在已经有了一个很好的替代读物。由美国普林斯顿大学出版社在2008年出版的《普林斯顿数学指南》[2]（The Princeton Companion to Mathematics，以下简称《指南》）是一本帮助现代数学初学者的综合普及类工具书。这本书的篇幅厚达一千多页。它不同于一般百科辞典的地方是：尽量用通俗浅显的语言和历史途径法[3]来深入浅出地讲解现代数学中一些最基本的思想和方法（而不是面面俱到地给出所有数学名词的解释），以及现代数学想要解决的主要问题，并且在讲解的时候适当地降低数学表述的准确度。这样就很好地满足了学生们释疑解惑的需要，同时也改变了人们“现代数学不大可能通俗介绍”的想法。

这本《指南》总共包括“（一）引言”、“（二）现代数学的起源”、“（三）数学概念”、“（四）现代数学的分支”、“（五）定理与问题”、“（六）数学家”、“（七）数学的影响”和“（八）看法与建议”等八个部分。其中第一部分和第八部分是用平易的语言向学生介绍现代数学大致包含的内容、研究数学所要达到的目标以及对于学习现代数学的建议，第二和第六部分简要介绍了数学发展的历史以及重要数学家的生平，第七部分则非常全面地介绍了数学对自然科学和社会科学的

各种应用和影响。整本《指南》最重要的部分当然是介绍现代数学各主要分支学科的第四部分，而第三和第五部分则是进一步解释第四部分所涉及的一些现代数学最基本概念和最重要定理的具体内涵。

《指南》的第四部分在介绍现代数学的各主要分支学科时，按照20世纪现代数学历史发展的主要线索，力求通俗地介绍现代数学各主要分支学科所要解决的问题和一些具有代表性的成果。为此《指南》尽量减少使用高深的专业术语，并且选取对解决研究生专业基础课教学难点有帮助的历史素材和至关重要的思想方法，努力还原被擦去的数学家“走过的痕迹”。不过,在《指南》第四部分极其有限的三百多页的篇幅内，只能对现代数学各主要学科中极少的基本内容来进行解说。

《普林斯顿数学指南》主编 Timothy Gowers 是剑桥大学教授，1998年菲尔兹奖获得者

在现代数学众多的分支学科中,《指南》着重强调了数论、代数几何、拓扑学、表示论等基础分支学科的重要性，这是特别值得我们注意的。根据20世纪数学发展的主要潮流和在未来的发展前途，该书认为现在的学生应该着重学习的现代数学分支学科依次为：代数数论、解析数论、计算数论、代数几何、算术（代数）几何、代数拓扑、微分拓扑、参模空间、表示论、几何与组合群论、调和分析、偏微分方程、广义相对论、动力系统、算子代数、镜像对称、顶点算子代数、代数组合学、概率组合学、计算复杂性、数值分析、集合论、逻辑与模型论、随机过程、概率模型和概率模拟等26门分支学科。这与目前我们国内对现代数学分支学科的划分与强调有不小的差异。我们比较重视让学生学习偏微分方程、计算数学、泛函分析、微分几何等比较传统经典的学科。但是另一方面，对数论、代数几何以及拓扑学等主流的基础学科，我们缺乏必要的关注与投入。这其实也是导致我国基础数学研究水平还处于较低层次的一个主要原因。例如目前在国内上百所设置了数学专业的高校中，只有个别几个学校能够开设基础的代数几何课程，而我国迄今为止由国内学者写的代数几何基础的中文教材只有一本[4]。

《指南》对于现代数学主要分支学科的这种强调的重要意义在于：它能帮助现代数学的初学者拓展学习的视野，从整体上了解日趋统一的现代数学的来龙去脉，为以后的学习与研究打下坚实的基础，并且能够从浩如烟海的数学文献中辨别出现代数学进一步发展的可能方向。

以下仅对《指南》第四部分中位于前面的一部分现代数学基础分支学科的内容作一些简要的分析与说明。

代数数论 代数数论是一门运用抽象代数的方法来研究代数数域和代数整数环的算术性质的分支学科。《指南》按照数论发展的历史途径，从古典的二次无理数逼近问题逐步引入二次代数整数环的概念，然后直接讨论其至关重要的唯一分解问题，这是因为在历史上试图证明费马大定理而导致人们关注这一重要问题。为了弄清楚影响唯一分解性质的障碍,《指南》用具体的计算例子介绍了高斯的重要发现：即可以用二元二次型来度量二次代数整数环是否具备唯一分解的性质，以及如果不具备的话在何种程度上具备。由此引入戴德金非常基本的理想概念，它可以将二元二次型所涉及的繁琐计算逐步转化为理想的运算，并且还能非常自然地形成理想类群和理想类数这两个更抽象的概念，以便于用来衡量是否具备唯一分解性质。《指南》详细介绍的另一个衡量唯一分解性质的工具是经典的椭圆模函数，它在某些代数整数上的取值也是代数整数，这就引出了克罗内克希望的将某些他感兴趣的代数数表示成某些解析函数的值的“青春之梦”，也就是将代数数论与经典代数几何统一起来的梦想。这个梦想实际上也就是后来现代代数几何产生的萌芽，并且随着群表示论的加入,最终导致产生了庞大的Langlands（朗兰兹）猜想（或Langlands纲领）。

解析数论 与代数数论关注不定方程的精确解不同，解析数论着重于研究如何获得数论函数的好的近似，为

此必须要运用分析中函数逼近的方法。《指南》从详细介绍由高斯发现的估计素数个数上界的素数（分布）定理开始，先推导出欧拉运用整数的唯一分解性质而得到的经典的欧拉乘积公式，从中通过复变函数解析延拓的方法产生了著名的黎曼 ζ 函数。再用阶梯函数的技巧具体给出了素数（分布）定理与黎曼 ζ 函数的零点之间的奇妙联系，由此看出研究黎曼 ζ 函数的重要意义，并进一步引导出了有关黎曼 ζ 函数零点分布的黎曼猜想。接下来，《指南》介绍了与素数（分布）定理类似的估计模 q 与 a 同余的素数个数的问题，从中自然地引出了与黎曼 ζ 函数相似的重要的狄里克雷 L- 函数，这时也有相应的“广义黎曼猜想”。此外《指南》还讲了椭圆曲线的 L- 函数及其基本性质，并且指出：出现在算术（代数）几何中的各种 L- 函数的系数可以用来描述满足某种模 p 方程的点的个数，而后来的 Langlands 纲领则是寻求对于这些联系的更深入的理解。

代数几何 依 I.R.Shafarevich（沙伐列维奇）的观点[5]，代数几何在 20 世纪现代数学的发展历史中占据着一个比较中心的位置。这是因为在 20 世纪基础数学各主要分支学科的发展过程中，代数几何所起的推动作用最大。抽象代数、代数拓扑与微分拓扑、整体微分几何以及分析中许多重要的理论都是因代数几何的需要而提出的，同时代数几何也将分析、拓扑和几何中的许多基本概念抽象提升到了更高的层次，所以说代数几何是 20 世纪数学统一化的一个主要源动力。在大多数 20 世纪现代数学重大进步（例如获得菲尔兹奖和沃尔夫奖的工作）的背后，总能看到代数几何的影子。代数几何最早起源于在 17 和 18 世纪牛顿和 Bezout（贝朱）等人关于平面代数曲线的研究工作。到了 19 世纪上半叶射影几何登场后，才开始出现关于曲线和曲面的初步的代数几何理论。然后黎曼在研究阿贝尔积分理论的过程中提出了内蕴的黎曼面概念和代数函数的理论，打开了通向现代代数几何的大门。在这之后，分析学派、几何学派和代数学派分别用他们自己的语言进一步发展了这门不同寻常的学科。一直要等到 20 世纪的中叶，当整体微分几何、多复变函数、抽象代数，以及拓扑学得到充分的发展后，A. Grothendieck（格罗腾迪克）才能在这几个学派工作的基础上，用更精确的交换代数与同调代数工具、更先进的几何与拓扑思想将经典的代数簇理论推广成适用面更广的概形 (schemes) 理论，从而将代数几何打造成一个将几何、分析和代数统一起来的极其完美的理论体系，促进了 20 世纪下半叶基础数学的大发展。《指南》在介绍代数几何时，首先指出代数几何的主旨是将几何问题转化为代数问题来做，反过来也可以在解决代数问题的时候运用几何的想法。例如虽然多项式方程组很难求解，但是一旦为其赋予了一个对应的几何图景，就能够获得定性的理解，这样就为下一步取得定量的解答创造了有利条件。因此代数几何这门学科实际上就意味着几何与代数的完美统一。《指南》接着用直观具体的简单例子详细解释了代数簇的概念，包括曲线、曲面、三维代数簇等基本概念。《指南》在这里不仅粗略地指出什么是概形，甚至还罕见地解释了轨形 (orbifolds) 和代数堆 (stack) 等高度抽象概念的大致含义。《指南》还接着讲解了最基本的 Bezout 定理、零点定理、相交重数和维数的概念，以及奇点分解的初步理论，并且用一种比较简单的取商轨形的方法给出了椭圆曲线参模空间 (moduli spaces) 的初步概念，这个空间中的每一个点都对应了一条椭圆曲线。

算术（代数）几何 这门学科是代数几何与代数数论相结合而产生的交叉学科[6]。除了介绍一些重要的经典算术（代数）几何问题，《指南》在这里着重讲解了抽象的概形概念。为此，《指南》从最经典的初看上去与几何毫无关系的丢番图不定方程入手，用一种简单的比喻方法解释了如何将代数簇的几何研究转化为对相关坐标环的代数研究（例如不可约簇对应于整环）。代数研究的好处是可以将有关结果进一步推广到更一般的情形，目标是实现人们长久以来希望的将代数几何与代数数论统一起来的梦想。由于不是每个环都可以成为代数簇的坐标环，那么为什么不能发明一种广义的几何对象，使得每一个环都可以成为这种广义几何对象的“坐标环”呢？而这种新的几何对象就是著名的概形。在概形上，可以用精细的纯代数的方法来研究各种抽象的几何性质，这样就为解决一批重要的经典问题开辟了道路。

代数拓扑 拓扑学是现代数学中比较年轻的学科，代数拓扑的方法是运用抽象代数的工具，赋予每个拓扑空间一些同胚不变量，例如拓扑空间的“洞的个数”等。在现代数学中之所以要大量使用抽象的拓扑学方法的主要原因是由于研究高维抽象几何空间整体问题的需要。《指南》按照拓扑学发展的历史途径，先解释了在 19 世纪末，以“三体问题”为代表的一批经典的数学物理问题因为无法求出精确解，只能转而考虑定性的拓扑解。然后仔细地讲解了连通性、相交数、基本群与同伦、高维的同伦群、同调群、上同调群、上同调环、向量丛和示性类等拓扑学中最基本的概念。该书还用比较直观的方法讲述了同调群和上同调环的计算，特别是重点介绍了经典的球面同伦群的计算问题，以及用历史上著名的 Hopf（霍普夫）纤维丛来说明上同调环的用处。而为了对光滑流形进行分类，就需要研究它们

的切丛（例如是不是平凡的），这就引出了衡量向量丛是否平凡的示性类理论。在三种示性类中，最具重要性的当然是描述复向量丛是否平凡的陈（省身）示性类。此外《指南》还进一步介绍了在20世纪中叶由代数几何的研究中引发出来的更一般的同调理论——K-理论的基本思想及其用处。

微分拓扑《指南》在这里重点介绍了微分拓扑中非常重要的微分流形的分类问题。先讲比较简单的0维、1维和2维流形。而对于比较复杂的3维流形，《指南》仔细解释了Thurston（瑟斯顿）的工作，即用八种几何结构来对3维流形进行分类。接下来简单介绍了Freedman（弗里得曼）、Donaldson（唐纳森）和Witten（威顿）等人关于4维流形的著名工作，以及高于4维的流形的研究状况。不仅如此，《指南》还简要讲解了Hamilton（哈密尔顿）和Perelman（佩雷尔曼）如何利用偏微分方程和黎曼几何的工具成功解决庞加莱猜想问题的大致过程。值得我们注意的是《指南》实际上将整体微分几何和几何分析也纳入到了微分拓扑的范畴中，这说明用整体微分几何与偏微分方程的方法研究微分流形上的整体几何性质，其目标指向了微分拓扑，由此我们也可以将拓扑学看成是更抽象的现代意义上的几何学。

参模空间 参模空间的方法是一种用于许多几何与拓扑对象分类问题的强有力方法。它试图从整体的视角来研究某种数学对象，这种想法自然是来源于代数几何中用一个代数簇来刻画一整类几何对象的做法。传统的方法是先通过某些特定的几何结构的计算（例如度量）来获取拓扑不变量，然后再设法证明这种计算与所选取的几何结构无关。而参模空间的新方法则是同时对所有的这种类型的几何结构进行计算，如果能证明相关的收敛性，则所获得的结果自然就不依赖于特定的几何结构。这种思想方法不仅在当代理论物理学的弦论（string theory）中得到了许多应用，而且微分拓扑中的Donaldson理论和Seiberg-Witten（塞伯格-威顿）理论，以及应用于计数几何(Enumerative Geometry)和辛流形拓扑的Gromov-Witten（格罗莫夫-威顿）理论，还有费马大定理的证明和Langlands纲领等，也都要用到参模空间的方法，例如重要的模形式和自守形式就是参模空间上的函数。《指南》从讨论射影平面上通过原点的全体直线组成的最简单的参模空间开始，将其归结为一个线丛，这样就可以用示性类来找出有关的拓扑不变量。接下来《指南》用比较多的篇幅重点介绍了曲线的参模空间问题。为了更好地研究曲线的分类，需要研究与其密不可分的内蕴紧黎曼面的分类问题。但是如何将具有同一亏格的全体紧黎曼面组成一个包含丰富几何内涵的参模空间（例如成为一个复流形），是一个十分复杂的问题。对于亏格为1的椭圆曲线全体，通过运用现代几何中纤维丛的思想方法，将每个黎曼面与复上半平面上的点联系起来，再对一个相关的群作用取商，就得到了椭圆曲线的参模空间，从而实现了按照全纯同构等价对椭圆曲线进行分类的目标。此外《指南》还介绍了亏格为g曲线参模空间的更复杂的构造方法，及其与雅可比簇、阿贝尔簇的联系。

编者按：截至本文完稿时，The Princeton Companion to Mathematics一书的英文影印本尚未在国内正式出版，此书的中译本据悉目前正由武汉大学前校长、数学家齐民友教授翻译。

参考文献

1. [苏] A. 亚历山大洛夫，数学——它的内容、方法和意义（三卷），科学出版社，1988.
2. T. Gowers (ed.)，The Princeton Companion to Mathematics, Princeton University Press, 2008.
3. 李克正，代数几何初步，科学出版社，2004.
4. 陈跃，从历史角度讲现代数学，数学通报，2011，第5期.
5. I. R. Shafarevich, Basic Algebraic Geometry 1, Springer-Verlag, 1994.（世界图书出版公司1998年重印）
6. 陈跃，对话李克正教授：为什么学习代数几何，高等数学研究，2011，第4期.

作者介绍：

陈跃，复旦大学数学本科，上海师范大学数学硕士，现任上海师大数学系副教授，主要研究代数几何的历史。