庞加莱猜想与几何

田 刚

今天我讲一下庞加莱猜想和几何，主要是讲几何的一点历史，为什么会有庞加莱猜想，我希望以比较形象的方式讲一下什么是庞加莱猜想。当然庞加莱猜想肯定跟庞加莱有关，他本人是一个非常非常著名的法国数学家。他同时又是一个理论科学家和哲学家，在很多方面都有创造性的建树。1904 年庞加莱提出了一个著名的猜想，这个猜想在一个多世纪的时光中一直困扰世界上的数学家，虽然 100 多年都没有解决，但是在我们寻找解的过程中，实际上是发展了很多数学，所以庞加莱猜想尤其在拓扑学，是驱动力之一。

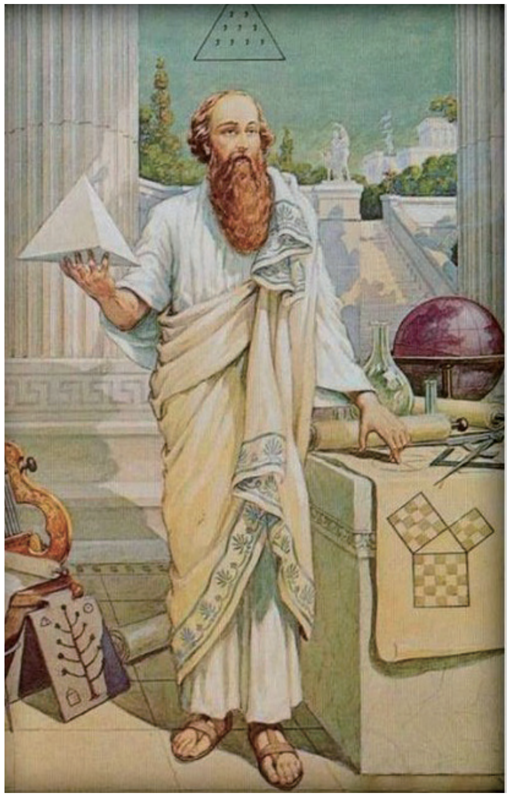

庞加莱（1854-1912）

庞加莱猜想跟几何的发展紧密相关。几何学在数学中占有很高的地位。数学，尤其是几何学，所涉及的对象是普遍而抽象的东西，它们同生活中的实物有关，但是又不来自于这些具体的事物，因此在古希腊学习几何被认为是寻求真理的最有效的途径。数学在古希腊有很崇高的地位，像毕达哥拉斯一样，等一下要提到，他在研究数学的时候，他是觉得这个是很神秘的东西，很多时候他不愿意跟人分享他的知识，他觉得这是一个寻求真理的最有效的途径。这当然可能是传说——柏拉图学院的门口写着，不学习几何不得入内，就是不懂几何不得入内。据说柏拉图曾说上帝就是一个几何学家。

毕达哥拉斯是公元前 500 多年的古希腊著名哲学家、数学家和天文学家，其思想和学说对希腊文化产生了巨大的影响。在数学方面，毕达哥拉斯以发现勾股定理著称，对几何贡献巨大；他试图用数来解释一切，认定世间万物皆数，但其研究数学的目的并不在于实用，而是为了探索自然的奥秘。这个可能是古希腊数学家跟很多其他当时的数学家不同的地方，因为当时数学的发展，比如说古巴比伦，古中国，它肯定都是跟很多实际问题有关系，比如说天文、丈量土地等等。


古希腊数学

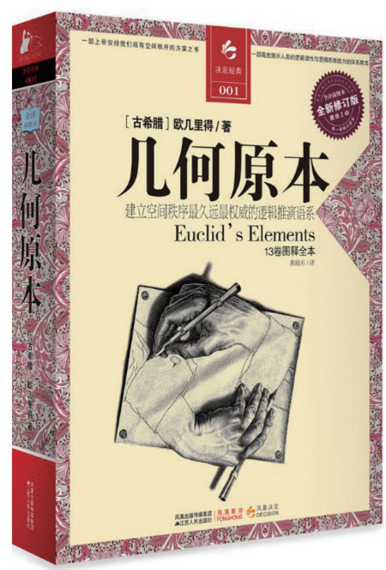
但是，把数学本身作为一个学问来研究，这个还是从古希腊的毕达哥拉斯这些数学家开始的。毕达哥拉斯除了数学方面，他还想一些当时很“没用”的问题。比如说他首创了地圆学，就是说地球实际上是圆的。但是你想一下那时候，这个想象还是非常富有远见的。当时人们所生活的区域很小。比如毕达哥



毕达哥拉斯（约公元前 569 年 - 公元前 475 年）

拉斯当时生活的地方是现在的土耳其的西南海岸，他这个地方最多可能是到达埃及现在的亚历山大。最终区域在地中海一块。所以当时在这么小的范围，肯定看地球还是很平的，但是他也想象地球应该是圆的。并且古希腊科学家或者数学家既然假设地球是圆的，他们实际上还去测这个地球的直径，也是 2000 多年前，其实精确程度和今天的测量相当接近。而且他的测量主要是用三角函数的一些性质。

在欧几里得以前，已经积累了许多的几何知识，然而缺乏系统性。在公元前 300 年左右，欧几里得完成了《几何原本》一书，就是叫 *Element*。这个书当时我在中学的时候，在中学年代吧，那时候可能因为在文化大革命中间，在座的可能都没什么感觉，可能都太年轻了，很多都太年轻了。当时我们上学比较轻松一点，因为我母亲的关系，当时给我看欧几里得的《几何原本》。《几何原本》全书分 13 卷，有 5 条公理、5 条公设、23 个定义 。从这些公理和定义出发，通过严格的逻辑推理，推导出 467 个命题。当时在中学的时候，或者说几十年前，看欧几里得《几何原本》还是觉得有很多困惑。他一上来定义两个三角形怎么相等，为什么要相等，类似这样的问题。这个问题好像是个非常没用的问题。但是数学它必须要严格，一上来就要定义什么叫做相等，什么叫做东西要相等。然后再出发，从这个出发去论证需要的定理。

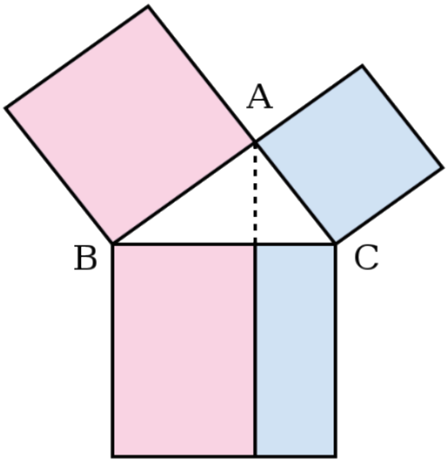


《几何原本》

所以欧几里得的这个《原本》，是一个非常了不起的著作。据说欧几里得《原本》在当时的发行量已是非常大，又因为印了很多次，总的发行量可能排到世界第二、三位，仅次于《圣经》、《古兰经》。作为一本数学书、科学书，可以说是绝无仅有的。

在欧几里得的《原本》里头，它实际

上是想证明勾股定理。这可能是可以查询到的第一个严格的数学证明，实际上它是用平面几何中相似原理来证明勾股定理。因为边 AB 的平方加上边 AC 的平方等于边 BC 的平方，也就是说这个粉红色的正方形的面积加上蓝色的正方形的面积要等于这个大的正方形的面积。根据相似原理，这块蓝色矩形的面积和蓝色正方形是相等的，粉红色矩形的面积应该跟这个红色正方形的面积是相同的。



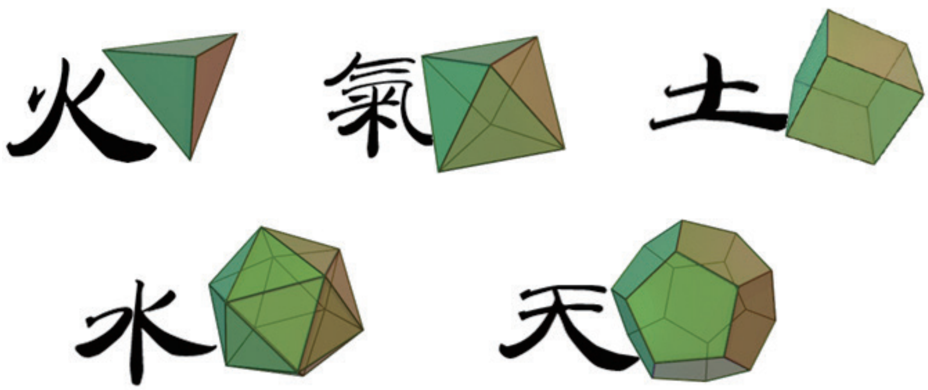
对勾股定理的一种证明

根据相似原理，你找到相应的边，相应的矩形，然后利用相似原理来证明这个面积的相等。我们知道勾股定理实际上在证明之前有很多人已经想到有这样很奇妙的数组，我们可以叫它勾股数组。古埃及人也有过，我们中国也知道有“勾三股四弦五”的特例。在西方，也找到了很多这样的例子。比如说，下图是一个考古发现的古巴比伦泥板，就是古巴比伦把很多东西写在一些泥板上面，经过烧制，比较容易留下来。

古巴比伦泥板书

在这上面就发现一个勾股数组 18541，12709，13500，都过万了，其中 12709 的平方加上 13500 的平方等于 18541 的平方。这个数组大家猜测的话不可能是测出来的，一定是某一些人当时闲着没事，想着勾股数组很大，思考出来的东西。因为当时的技术达不到这个测量的量级。这个可能早在 3600 多年前就写出来了。当时就有一些人觉得数学中间还有很多奇妙的东西，虽然那时候没有证明，但是已经发现这些数具有很大的性质。勾三股四弦五，都不是一个独立的。

《几何原本》还有一个最亮的结果，说明当时的几何在古希腊的重要性，而且他们去思辨这些东西。比如说欧几里得的《原本》中间有一个结果，叫证明正多面体。什么是正多面体？就是说它的每个面都是正多边形，它每一个角也都是相等的角。下图第一个是正四面体，它由四个三角形组成。第二个是一个正八面体，第三个是一个正六面体，就是我们的立方体。第四个是正二十面体，第五个是正十二面体。在柏拉图的哲学中，认为这个世界是由这些元素组成的；它有一定的数学根据，有一定的几何根据在那，我们也有五行的说法。但是正十二面体是很奇怪的一个，它的每个面是正五边形。从现在的语言来说，实际上这五种东西是对应着五种对称群，比如说有一些对称的有限群就有五种。



正多面体与宇宙元素

当时欧几里得完全通过几何的一些公理，通过一些逻辑推理推断出只有这五种正多面体。现在如果中学不教这个的话，听起来这也是一个挺奇妙的定理。但是今天我不会去证明，因为这个跟我今天讲的关系不是太大。

欧几里得几何学成为用公理化方法建立起来的数学演绎体系的最早典范。在之后的 2000 多年间，这一严格的思维形式，不仅用于数学，也用于其他科学，甚至用于神学、哲学和伦理学中，产生了深远的影响。这也是为什么我刚才提到，欧几里得《几何原本》印量那么大，因为很长时间里它的整个思维方式对其他很多科学，包括神学都有重大的影响。

欧几里得《原本》当中有五条公设，就是五条看上去很显然的东西。前四条公设为：

1. 由任意一点到任意一点可作直线。这个都很显然了。
2. 一条有限直线可以继续延长。这个线可以继续向前走，没有尽头。
3. 以任意点为心及任意的距离可以画圆。就相当一个圆规一样，这个也很显然。
4. 凡直角都相等，都是 90 度。

这四条公设看起来至少是非常显然的。那么第五条公设是什么呢？

5. 平行公设：通过一已知点，能作且仅能作一条直线与已知直线平行。

假设我给一个点，再给一条直线，我可以通过这一点做一条直线；可以与已知的直线平行。什么叫跟已知的直线平行呢？比如说你永远这么走下去，它永远不跟其他的线相交。但是这个看上去不是很显然。

第五公设能否设为公设，或者说它成为定理，也就是说，它要么是独立的，要么它可以从其他的那些推出来。它不是独立的。于是有了争议长达两千多年的平行线理论。两年前我去西班牙一个城市访问，那个地方在中世纪就有一些数学家在证明这个东西。当然有的时候他们觉得证出来了，所以说可以不是独立的，但是过一段时间他们觉得这个证明是错的，这些人没有留下名字来。那时候时间过得比较慢，信息传播比较慢，所以我想这两千年中间肯定有很多很执着的研究者，但他们是不怎么幸运的研究者。

在 1830 年左右，这个问题被解决了。当时俄国人罗巴切夫斯基和匈牙利的雅诺什发现了第五公设不可证明，并且创立了非欧几何学。他们实际上发现不需要平行线公理也能做几何。所以，这个公理既然你不需要它也能做几何，那么就说明它不可能由其他的四条推出来。非欧几何，用今天的语言叫双曲几何，一会儿我还会提到。实际上雅诺什在研究非欧几何过程中遭到家庭跟社会的落寞对待。因为他的父亲也是数学家。他父亲一辈子也在研究这个问题，没有成功。所以他不希望他的儿子重蹈覆辙；最后弄得精神压力很大，弄得失落感很大。当然他儿子可能跟他父亲一样比较执着，这肯定有遗传在里面。所以，他儿子还是坚持这个研究。

欧几里得

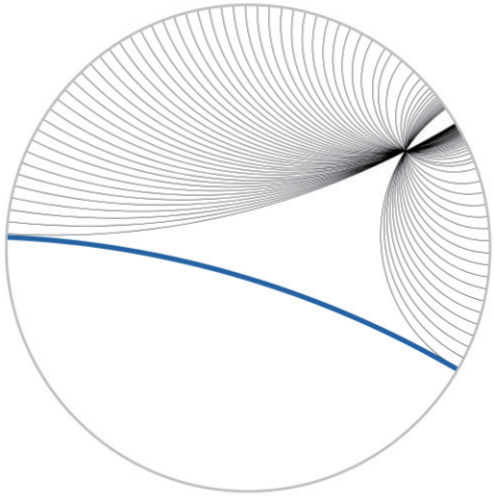

雅诺什与罗巴切夫斯基

雅诺什坚持研究比较幸运，比他父亲幸运。他最后证明了，并且创立了非欧几何，取得了成功。实际上当时他们也不一定就是最先证明第五公设这个定理。因为当时雅诺什的父亲也是数学家，他跟高斯认识，他就写信给高斯说，他儿子证明第五公设不需要也能做几何。但是高斯后来回信说，他早就知道这个东西了；他把手稿也可能拿出来，不要也能做几何。总之，高斯很可能已经有了比较充分的证明，但是他已经成名了，他不能像年轻人胆子那么大，他讲话要小心一点，所以他当时不敢公开发表。但是他告诉雅诺什的父亲产生了一些副作用。什么副作用？雅诺什因此受到了比较大的打击。虽然他成功了，他觉得他做了很好的东西，结果发现有人已经在他前面做下来了。

去年秋天我们邀请一些年轻人到普林斯顿去访问，有一个是罗马尼亚人，现在做得很好。他所在的大学现在就叫雅诺什大学，只是这一地区二战后已经从原来的匈牙利被划归到罗马尼亚了。关于雅诺什受到了重大的打击，现在的记载可能有些失真，但是从年轻的雅诺什在证明这么一个很伟大的定理以后没有去发表，后来也没有什么著作来看（还是有一定根据的）。还是很多年以后，他的父亲写了书，把他儿子这个东西写了下来。所以当地的人就觉得，如果他父亲不写这本书，现在都不知道他儿子曾经做过这样的一个东西。现在唯一证明他儿子做的就是他父亲写的书后面有一个记载。

罗巴切夫斯基当时在俄罗斯的喀山大学做校长，我不太了解这个喀山大学当时是不是特别有名；罗巴切夫斯基因为发表过非欧几何的这个理论，也受到很多打击。因为当时的人觉得欧几里得几何已经两千多年了，就等于是真理了。你突然搞了一个邪门的几何，这个几何里头的平行线公理不成立。这是一个非欧几何，就是双曲几何中的庞加莱圆盘的表述。非欧几何有多种表示方式，一个就是圆盘的表述，在这个表示中间你可以看出来，它这个轴线就是大圆，就是这个圆跟边界垂直的圆，这就是它中间的直线，就是非欧几何中间的直线。那么你回去也可以看看，通过这一点跟这条线平行的，永远跟它不相交的线有

多少条，比如说有大圆跟边界垂直的大圆有多少，你可以画出来。所以说，平行线公理不存在，在非欧几何中间不存在。



庞加莱圆盘模型

在我们实际中间也碰到很多这种双曲几何或者非欧几何的主体，比如说在艺术作品中间，要是完全是欧氏几何的话就太单调了，用一些非欧几何的画出来可能更好看一点。比如下图的珊瑚也呈现非欧几何的形状，所以非欧几何是存在的。

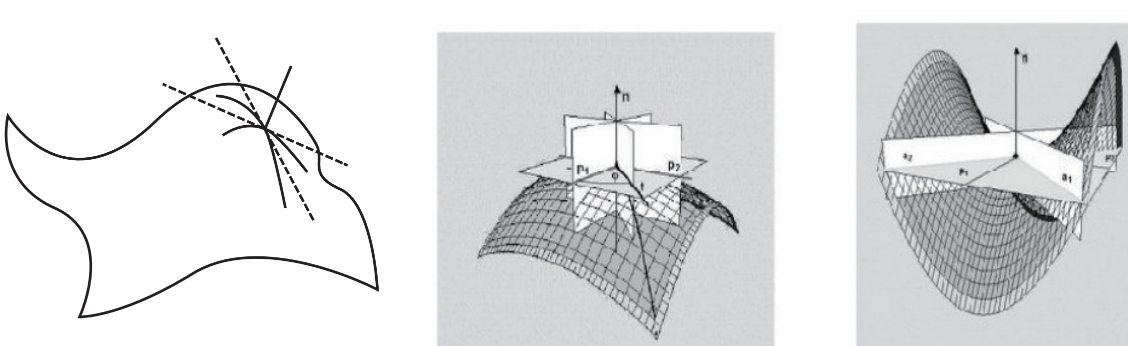
木刻版画“圆极限 III”与大堡礁珊瑚

过了 20 多年，黎曼说实际上有更多种的几何。这个非欧几何只是其中的一种，或者说欧氏几何只是其中的一种。黎曼是一个德国数学家，他 1854 年创立黎曼几何。他创立黎曼几何主要做了两件非常了不起的事。当然黎曼贡献很多，比如说黎曼猜想，我们大家都知道，这是数论中一个非常著名的问题。

黎曼（1826-1866）

他引进了流形和度量的概念，流形就是一个空间，一般我们研究几何可能像球面，或者说更复杂的曲面，这些都可以算作是流形，它给了一个抽象的几何研究对象，它把我们研究几何的对象完全抽象化。在它上面有一些度量，度量就是可以在这个空间上面测量长度，也测量角度等等一些度规的限制。他证明了曲率是度量的唯一内涵不变量。

如果两个度量的曲率相等的话，那这两个度量实际上是等价的。黎曼他本来是一个分析学家，他早期实际上在柏林是跟狄利克雷学分析。当时在德国拿到博士学位还不够，你还有一个教授资格考试，这个实际上是教授资格考试的论文，教授资格考试也要做论文。他是高斯的学生，大家都说黎曼非常聪明，就给他这么一个问题。因为当时高斯证了一个很著名的定理叫高斯定理，这个高斯定理就是说，其实当时不叫高斯定理，就是因为他的贡献叫高斯定理，就是说我们把一个曲面放在欧氏空间中间，放在我们所在的空间的时候，你也可以测量它的弯曲程度，它有两个主方向，主曲率乘起来有一个曲率，高斯证明这个曲率是一个内涵性质。当然后来他就给黎曼一个几何问题，看怎样更好地能够讨论几何，最后黎曼他就创立了黎曼几何。



曲率刻画了空间的弯曲程度

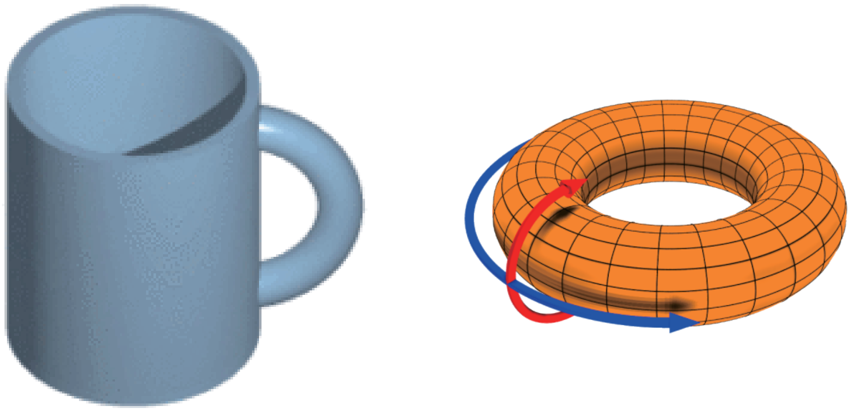
曲率本质上是什么？曲率是度量空间的弯曲程度的量，是一个内在属性。1915 年爱因斯坦运用黎曼几何创立了新的引力理论——广义相对论，使黎曼几何及其运算方法成为广义相对论研究的有效数学工具。爱因斯坦方程就是用曲率写下来的，也就是说所谓一类曲率要等于某个给定的量。在广义相对论中，

宇宙一切物质的运动都可以用曲率来描述，引力场实际上就是一个弯曲的时空。

一个很著名的实验就是1919年在日全食的时候，经过天文观测，我们在地球上可以看到在太阳后面的曲率。为什么能看到太阳后面的曲率？就是因为光线弯曲了，如果光线不弯曲的话，你不可能看到一个太阳后面的东西。那为什么能看到？就是因为太阳是一个巨大的引力场，造成了它周围的空间弯曲。所以它的直线也是一个弯曲的线。所以这个实验证明了广义相对论是正确的。大家会想，为什么要日全食才做这个东西？不日全食的话，太阳太亮，你很难看到空间。天文方面夏志宏教授是专家，他的毕业论文做了一个非常著名的定理，大家可以去了解一下。

光线弯曲了

几何学进一步发展产生许多新的数学分支，拓扑学是其中一支，但它与通常的平面几何、立体几何、欧氏几何不同。拓扑学与研究对象的长短、大小、面积、体积等度量性质和数量关系都无关。下图是一个救生圈或轮胎的表面，开始的时候它可以变成一个茶杯的表面，或者说从一个茶杯出发，开始对周围填水，慢慢里面倒满以后，就相当于变成一个柱型的表面，再加上一个手把，



茶杯和环面是拓扑等价的

最后变成一个救生圈的表面。所以在拓扑学中间，这个茶杯的表面跟这个救生圈的表面是没有区别的，它是一样的。

可能很多同学觉得，那这个东西也太不精确了，变来变去，仍然把它看成一样东西。但是大家换一个角度想，就说明这样的性质是非常稳定的性质，你连续形变但它的性质保持不变，就是拓扑性质是非常稳定的。现在比如说量子计算这些东西，它实际上是要利用一些拓扑的不变性。庞加莱猜想就是拓扑学研究的著名问题之一：它给出最简单的三维空间实际上就是三维球面的拓扑刻画。或者简单地讲，就是它给了一个最简单三维空间的拓扑刻画。

庞加莱猜想是拓扑学发展的重要动力。100 多年来，庞加莱猜想刺激了拓扑学中的一些新的工具或者发展了新的理论。包括 60-70 年代高维空间的拓扑分类，80-90 年代四维空间微分结构的研究，都是跟庞加莱猜想的研究有关系。它跟物理学也紧密相连，我刚刚讲到量子场论，或者量子计算这些都跟拓扑学有关系。比如，1960 年，斯梅尔（S. Smale）将其推广到任意维，就是庞加莱猜想原来是关于三维空间的，我们所在的空间就是三维的，但是证起来很困难。数学家他就想，先从更高的维数，高维空间我们可能在生活中见不到，不过应该是存在的。斯梅尔证明了五维和五维以上的广义庞加莱猜想。他首先说，在高维也有一个对应的猜想，考虑历史的问题，就是高维球面的拓扑刻画，他证明了这个猜想。

1982 年的时候，弗里德曼（M. Freedman）解决了四维的庞加莱猜想。但是这些都是一个由庞加莱原来问题引导出来的一些问题。当然我们知道高维还是确实有的。再比如，1980 年， 瑟斯顿（W. Thurston）提出了一般三维空间的几何化猜想，他提出了一个更广的关于整个三维流形和空间的一个刻画，这就是几何化猜想。如果这个猜想解决了以后，庞加莱猜想就解决了。这就是他为什么要提这个猜想。他还验证了一大类三维空间确实满足他的猜想。当然这类空间不包括庞加莱猜想，所以从这个方面为庞加莱猜想成立提供了

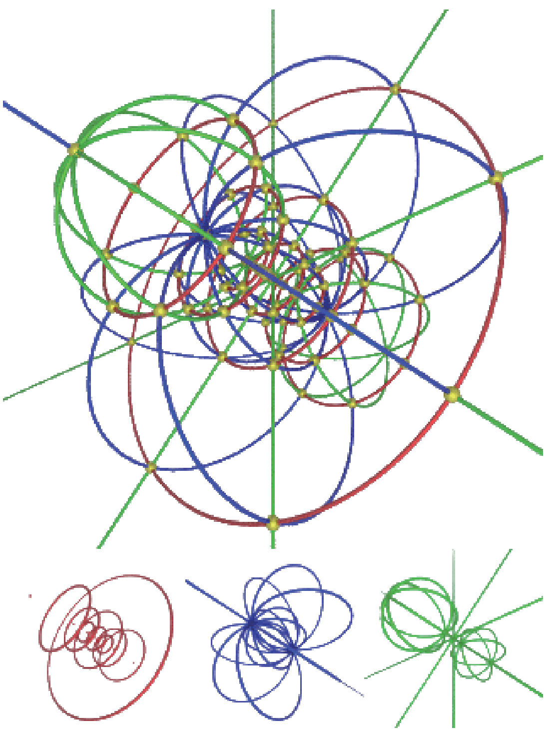
斯梅尔（1930-），弗里德曼（1951-）

瑟斯顿（1946-2012）

强有力的证据。

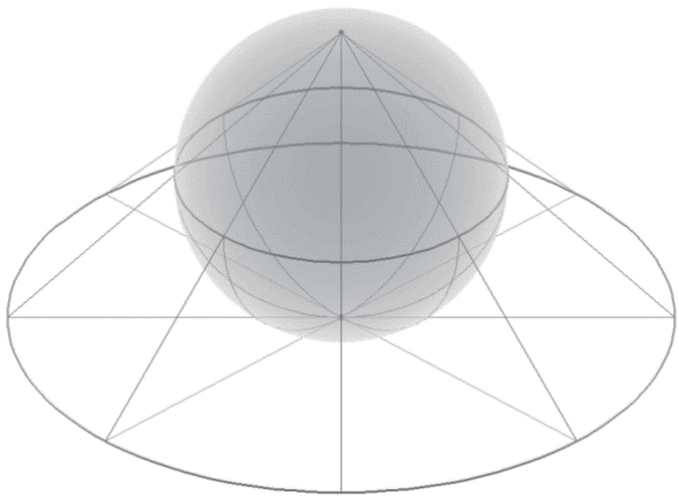
我们稍微花一点时间想象一下什么是庞加莱猜想。庞加莱猜想给出三维球面的一个拓扑刻画。那三维球面有何特别的性质呢？我们空间有时候会看到二维球面，但是看不到三维球面。所以我们要开发我们的智力来想象。

我们可以想象二维球面和三维球面，甚至高维球面，更高维球面它都有类似的性质。二维球面有什么特别的性质呢？二维球面有一个刻画，有很多种描



拓扑

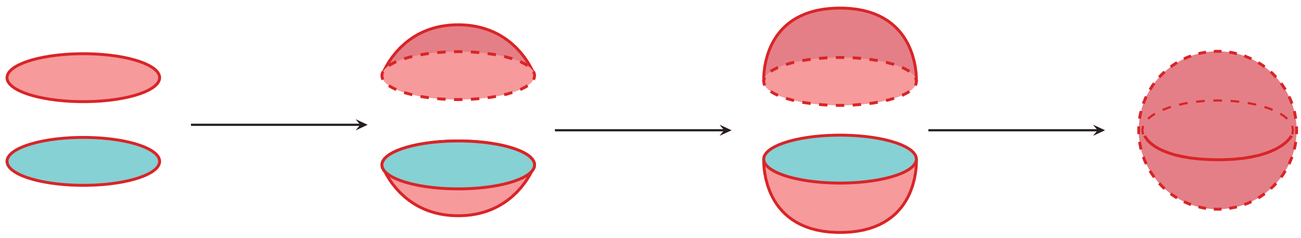
述。一个描述二维球面就是单位球，放在我们的空间里面。假设，我选一个点，比如说北极点。假设这个球面它放在一个平面上，这个平面会无限延长。然后你从北极点出发做投影，把球面上任何一点，除了这个北极点的任何一点映到这个上面，拖在球的一面上，这样我们就可以说，二维球面可以看成平面加上一个北极点，也就是加上一个无穷远点。除了这一点以外，其他的点都可以跟这个平面上一点一一对应上，这叫球极投影。



球极投影

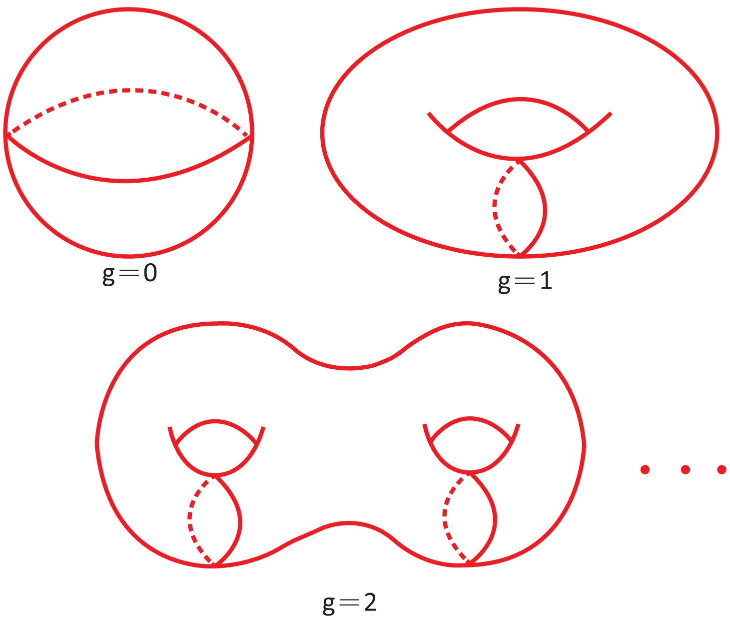
所以通过这个球极投影，我可以理解什么是二维球面，就是平面加上一个无穷远点。所以类似的，我们用数学可以想像三维球面也可以做球极投影，因为做球极投影完全可以用数学公式表示出来。我不会在这用数学公式表示，但是它确实可以用数学公式表示出来。表示出来的数学公式跟维数没有关系，你也可以放到任一维数中。所以这样的话，你就可以想象三维球面可以等同于我们生活中的三维空间再加上无穷远点。这个在数学中可以严格证明，怎么严格证明？就是刚才我讲的，我没有写出来的数学公式。这个证明并不难，就是把球面的点跟三维空间的点连线写出来，找到球极公式，数学公式就出来了。

这是刚刚讲的一种方法。还有一种比较拓扑一些的方法，怎么想象二维球面。你可以从两个圆盘出发，然后做形变。我们研究这个拓扑学刚刚说了，连续形变不会改变这个物体的拓扑性质，或者这个曲面的拓扑性质。所以我先把这两个圆盘把它变成一个球冠，再变成半球冠，然后再沿着边界把它粘起来，就变成球体。所以二维球面可以通过两个圆盘沿着边界把它粘接起来，就类似我们包饺子。所以我们也可以想象，三维球面可以是通过三维球体的边界，实心球的边界是二维球面，通过它的边界粘合成的。在数学上确实如此，所以三维球面刚才有一个描述，无穷远处我们所在的空间加无穷远点。还有一个描述就是两个实体球，沿着它的边界把它粘起来。这就是三维球面另外一个方法。



两个圆盘粘合成一个 2 维球面

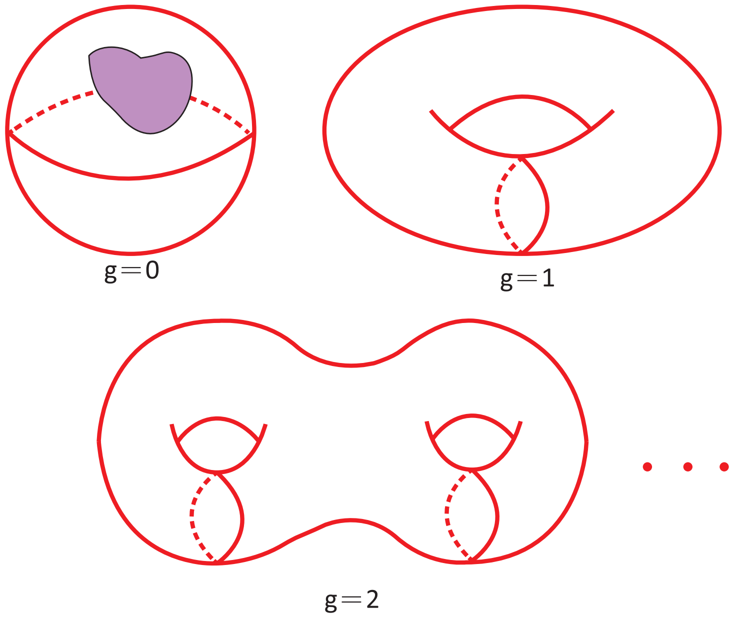
有了这两个描述以后，我解释什么叫单连通。曲面上所谓的单连通在一定意义上就没有孔。



曲面的亏格

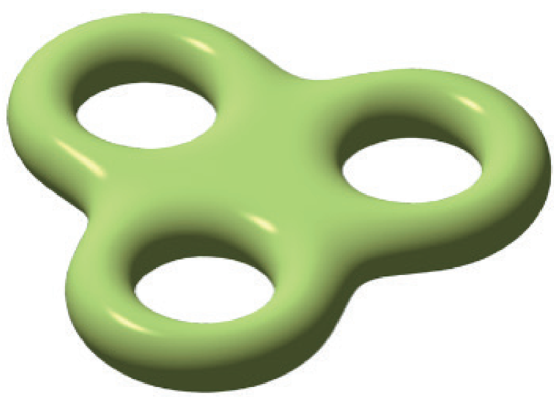
假设你看二维球面上，取任何一个路径，它一定可以建一个圆盘。其他曲面不具有这个性质，像这个环面，这个就不会建一个面这样子。所以二维球面是单连通的，也就是每一个圆盘都建一个拓扑圆，或者直观地说，二维球面没有孔。

所以三维球面也是在里头，这都可以证明，我就不证明了。跟刚才二维球面一样的性质，也就是说它上面没有孔，任何一个圆圈，它都可以填一个曲面在里头，把它填满。我们刚刚“证明”了三维球面是单连通的，即没有孔。直观地讲，庞加莱猜想是说上面命题的逆成立：如果一个三维空间没有孔，那么它一定是三维球面。也就是没有孔变成了一个三维球面的拓扑刻画。



曲面的单连通与不单连通

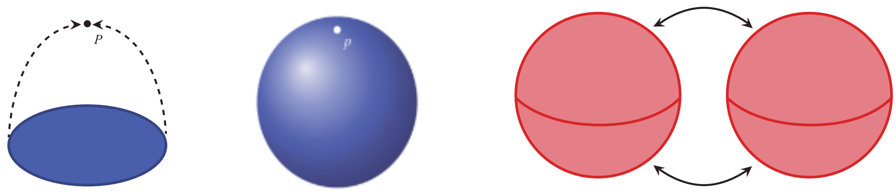
一百年来，拓扑学家是如何去设法证明庞加莱猜想的呢？经典途径是什么？就是我们刚刚画的几张图。从曲面讲起，曲面是二维的，如果局部说，可以用两个自由方向，所以这些二维面都可以放在一个三维空间中间并且都是三维实体的边界。我们称这样的三维实体是实心环柄体。



三维空间中的环柄体

三维球面的第二种刻画，是通过粘合两个三维球体的整个边界而得到。就是两个实心球，通过它的边界，把它粘起来。在粘的过程中间，肯定有一种把第一个球体边界每一点跟第二个球体边界上每一点做一个对应，有一个粘法。当然没关系，因为它的边界是球面，你随便怎么粘，它最后出来的拓扑性质是一样的；通过这样的三维球面它有一个分解，这个分解是什么？就是通过两个

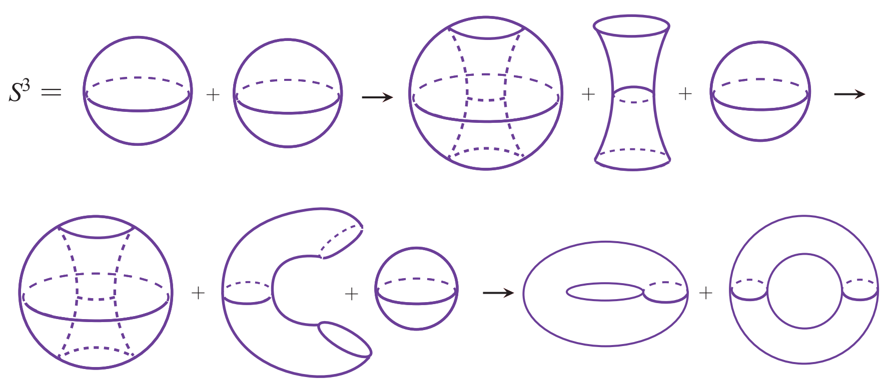
实心体把它粘合起来。这个称之为三维球面的零亏格的环柄体分解，因为你用的是实心体，实心体是没有孔的，因此在外部空间看也是没有孔的。



三维球面的两个刻画

实际上任何没有边界的三维空间，有一定的有限条件，都能够通过粘合两个一定亏格的环柄体的整体边界而得到。这个在数学上是可以严格证明的，比如两个环面通过一定的粘法，也可以变成一个三维球面。

所以这是一个很著名的定理，当然它这个定理中间有一点不好就是，它的分解不是唯一的。所以一个三维空间可以有不同规格的环柄体分解。就像我刚刚讲的，这个是球面的，三维球面可以变成两个环柄体。亏格为一的环柄体的分解甚至可以很形象地画出来。这个实际上还可以变成一个很严格的定理，这个是刚刚讲的，S^3 是三维球面的符号，我们已经知道它是两个实心球沿着边界把它粘合起来。那么你在其中一个球面打一个孔，你就把三维实心球的这一部分，打孔的这一部分拿出来放到原来两个球中间，那么实际上你就可以说你的三维球面由这三个东西组成，中间这部分是这个孔挖出来的部分。



三维球面的环柄体分解

然后你把中间挖出来的这一块形变，变成一个把柄一样的东西。再接在第二个球上面，这就变成一个环柄体。然后剩下没有孔的东西，你再进行形变，把上下部分都磨圆，它也变成一个环柄体。这个图说明一个三维球面可以变成两个环柄体；亏格为一的环柄体的这个连起来了。所以这个环柄体分解是不唯

一的，它也可以有不同亏格的环柄体分解。刚才这个东西再继续挖孔可以变成任何亏格的。

但是高亏格曲面的结构，比二维球面更复杂。比如说如果亏格更高的话，它的曲面边界更复杂。不像零亏格它的边界只是一个二维球面。所以会有许多不同的方式把它粘合在一起，这样会得到不同的三维空间。那 100 多年科学家怎么来想办法证明庞加莱猜想呢？就是说我们知道只有一种方法，将二维球面同自身粘合，亏格为零的环柄体分解的三维空间一定是三维球面，这个我们是知道的。

所以说如果我们可以找到一个方法，使得单连通的三维空间分解成两个三维球体，有一个零亏格的分解的话，那就可以证明这是三维球面，从而解决庞加莱猜想。这个地方好像有一点奇怪，我们知道这个三维空间一定可以做分解，只是这个环柄体洞的个数我没有办法控制。如果洞的个数充分大的话，这个分解一定有。但是另一方面你要想把这个洞的个数减少，减少到零的话，你就把这个庞加莱猜想解决了。实际上我做学生的时候，有很多数学家研究这个东西，有一种说法，如果你能把这个洞的个数限制减到二，都不需要减到零，减到二就可以把庞加莱猜想证明出来。

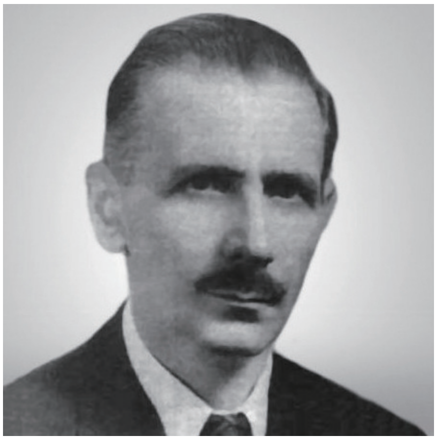
别小看这个，减少这个洞的个数不是一个很容易的东西。肯定不容易，因为到现在也没人成功过。

我提几个解决庞加莱猜想的数学家。最早研究庞加莱猜想的可能有很多数学家，但最有影响力的数学家可能是怀海德（J. Whitehead），这是一个英国数学家。1930 年，他宣称给出了一个证明，随后就发现了错误，主动撤消了这个证明。但在此过程中，他发现了一些单连通、非紧的，但不能等同于欧几里得三维空间的有趣例子。他不是完全没有收获，他虽然没有证出庞加莱猜想，但是他找到一类流形，这就是怀海德流形。在上世纪 50 年代与 60 年代期间，许多有影响力的数学家，诸如：Bing、Haken、Moise 和 Papakyriakopoulos（这个发音比较困难，我们就叫他 Papa）先后尝试着去解决猜想，但都发现他们想给的证明有缺陷。

怀海德（右，1904-1960）

他们在某一段时间也都觉得

自己很有希望证出来，但还是失败了。其中一个比较有一点传奇色彩的希腊数学家，他是 1948 年来到普林斯顿访问，后来就留在普林斯顿工作 25 年。他证明了很多重要的工作：Dehn 引理，闭路定理以及球面定理，这些都是 3 维拓扑的基础性工作。他因此获得 1964 年设立的第一个 Veblen 几何奖。自 60 年代早期起，Papa 就研究庞加莱猜想，直到 1976 年因病去世。他几乎所有时间都在办公室里一边做数学，一边听他喜爱的 Wagner 音乐。据说他生活非常有规律，每天早上八点钟到食堂吃饭，八点半一定到办公室开始想问题。十二点出去吃中饭，然后再回到办公室，三点或者三点半去下午茶或听报告。当然他一直没有成功，他自己可能也做好这个打算，他知道这个问题不是那么简单。



C. Papakyriakopoulos（1914 -1976）

实际上他当时也是不得已到美国，因为他在二战的时候参加了左翼组织，在山里打游击反对法西斯，但是到 1948 年的时候，因为他的政治信仰使他没有工作了，后来就到了美国。当时的希腊政府还想引渡他回去，因为他可能有种种的问题吧，但是普林斯顿坚决顶住了，所以他对普林斯顿还是非常感激的。普林斯顿还是继续让他工作。

庞加莱猜想的最终解决是依赖于微分几何和分析的方法，不是我们刚才讲的那一套方法，完全是一套原先看上去跟拓扑没有太大关系的方法。它的方法我不会详细讲，它是用了黎曼引进的度量和曲率，用的是曲率流

$$\partial_t g_{ij} = -2R_{ij}.$$

曲率流实际上是一种热传导方程，但它是非线性方程。我们通常在大学里学的传导方式，是一个线性的。所谓热传导方程就是说放一个热源，在经过一段时间以后，整个房间的温度都均匀化了。也就是说，热传导让你这个热分布越来越均匀。实际上这个里奇曲率流也是这样，它通过这个形变，使得这个度量变得越来越齐次，也就是在每一点的曲率变得几乎是一样的。

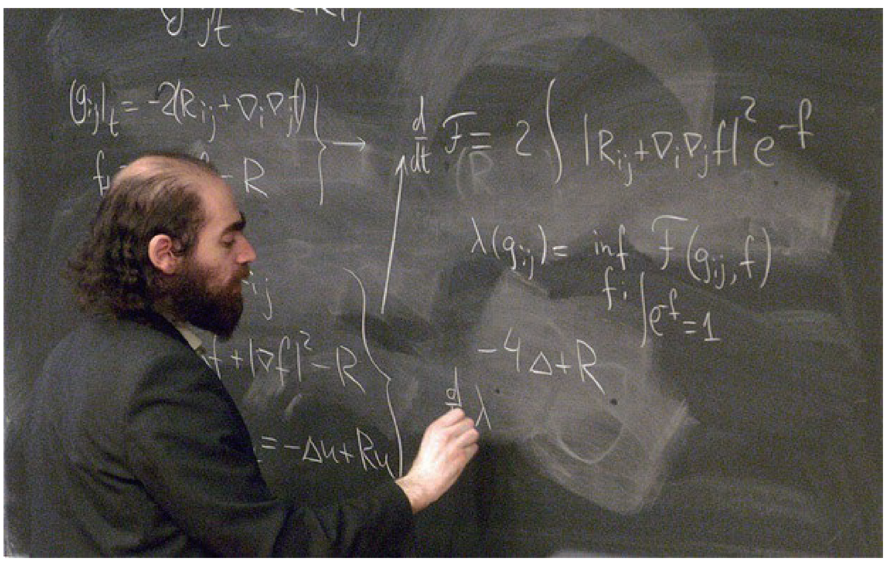
汉密尔顿（R. Hamilton）证明了里奇曲率流的许多基础性结果并给出了解决瑟斯顿三维流形几何化猜想的纲领。在一些假设下，他也解决了庞加莱猜想的一些特别情形，但他无法克服一些关键技术问题。有趣的是，普林斯顿与庞加莱猜想有很深的渊源。无论是尝试过而未成功的数学家中，还是对最终解决做出突出贡献的数学家中，许多都在普林斯顿大学工作或学习过，如怀海德，Papa，汉密尔顿等等。

我们现在也知道，2002 年 11 月 12 日，佩雷尔曼（G. Perelman）在网上公布了并给多个数学家通过电子邮件发了一篇论文。之后半年中，他又发布了

汉密尔顿（1943-）

两篇系列论文。在这三篇文章中，他概述了庞加莱猜想以及更一般的瑟斯顿几何化猜想的证明，从而实现了汉密尔顿提出的纲领。

佩雷尔曼的证明，用到了过去 50 年甚至更长时间微分几何中的许多重要进展。他一个是用了里奇流的方法，就是非负曲率空间的分类，黎曼几何的紧性理论，热传导方程的 Harnack 型估计；曲率下方有界空间的塌缩理论；极小曲面理论……几乎过去 50 年几何发展的一些工具他都用上了。



佩雷尔曼在作报告

佩雷尔曼的证明缺少细节，令人很难读懂，验证工作十分困难。经过几组数学家大约两年时间的努力，终于补齐了庞加莱猜想的证明细节。虽然佩雷尔曼的证明有些漏洞，但都是可以修复的一些问题。

瑟斯顿几何化猜想的证明验证工作更曲折一点。就在 2012 年，巴姆勒（R. Bamler）还发现佩雷尔曼证明以及他人补的细节都忽视了一个重要的技术问题。

巴姆勒

他现在是伯克利的助理教授，做的非常好，他也是普林斯顿毕业的（2011）。他发现这个问题，幸运的是，他利用佩雷尔曼的方法可以设法解决这一问题。当然这个解并不是那么显然，在此基础上，巴姆勒还证明了比瑟斯顿几何化猜想更广的一个深刻几何定理。简单地讲就是从任何一个三维空间出发，经过里奇流都可以变成一个很好的几何空间。佩雷尔曼只是证明从拓扑上一定等价于一个好的空间，但他没有从几何上解决这个问题。

我们也知道 2010 年 3 月 18 日，克雷（Clay）研究所将首个千禧年大奖授予佩雷尔曼。千禧年大奖难题一共有 7 个问题，但不是说数学没有其他的问题，数学问题很多，但是这些问题都是重要问题。但他没有参加 2010 年 6 月 8 日在巴黎举行的颁奖仪式。他于 2010 年 7 月拒绝了千禧年大奖。之前在 2006 年，他还拒绝了世界数学家大会颁发的菲尔兹奖。

佩雷尔曼认为："Everybody understood that if the proof is correct, then no other recognition is needed."（大家应该理解如果证明是对的，那么其他的认可都是不需要的。）这个不一定每个人都认同他的观点，因为他拒绝了 100 万美元。

虽然庞加莱猜想解决了，但是实际上还有很多未解决的问题。这个最后也不能细讲，因为这些问题的具体叙述也需要有一定的技术。我想讲的是，并不是说庞加莱猜想解决了以后，我们这个几何拓扑就没有东西做了，实际上有更多的问题要考虑。

虽然弗里德曼于 1982 年解决了四维的广义庞加莱猜想，但我们不知是否"存在一个光滑的四维空间，它同胚于一个四维球面但不微分同胚于 4- 球面"这个什么意思呢？就是说有一个四维球面，在这个四维球面上有没有其他不同的方式做微积分？因为这本是拓扑问题它是不牵涉到微分子。所以这被称为光滑的四维庞加莱猜想，依然未被解决，并且被认为是十分困难的。很多著名数学家都在尝试这个东西，或者尝试过。但是为什么会有这个问题呢？这个问题实际上 1957 年，米尔诺（J. Milnor，也是普林斯顿的学生）在 7 维球面上找到 28 个"怪球"，表明光滑的庞加莱猜想在 7 维是不成立的。

前两个月我收到一封电邮，是芝加哥大学的一个学生，也是我们北大原来

的本科。他是研究代数拓扑的，他给我寄了一篇文章，他证明在 61 维球面上只有一种方式做微积分，光滑的庞加莱球面，并且它这个是最后讲的。也就是说，在不同维数的球面，这个是很好的结果，其他已经解决了。哪怕就只有四种，哪怕是五种，四个和五个维数，这个球面上的光滑结构是不一样的。也就是说只有一种方式做微积分；他是解决这个 61 维，也是相当不错的一个结果。我在之前还不知道，我以为 7 维以上，都可以有不同的微积分，说明这个球面上给定一个维数以后，在其上有多少种方式做微积分还是一个很复杂的问题。7 维是搞清楚了，现在看有的维数还是没搞清楚。

当然，大家还是对四维更感兴趣，因为我们所在的空间加一个时间就是四维了。四维的光滑庞加莱猜想能否解决？它也有一些微分几何的尝试。也就是说你要证明四维空间上有一个好的方式求解你就可以解决这种猜想。有一点像三维中解一个爱因斯坦方程，或者解一个里奇流的方程你就可以把庞加莱猜想解出来。在四维也有，四维它对应的一个其他方程叫自对偶方程。但是这个方程怎么解呢？不晓得。在这方面我们跟原来的博士也做了一些工作。但是这些工作现在离解这个四维问题还是很不清楚的，所以还有很多有趣的几何。

欧阳顺湘、王涛根据田刚教授演讲记录整理

作者简介：田刚，数学家，北京大学数学院教授，中国科学院院士。现任北京大学副校长，兼任北京大学数学科学学院院长、北京国际数学研究中心主任。