立交桥布局中的曲线欣赏

蒋 迅

1. 引言

随着高速公路建设的飞速发展，我们在日常生活中所见到的高速公路立交桥越来越多，而且式样也是越来越多。立体交叉是车辆汇集、分叉和转向的核心部分。立交桥的设计的好坏直接影响到行车速度和行车安全。

1922 年，法国著名的规划思想家、现代建筑运动创始人之一勒•柯布西埃（Le Corbusier[1]）出版了一本《明天的城市及其规划》（*The City of To-morrow and its Planning*），在城市规划研究中首先提出多层、高速的公路立体交叉的思想。现在，立体交叉已经从城市发展到了高速公路。高速公路上的互通式立交桥由高速公路的基本路段、立交桥、匝道、交织区、收费口、监控系统和服务设施组成了一个综合体系。

立交桥的设计不仅体现在它的科学性，也体现在它的美观性。美观的立交桥也会让驾驶员感到有所是从和和有所准备，为驾驶更添一份安全因素。本文以立交桥布局设计中的曲线之美为线索，聊聊相关的数学知识，并用desmos和Wolfram Mathematica 这两个数学软件制图，为读者在以后的旅途中增加一些乐趣。

在公路运输领域里，交汇处通常使用立体化和一个或多个匝道（引道）来实现至少一条高速公路上的交通能通过交叉口而不直接穿过任何其他交通车

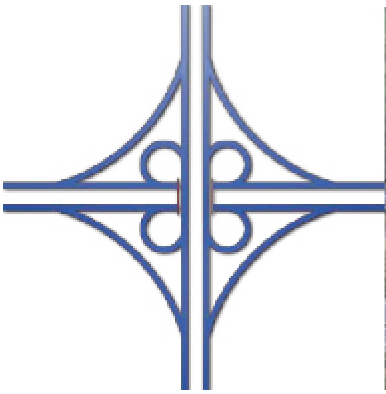
[1] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Le_Corbusier

流。在这里，立交桥扮演着重要的角色。最常见的四方向高速公路立交桥有苜蓿叶型、环状型、涡轮型、风车型和环岛型等，另外还有它们的一些混合型[2]。我们来一一介绍。由于国际上有靠右和靠左行驶两套系统，而且高速公路与铁路和市区公路也有立交，以下我们只考虑靠右行驶道路并只考虑有四个方向的高速汽车公路的立交桥设计。

2. 苜蓿叶立交桥型

最典型的是苜蓿叶型（cloverleaf interchange）。在这里“cloverleaf”，我们指的是“four-leaf clover”这种植物。苜蓿叶型也称为四叶型和幸运草型。典型的苜蓿叶型交汇有两层，这样使得所有原来需要穿越相交道路的转向都由环形匝道来避免，也就是说，让左转车辆行驶约 270 度的环道后自右侧切向汇入高速公路。这四条环形匝道就形成了苜蓿叶的形状。苜蓿叶型的优点在于它只需要一个立交桥，也就是两层交通。因此建设经费较少。但是这些交叉口占地面积大，路线迂回较长。更严重的是两环间的路段也容易形成交织路段，直行车辆易受转向车辆干扰，影响了高速公路的运载能力。笔者曾经遇到一位老年妇女在直行道上想上环形匝道却又无法上去结果停在了直路中间，结果躲闪不及而追尾。

这种立交桥最早是美国新泽西州 Woodbridge 的两条道路交叉处。这也是世界上的第一座立交桥。该立交的平均通量为每昼夜达 62500 辆，高峰小时交通量达 6074 辆，即每分钟大约可容许 100 辆汽车通过。苜蓿叶式在全世界各地都很多。比如下面的南京绕城高速和玄武大道立交 (图 1(b))。



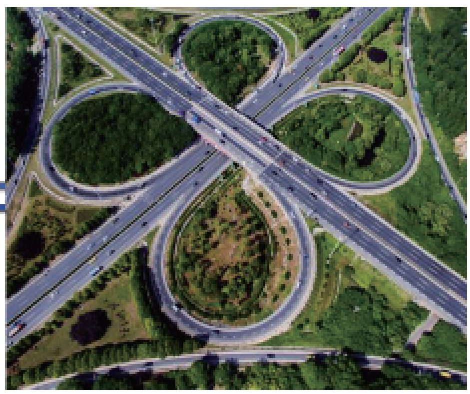


图 1. (a) 苜蓿叶型立交桥的布局　(b) 南京玄武大道立交

植物学上，“clover”是三叶草。在西方很多国家（如英国、美国）长有四片叶子的三叶草。四叶草是三叶草的稀有变种（图 2(a)）。据说大约一万至十万株三叶草中才会有一株是四叶的。西方人认为能找到四叶草是幸运的表现，在

[2] 维基百科：https://en.wikipedia.org/wiki/Interchange_%28road%29

日本则认为会得到幸福，所以又称“幸运草”。人们对这四片叶子也赋予了含义。有一种说法是：第一片叶子代表希望（hope）、第二片叶子表示信心（faith）、第三片叶子是爱情（love）、而多出来的第四片叶子则是幸运（luck）的象征。

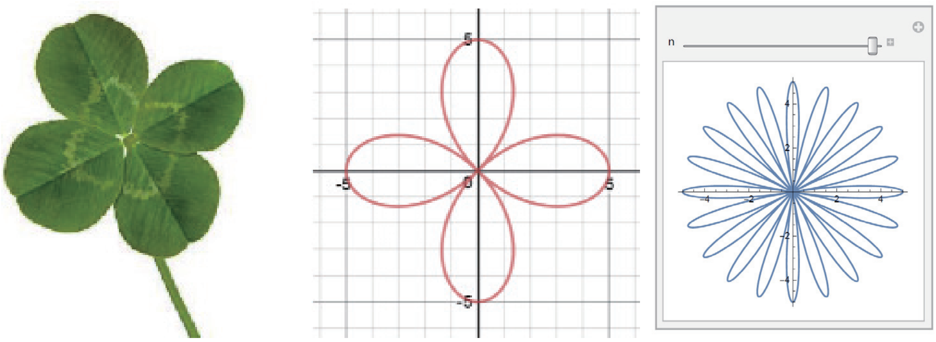


图 2. (a) 四叶草 (b) 四叶玫瑰线 (c) $r = 5\cos(n\theta)$

数学上，我们把这样的曲线叫做“四叶玫瑰线”（Quadrifolium[3]）。它是由极坐标方程 $r = a\cos(2\theta)$ 生成的。显然这是当 $n = 2$ 时的玫瑰线 $r = a\cos(n\theta)$。我们可以很容易地将“四叶玫瑰线”的极坐标方程转换成直角坐标方程 $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 x^2 y^3$。所以它是一个几何亏格为零的代数曲线。但如果我们需要计算它所包含的面积的话，那么还是采用极坐标来计算为宜：

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a\sin(2\theta)]^2 d\theta = 4a^2\int_0^{\pi/4}[\sin(2\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\pi a^2.$$

当我们考虑曲线的长度时，则需要用到第二类椭圆积分了。在这里我们只给它的近似值：$s = 9.86884\cdots a$。有人说它像是中国结，也有道理。Wolfram Mathematica 的表达式是 PolarPlot[Cos[2t], {t,0,2Pi}] 建议读者到desmos网站上去做出 $r = 5\cos(2\theta)$ 的图像并让 n 变动起来，看看能得到一些什么图像。用 Wolfram Mathematica 做动态模拟时的表达式为：

Manipulate[PolarPlot[5Cos[nt],{t,0,2Pi},PlotRange → 5],{n,1,10}]

图 2(c) 是它的效果图。

3. 环状型立交桥

第二种立交桥是环状型（stack interchange）。环状型也称为定向式（directional interchange）。中文的“环状”与英文的“stack interchange”并没有直接的联系。“stack”的意思是堆，叠加的意思。取这个名字是因为环状型

[3] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Quadrifolium

多为数层叠加的原因。所以翻译成“多级立交”更为合适。笔者更倾向于称之为定向式，因为它让左转的车辆保持了左转，而不会像上面苜蓿叶型那样通过右转来实现左转。左转和右转车辆都先从最右车道上匝道，然后二者分离，左转车辆到相对象限里汇入到那里的右转车辆所在匝道，然后一起并入车道。环状型立交没有苜蓿叶型容易产生车流交织的缺点，也无需做 270 度的转弯，但其立交桥层数多，一般多为三层，也有四层和五层的例子，因此造价相对昂贵，也容易产生视觉上的景观冲击。笔者第一次见到这样的高速系统是在休士顿。那时候中国还完全没有高速公路的概念，所以见到这样的大型立交桥时觉得非常震撼。

第一座四层定向型立交桥在美国洛杉矶市，是州际 I-10 和 US101 的交汇处。它的第二、第四层为主干线，每层有六个车道；第一、第三层为左转匝道。其最上一层高出地面 14.4 米，最下层低于地面 6.6 米。干线设计车速 96 公里 / 小时，匝道设计车速 55 公里 / 小时，交通量达 75000-100000 辆 / 昼夜，耗资约 280 万美元。现在在中国也有这种立交模式，比如上海延安东路就有这样一座环状型立交桥（图 3(b)）。

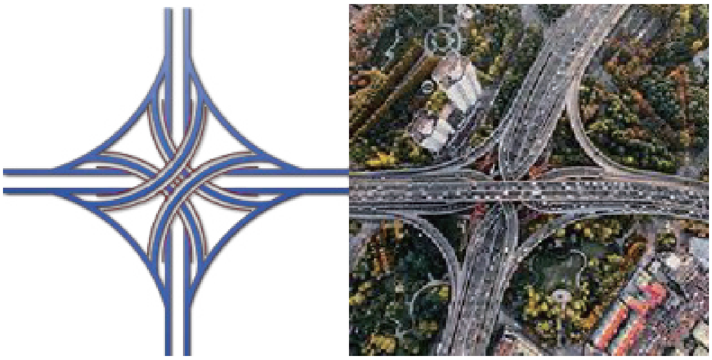


图 3. (a) 环状型立交桥的布局　(b) 上海延安东路的环状型立交桥

不同于苜蓿叶型立交桥，我们没有找到一条漂亮的数学曲线来代表这种形状的立交桥。最接近的应该是“内旋轮线”（Hypotrochoid[4]）。给定一个半径为 R 的固定的大圆和一个内切于大圆的半径为 r 的小圆，从这个小圆的圆心出发做一个固定在小圆的射线，然后在这条射线上取一个点 P，点 P 可以在小圆之外。点 P 到小圆中心的距离为 d。当这个小圆沿着大圆的内边滚动时，点 P 的轨迹就叫作“内旋轮线”。这个曲线的参数方程是：

$$\begin{cases} x(\theta)=(R-r)\cos\theta+d\cos\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right), \\ y(\theta)=(R-r)\sin\theta+d\sin\left(\dfrac{R-r}{r}\theta\right). \end{cases}$$

[4] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Hypotrochoid

注意虽然我们把滚动的圆称为小圆，其实我们并不假定 $r < R$。三个参数 r，R 和 d 之间没有任何限制。它们甚至可以是负数。依据它们的取值的不同，我们可以得到许多不同形状的曲线。比如当 $d = r = R/2$ 时，我们就得到一条线段；当 $d = 0$ 时，我们就得到一个圆。下面是一组对应于不同的参数值 (R, r, d) 的“内旋轮线”。我们可以感受到这些曲线是多么地不同。

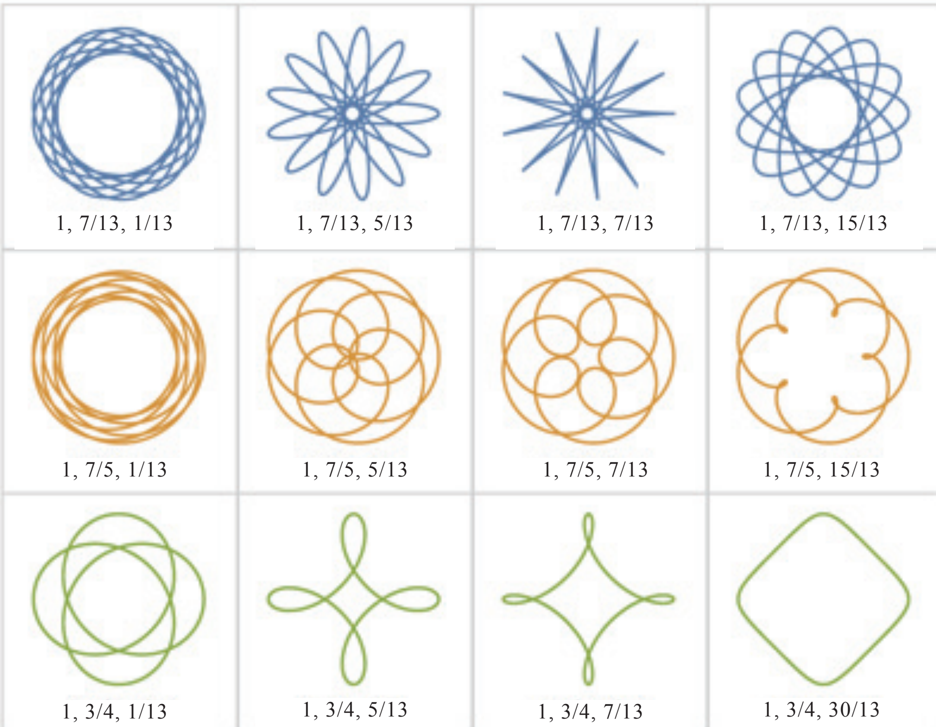


图 4. 取不同参数时的内旋轮线

内旋轮线在 Wolfram Mathematica 中的一般表达式是

hypotrochoid[R_,r_,d_,θ_]
:={($R-r$)Cos[θ] + dCos[($R-r$)θ/r],($R-r$)Sin[θ] − dSin[($R-r$)θ/r]}.

使用上面的表达式以及 Wolfram Mathematica 中的 Table，ParametricPlot 和 Grid 等指令，我们就得到了上面的图 4。

注意当 $R = 1$，$r = 3/4$，$d = 5/13$ 时，“内旋轮线”最接近于环状型立交桥。所不同的是，立交桥的四个“叶子”是尖状的，而“内旋轮线”是光滑的。匝道在接入主线时必须是与主线相切地接入。

既然我们不能用一个数学方程来描述环状型，那么我们干脆把四个左转匝道单独出来，然后只看其中一段。其他匝道都可以通过旋转变换来实现。让我们单独出其中的由东向南的一段左转路线来。对于这样的路线，最好的数学公

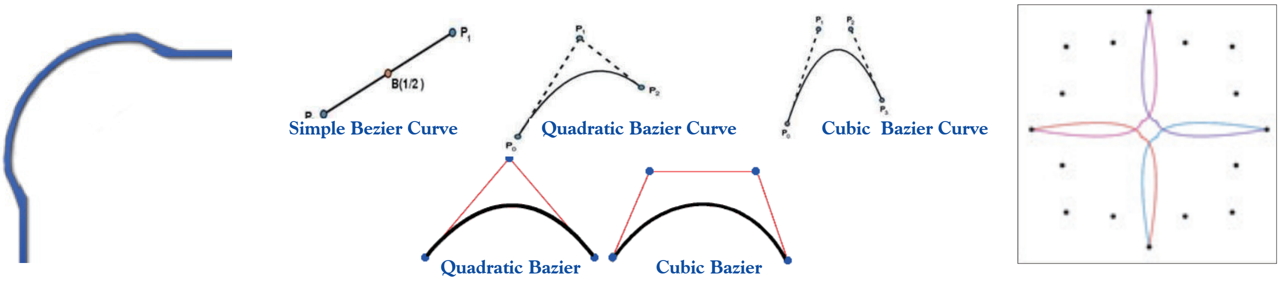


图 5. (a) 环状型立交桥由东向南的一段 (b) 贝济埃曲线示意图 (c) Wolfram 给出的一个图案

式恐怕是贝济埃曲线（Bézier curve[5]）了。如图所示，贝济埃曲线可以在给定的两个点上按一点的方向连接，而这正好是匝道接入主线时所要求的。Wolfram 用贝济埃曲线做出了许多漂亮的花型图案[6]。但这些图案都不能满足我们这里的要求（图 5.(c)）。

我们还可以再进一步，将上面的曲线做一个 45° 逆时针转轴。于是我们看到近似于一条椭圆曲线（elliptic curve[7]）。数学上，椭圆曲线是一个由代数方程 $y^2 = x^3+ax+b$ 定义的曲线。下面图 6(b) 是当 a = 1 和 b = 4 时的椭圆曲线，是用desmos制作的。用 Wolfram Mathematica 制作也很简单，我们略过。基于椭圆曲线数学，人们开发了一种建立公开密钥加密的算法[8]。

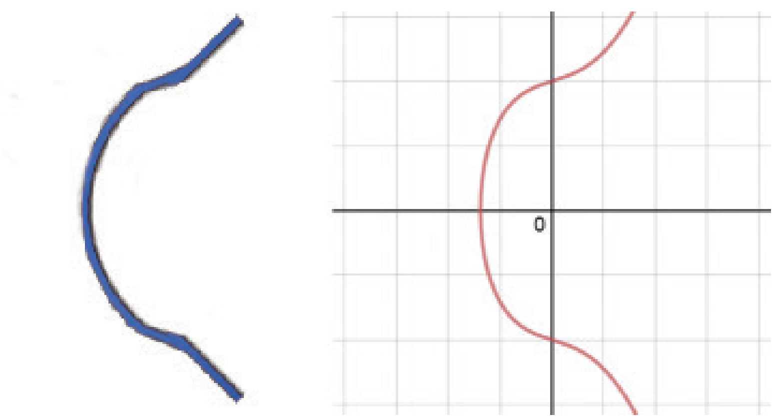


图 6. (a) 做 45° 逆时针转轴后的一段匝道 (b) 当 a =1 和 b = 4 时的椭圆曲线

[5] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/B%C3%A9zier_curve

[6] http://demonstrations.wolfram.com/BezierCurveFlowers/

[7] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_curve

[8] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic-curve_cryptography

4. 涡轮型立交桥

第三种立交桥叫涡轮型（Turbine）。也有人把它称为涡流型（whirlpool）。这是环状型立交桥的一个变形，在山区等地形复杂的地方往往有用武之地。比起苜蓿叶型，它少了一些交错，比起环状型，它又少了一些起伏，所以是道路设计者的一个理想的选择。最漂亮的例子大概是在美国佛罗里达州的洲际公路 I-295 上的一个涡轮型立交桥（见图 7(b)），其对称性近乎完美。

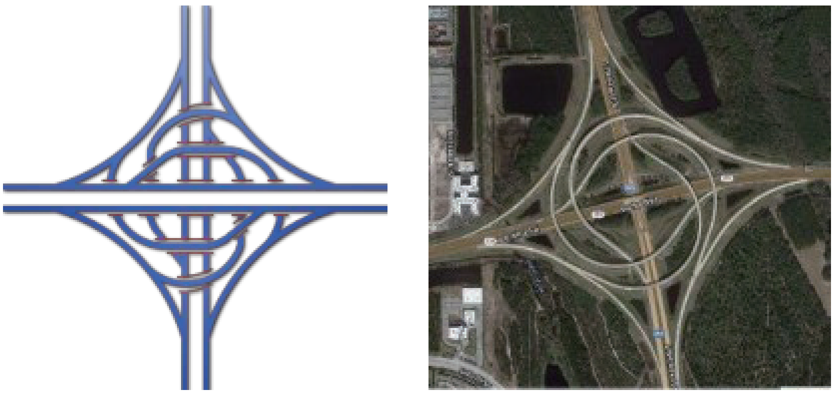


图 7. (a) 涡轮型立交桥的布局　(b) 佛罗里达州的一个涡轮型立交桥

为了帮助读者理解这种立交桥的名字的来源，我们特地找了一个涡轮机叶片的例子和一个水的涡流的例子（图 8）。

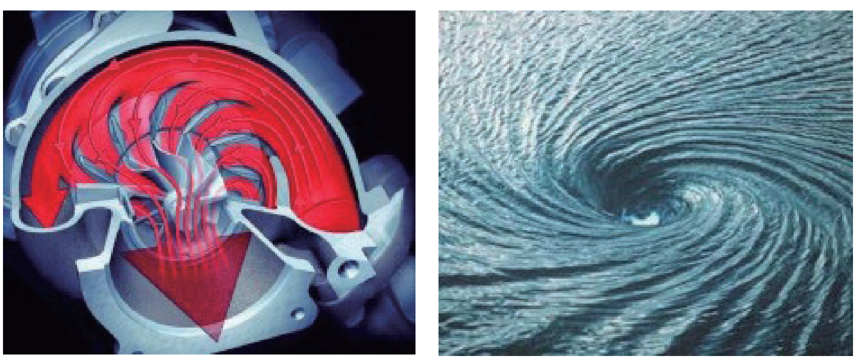


图 8.(a) 涡轮机的叶片　(b) 水的涡流

数学上最接近于这种类型立交桥的曲线应该是螺线了。螺线的种类有很多，比如阿基米德螺线、等角螺线（对数螺线）、双曲螺线、费马螺线、欧拉螺线、对数螺线等等。用哪种螺线来与此类交汇相比都不为过。下面我们用斐波那契螺线（Fibonacci spiral[9]）来展示。欧拉螺线也很有意思。我们希望有机会另文

[9] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Golden_spiral

介绍。斐波那契螺线又叫做黄金螺线（golden spiral），是对数螺线的一个特殊情况。在极坐标系中，对数螺线的方程是

$$r = ae^{b\theta} \text{ or } \theta = \tfrac{1}{b}\ln(\tfrac{r}{a}),$$

其中 e 是自然对数的底，θ 是极角，r 是极半径，a 和 b 为螺线常数。常数 a 代表的是螺线初始时的半径，常数 b 代表的是增长因子。用参数方程，上述方程变为：

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta)\cos(\theta) = ae^{b\theta}\cos(\theta), \\ y(\theta) = r(\theta)\sin(\theta) = ae^{b\theta}\sin(\theta). \end{cases}$$

斐波那契螺线就是让增长因子与黄金分割数 φ 挂上钩。具体地说就是当 $\theta = \pi/2$（或者 $-\pi/2$）时，半径增加的倍数正好是 $\varphi = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1.618$。即：

$$|b| = \ln\varphi/(\pi/2) \approx 0.3063489.$$

对数螺线是自然界中常见的螺线。对数螺线有许多漂亮的性质，比如对数螺线是自我相似的，经放大后可与原图完全相同；对数螺线之臂的距离以几何级数递增；对数螺线上任意一点与原点连线与其本身形成一个固定的角；等等。除此之外，斐波那契螺线还有一个特殊的性质：给任意四个共线的点 A, B, C, D，分别是当角度为 θ, $\theta+\pi$, $\theta+2\pi$, $\theta+3\pi$ 时对数螺线上的点。那么有交比等式：$(A, D; B, C) = (A, D; C, B)$。在所有对数螺线中，这个性质只在斐波那契螺线时成立。

用desmos和 Wolfram Mathematica 制作斐波那契螺线也很方便。下面分别是用这两个软件得到的四条有不同起始点的斐波那契螺线。

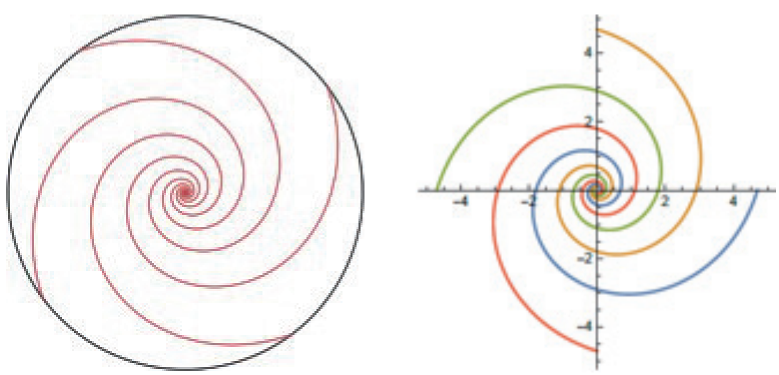


图 9. 四个斐波那契螺线的叠加

5. 风车型立交桥

风车型（windmill）立交桥类似于涡轮型立交桥，只是拐弯处比较急，使得它的效率比起涡轮型降低了很多。荷兰在 1977 年建设了这样一条高速交叉路口，这是它建成后的样子。后来这个路口被改造，已经变得非常复杂。

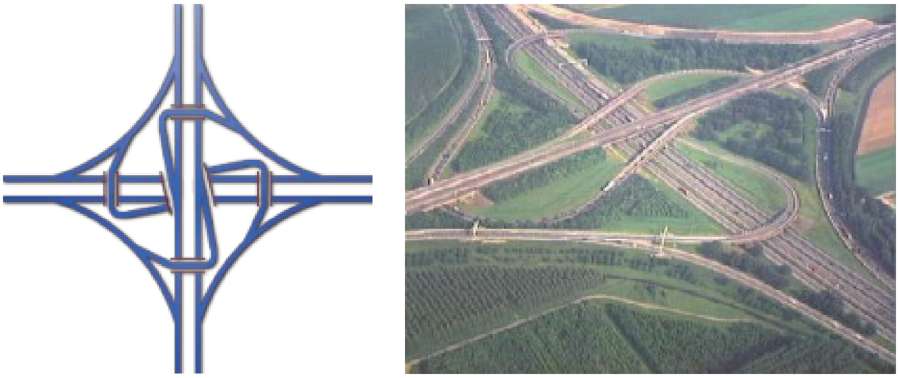


图 10. (a) 风车型立交桥的布局 (b) 荷兰建成的一个风车型立交桥

风车型这个名字显然来自于风车的形状。它的四个左转路很像是风车的四个叶片。下面是在奥地利雷茨市的一个古老的风车（图 11(a)）。

图 11. (a) 位于奥地利的一个风车 (b) 纸风车

下面左图是用desmos制作的风车的图案。图案的方程是：

$$r = a \cdot \sin(3\theta)\cos(3\theta) + b \cdot \cos(2\theta), \qquad a{=}4.5,\ b = 10.$$

建议读者在desmos上用不同的 a 和 b 的值来看看将会得到什么曲线。结果一定让你惊讶。

我们还可以从追踪曲线（pursuit curve[10]）问题来得到类似风车的图案。追踪曲线是由追踪特定曲线轨迹一个或多个点所形成的曲线。追踪曲线中有类似被追踪者及追踪者的角色，追踪者形成的曲线即为追踪曲线。有一个特殊的追踪问题是说，在正方形的四个顶点上各有一个轨迹，每个点又是追踪相邻顶点轨迹的追踪曲线，也被另一边的相邻顶点所追踪。这个问题又叫做“老鼠问题”（mice problem）。这四条曲线就形成了我们这里考虑的风车。这个追踪曲线也可以用

[10] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Pursuit_curve

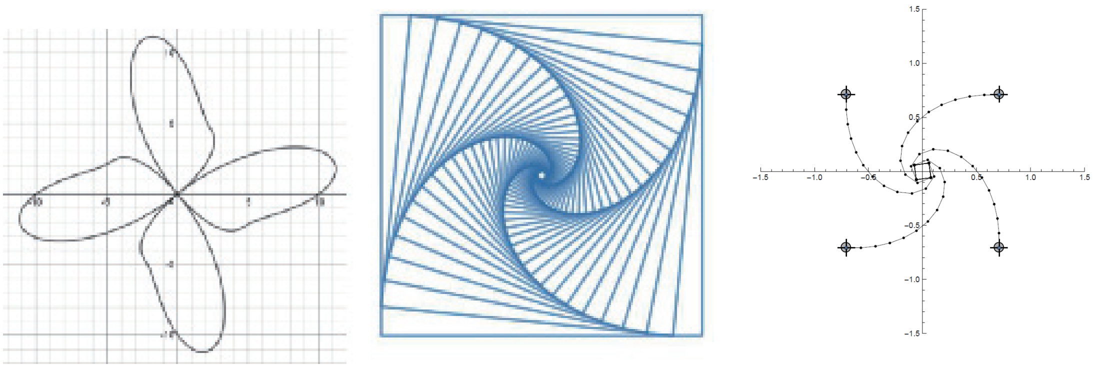


图 12. (a) 用三角函数画出的风车 (b) 追踪曲线（desmos） (c) 追踪曲线（Wolfram Mathematica）

desmos做出来，不过比较复杂一点。下面的图 12(b) 就是在desmos上做来的。

Wolfram 有一个网页专门介绍这个问题[11]。上面图 12(c) 是其效果图。

6. 环岛型立交桥

高速公路上环岛型（roundabout）立交桥是由三层道路组成：两个垂直的道路和一个在中间一层的匝道。主要干道上的交通不受管制。所有需要转弯的车辆都右转上匝道，然后真正需要右转的从第一个路口出去，需要左转的车辆从第三个路口出去。下面是荷兰的一个三层环岛型立交桥（图 13(b)）。

图 13. (a) 环岛型立交型的布局 (b) 荷兰的一个三层环岛型立交桥

从数学上看，在所有类型的立交桥当中，最缺少数学曲线之美的就是环岛型立交桥了：它不过是一个直角坐标系加一个单位圆。为统一起见，我们也把它的方程列在这里。单位圆的极坐标方程为 $r=1$，直角坐标方程为 $x^2+y^2=1$，参数方程为

$$\begin{cases} x(\theta)=\cos(\theta), \\ y(\theta)=\sin(\theta). \end{cases}$$

[11] http://demonstrations.wolfram.com/ExtendedFourBugProblem/

如果觉得这个太不过瘾的话，我们也可以联想一下其他数学概念。在抽象代数里，直和（direct sum[12]）一般是用符合 ⊕ 来表示。例如，假定 R 是实数空间，那么直和 $R \oplus R$ 就是 XY 平面 R^2。这个概念在抽象代数里发挥了重要作用。在数学形态学（Mathematical morphology[13]）里，⊕ 是膨胀算子。另外，在天文学和占星学中，⊕ 代表地球[14]。

7. 混合型立交桥

在实际的规划设计中，大量的立交桥是上面五种桥型的变异和混合。将苜蓿叶型和环状型结合起来就得到了环状苜蓿叶型（CloverStack）。它不但可以拥有环状型立交桥的优点，造价也相对便宜。在苜蓿叶型上增加集散道（cloverleaf with collector/distributor roads）就解决了主干道上车流受干扰的麻烦。也有一半涡轮型和一半环状型的混合型（Turbine-stack hybrid），部分苜蓿叶型（Parclo），钻石型（Diamond），分道排球型（Divided volleyball），U 形转弯型（U-turns），等等。我们不再一一介绍。

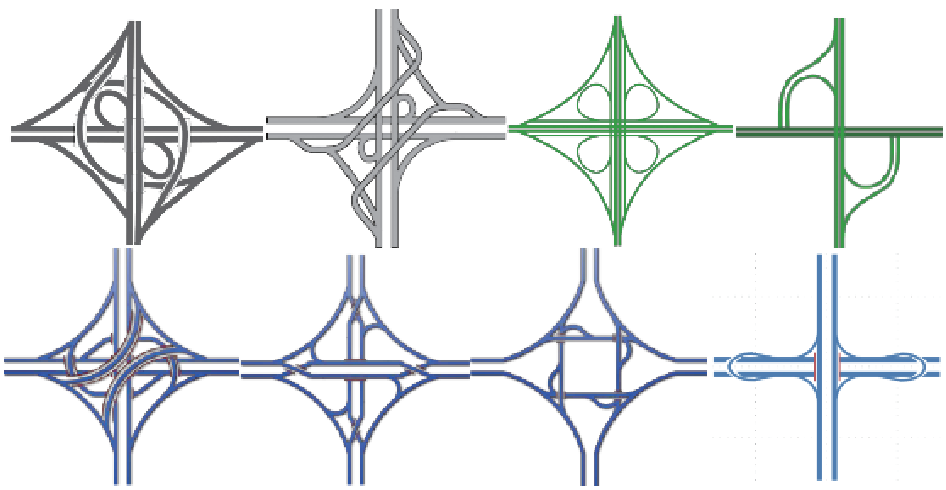


图 14. 各种混合型和改进型立交桥

近年来，由于收费的需要，还发展了双喇叭型（double-trumpet）立交。我们也略去不谈。

8. 立交桥和凯尔特结

所有的标准立交桥都有一个共同的特点：它们都具有多条交织的、畅通无阻的和具有一定对称性的曲线。在这一点上，立交桥很像凯尔特结（Celtic

[12] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Direct_sum

[13] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Dilation_(morphology)

[14] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Astronomical_symbols

knot[15]）。凯尔特结是一种由连续不断的缎带组成的结和程式化的图案，它们创造出精美复杂的曲线阵列（比如篮子编织结）。这些结被用于装饰基督教的纪念碑和文稿。凯尔特结作为凯尔特文化中的重要标志历来深受欧洲人的喜爱。

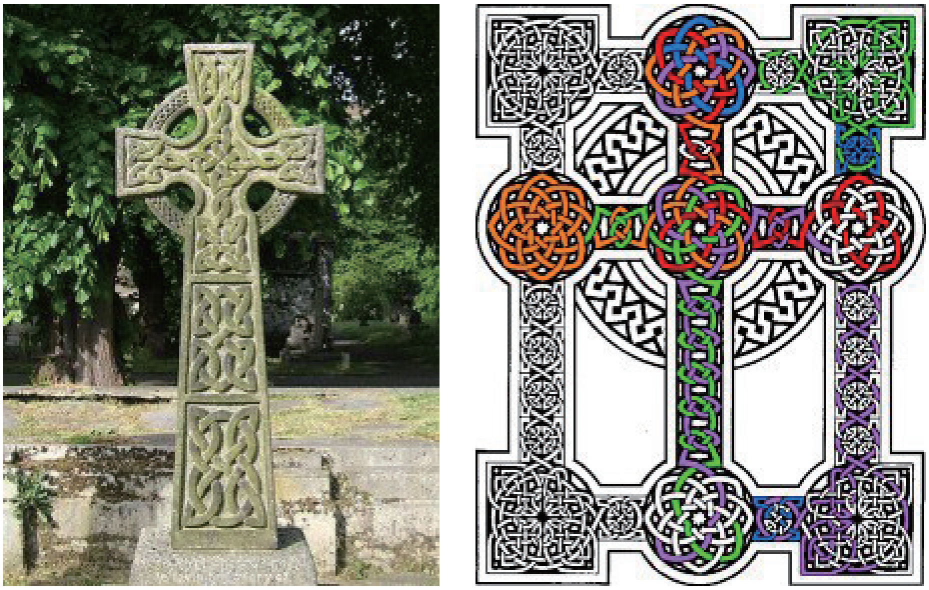


图 15. 凯尔特结的两个例子

上图的第二个凯尔特结是叫 Xah Lee 的写手上了颜色的，目的就是让人们可以清楚地看清结的走向[16]。事实上，整个中间的十字架都是一条缎带。使用不同颜色是为了让读者看清路径，否则整条结都是一个颜色了。这这里，我们注意到凯尔特结的几何布局多样匀称和连续贯通。我们同样应该注意到凯尔特结的拓扑结构。总之，凯尔特结的这两个方面与高速公路的均匀性、对称性和连通性用着惊人的相似之处。对凯尔特结的数学性质研究似乎不多，但已经证明，凯尔特结和交错结（alternating knot，即有交错的投影图）是等价的。

也许有读者会注意到，凯尔特结很多用在了十字架上，而这个结构与前面提到的环岛型立交桥很像。这的确是事实，而且专门有一个词就是凯尔特十字（Celtic cross[17]），描述的就是这类凯尔特结。但不幸的是，凯尔特十字被一个已被禁止的新纳粹党所采用，故德国政府禁止这个标志的公众展示。其政治和公众上对此标志的禁止是为了防止纳粹主义的复苏。我们也只好在此回避把凯尔特十字与本文的主题联系起来。

[15] 维基百科：https://en.wikipedia.org/wiki/Celtic_knot

[16] Xah Lee, Algorithmic Mathematical Art, page 2, http://xahlee.info/math/algorithmic_math_art_2.html

[17] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Celtic_cross

9. 右转匝道的情况

以上的讨论都是关于左转的情况。右转的匝道一般都是钻石型的。在下面的图 16(b) 里，左转和右转都使用了钻石型，所以是全钻石型（full diamond）。

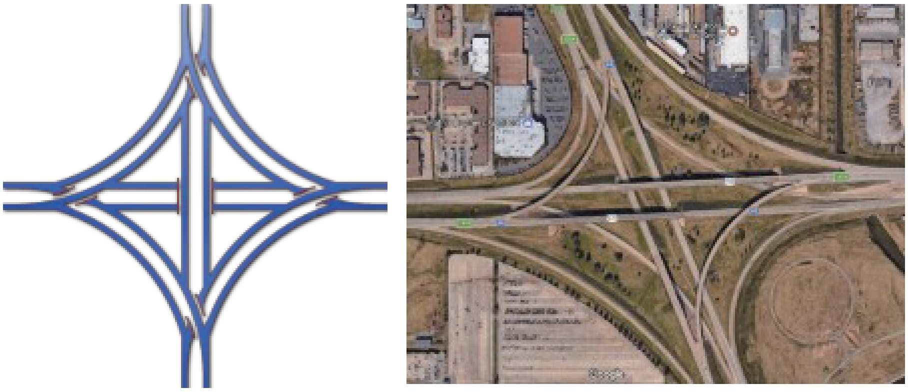


图 16. (a) 钻石型立交型的布局　(b) 俄克拉荷马市的一个全钻石型立交桥

这种钻石型的立交桥可以对应于数学上的星形线（astroid）。星形线的直角坐标方程是 $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$，极坐标方程是 $r=a(\cos^{2/3}\theta+\sin^{2/3}\theta)^{3/2}$，参数方程是：

$$\begin{cases} x(\theta)=a\cos^3(t)=\dfrac{a}{4}(3\cos t+\cos 3t), \\ y(\theta)=a\sin^3(t)=\dfrac{a}{4}(3\sin t-\sin 3t). \end{cases}$$

星形线是一个几何亏格为 0 的代数曲线的实数轨迹，其方程式为：$(x^2+y^2-a^2)^3+27a^2x^2y^2=0$。因此，星形线为六次曲线，在实数平面上有四个尖瓣的奇点，分别是星形线的四个顶点，在无限远处还有个复数的尖瓣的奇点，四个重根的复数奇点，因此星形线共有十个奇点。

星形线是一个特殊的超椭圆（superellipse[18]）。超椭圆是指满足方程 $|x/a|^n+|y/b|^n=1$ 的曲线，其中 n, a, b 都是正实数。显然，星形线就是当 $a=b$，$n=2/3$ 时的一个特例。只要 $0<n<1$，超椭圆都有四个尖点。因此，它们都可以作为钻石型立交桥的数学化身。

我们最后来看看如何用 Wolfram Mathematica 得到这一族超椭圆。先令 $a=b=1$; $r=1.1$，然后做

ContourPlot[Evaluate[Table[Abs $[\frac{x}{a}]^n$ +Abs $[\frac{y}{b}]^n$ =
=1,{n,{5,3,2,1.5,.7,.5,.3}}]],{x,$-r$,r},{y,$-r$,r},ImageSize → 500,PlotPoints
→ 50, PlotLegends → SwatchLegend[Automatic,{5,3,2,1.5,.7,.5,.3}]]

[18] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Superellipse

图 17(b) 是效果图。

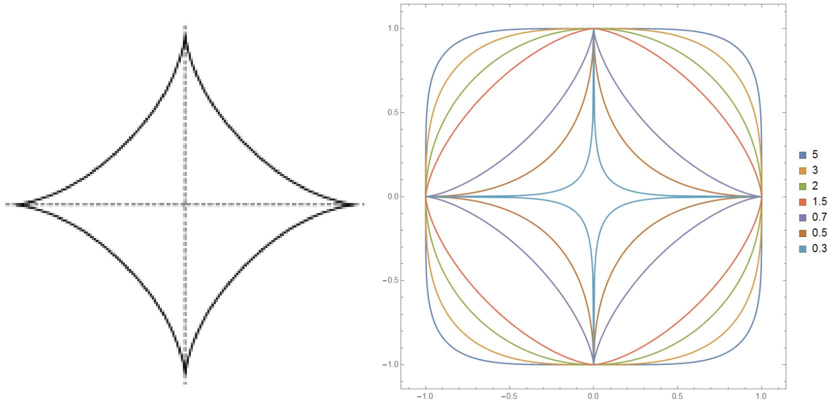


图 17. (a) 星形线 (b) 超椭圆

星形线还能被看作是一条有四个尖点的内摆线（hypocycloid[19]）。内摆线也叫做圆内螺线。假设有一个定圆，若有另一个半径是此圆半径的 $1/n+1$ 倍的圆在其内部滚动，则圆周上的一定点在滚动时划出的轨迹就是一条内摆线（圆内螺线）。显然，内摆线是一类特殊的内旋轮线。我们在前面已经讨论过这类曲线。

10. 结束语

本文仅仅是以高速公路立交桥布局的不同特征为线索介绍一些有意思的数学曲线，并着重演示了使用desmos和 Wolfram Mathematica 作图的威力。当然，如果我们考虑更多的立交桥的类型，我们一定还会联系到更多漂亮的数学曲线。这个工作就留给读者吧。

鸣谢：作者衷心感谢 Wolfram 中国布道师[20] 李想老师的大力支持！

[19] 维基百科，https://en.wikipedia.org/wiki/Hypocycloid

[20] 技术布道是随着 IT 产业的兴起而随之兴起的一项新兴职业。与传统的"宣传推广"不同，它是针对特殊产品、面向特殊人群、采用特殊方法进行"宣传推广"。从性质上，靠近"Marketing"；从行为细节上，更靠近"技术"。基本要求是"理解技术、根植于技术"，现一线做研发或者做架构师的人都有机会成为一名布道师。

作者简介：

蒋迅，北京师范大学数学学士、硕士，美国马里兰大学博士。现在美国从事科学计算工作。