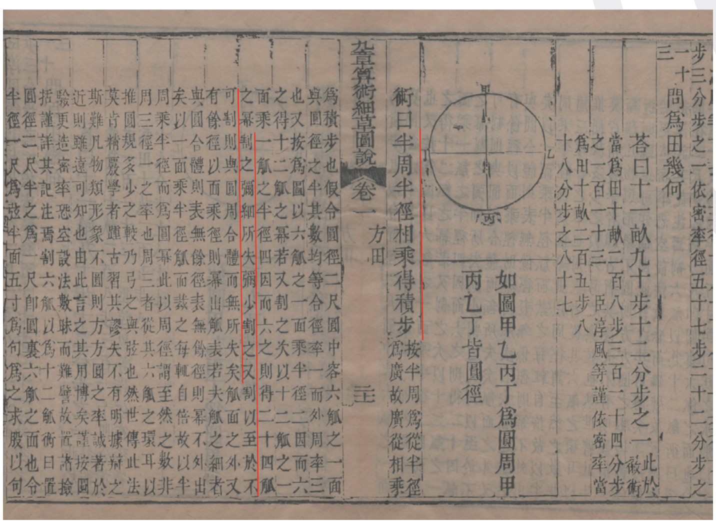
半周半径相乘得积步

王晓谦

一

很久很久以前，人类在日常生活和生产劳动实践中理解了东西的多少、线段的长短、区域的大小，逐渐认识到比较、计数、测量、计算的重要性，数学渐渐地在人类认识世界的过程中出现了。在这个过程中，关于直边图形的周长、面积的测量和计算比较容易处理，较早就出现了各种计算公式。而关于曲边图形的周长和面积的测量和计算问题，特别是关于圆的周长和面积的测量和计算问题，则走了很长的路。

在中国历史古籍中，关于圆的周长和面积的测量与计算问题两千多年前就已经出现了。我们推测中国古代数学家用了穷竭法来解决此类问题。在早期，人们不知道圆的周长和直径的比是一个常数，即使知道，也不知道它到底等于多少，只知道圆面积的大小和周长、直径有关。《九章算术》“方田”章说：“半周半径相乘得积步”[1]：


步三分步之一依密率徑五十七步二十二分步之一十三
問爲田幾何
荅曰十一畝九十步十二分步之一 此於徽術當爲田十畝二百八步三百一十四分步之一百一十三 臣淳風等謹依密率當爲田十畝二百五步八十八分步之八十七
如圖甲乙丙丁爲圓周甲丙乙丁皆圓徑
術曰半周半徑相乘得積步 按半周爲從半徑爲廣故廣從相乘
九章算術細草圖說 卷一 方田

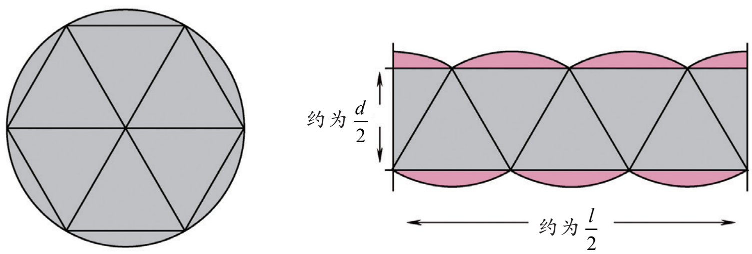
[1]（清）李潢，《九章算术细草图说》，清光绪十七年刊本 .

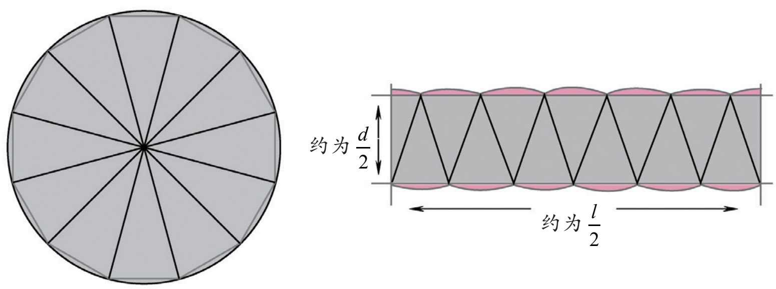
即周长为 l、直径为 d 的圆的面积是：

$$S=\frac{l}{2}\times\frac{d}{2}.$$

书上说这是根据割圆法得到的，“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割……”，所以“半周半径相乘得积步”。

从图形看，我们有：





这样将圆一直分割下去，可看出圆的面积最终等于半周长与半径长的乘积。这是通过周长和直径**求圆面积的正确公式，不涉及圆周率这个概念**，只要测量出圆的周长和直径即可。由此可见我们前辈在两千多年前的思想多么精巧、细致！我们把它再次写出来：

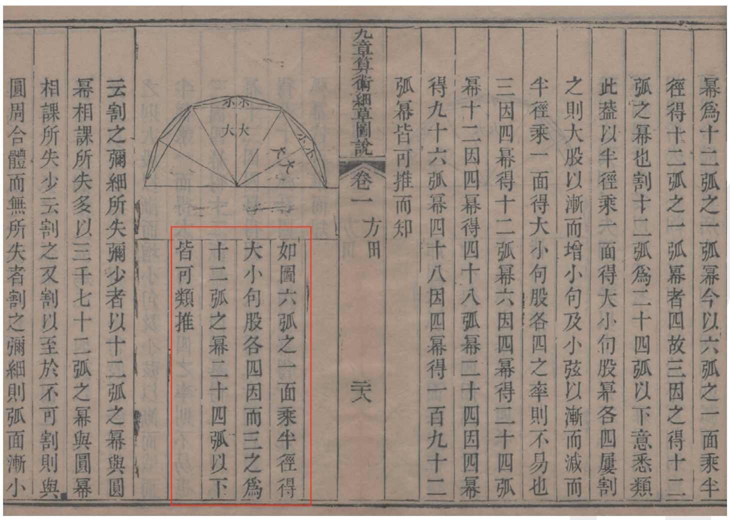
$$S=\frac{l}{2}\times\frac{d}{2}.$$

二

知道周长和直径才能求出圆的面积，周长和直径是什么关系呢？钱宝琮主编的《中国数学史》[2] 中有详细论述。大约在公元前五世纪古希腊数学家安提丰最早发现正多边形面积趋近于圆的面积，但没有用来计算圆的周长与直径

[2] 钱宝琮主编，中国数学史，科学出版社 (1964).

的比率。公元前三世纪，阿基米德用圆内接和外切多边形周长估计出圆的周长和直径的比率在 $3\frac{10}{71}$ 和 $3\frac{1}{7}$ 之间。先秦时期，我们把这个比率近似认为是 3，常常说“周三径一”。魏晋时期，刘徽计算了圆内接正 3072 边形的面积，证明这个比率近似等于 $\frac{3927}{1250}$，化成十进制小数是 3.1416，对一般应用来说相当精确了。他主张用 $\frac{157}{50}$，即 3.14 计算圆的面积，这就是我们今天常用的圆周率近似值。1500 年前，祖冲之进一步计算了圆内接正 12288 和 24576 边形的面积，算出这个比率在 3.1415926 至 3.1415927 之间。他还得到比率的近似值 $\frac{355}{113}$，称为圆周密率，化成十进制小数约等于 3.1415929，用它来计算圆的面积当然就更精确了。刘徽和随后的祖冲之计算所用的方法，就是刘徽《九章算术注》中的割圆术：


幂爲十二弧之一弧幂今以六弧之一面乘半徑得十二弧之一弧幂者四故三因之得十二弧之幂也割十二弧爲二十四弧以下意悉類此蓋以半徑乘一面得大小句股冪各四屢割之則大股以漸而增小句及小弦以漸而減而半徑乘一面得大小句股各四之率則不易也三因四幂得十二弧幂六因四幂得二十四弧幂十二因四幂得四十八弧幂二十四因四幂得九十六弧幂四十八因四幂得一百九十二弧幂皆可推而知

九章算術細草圖說 卷一 方田 廿六

如圖六弧之一面乘半徑得大小句股各四因而三之爲十二弧之幂二十四弧以下皆可類推

云割之彌細所失彌少者以十二弧之幂與圓幂相課所失多以三千七十二弧之幂與圓幂相課所失少云割之又割以至於不可割則與圓周合體而無所失者割之彌細則弧面漸小

现在我们用这种分割的思想，从把圆六等分开始，来求内接正多边形的面积。圆的一周对应 360°，圆的半周对的角度就是 180°。把圆周六等分，每一份就对应 $\frac{180^\circ}{3}$，共有 6 份。用现代数学语言，设圆的半径为 r，如下图所示，分割一次，得到边 AC 的长度 $2\times(r\times$ 角 α_1 的正弦)，其中角 $\alpha_1=\frac{1}{2^2}\frac{180^\circ}{3}$。边心距 h 为 $r\times$ 角 β_1 的正弦，从而三角形 OAC 的面积为

$$\frac{1}{2}AC\times h = r^2\times \text{角 } \alpha_1 \text{ 的正弦} \times \text{角 } \beta_1 \text{ 的正弦}.$$

整个圆共有 $2^2\times 3=12$ 份，正 12 边形的总面积为

$$2^2\times 3\times(r^2\times \text{角 } \alpha_1 \text{ 的正弦} \times \text{角 } \beta_1 \text{ 的正弦}).$$

继续分割，“以下皆可类推”，经过 n 步，总面积变为

$$2^{n+1}\times 3\times(r^2\times \text{角 } \alpha_n \text{ 的正弦} \times \text{角 } \beta_n \text{ 的正弦}).$$