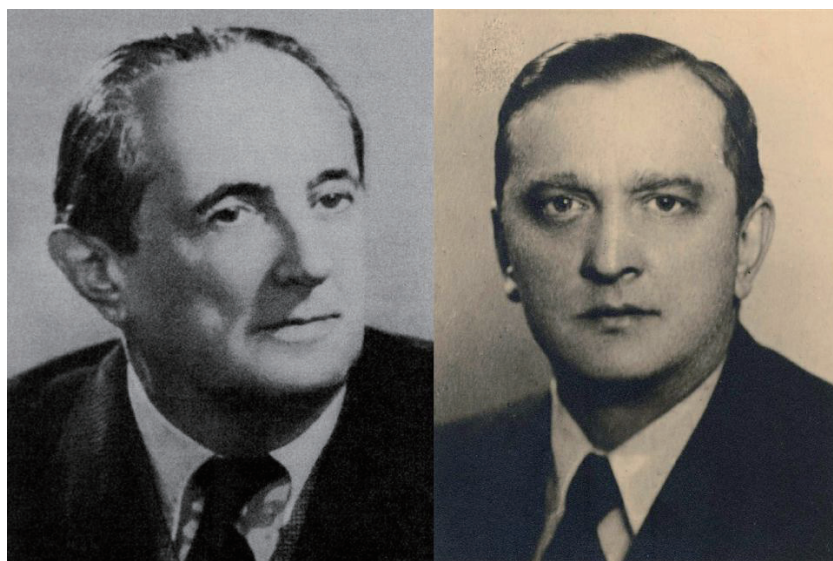


智者的共鸣 Hugo Steinhaus & Stefan Banach

——波兰数学大师斯坦因豪斯与巴拿赫

范明

四十多年前在大三课堂上，笔者学到了泛函分析的基本定理之一“共鸣定理”。定理的内容是：对于一族从一个巴拿赫空间（即完备的赋范向量空间） X 到另一个巴拿赫空间 Y 的有界线性算子，如果算子族将 X 中的每一个点映照成 Y 中的有界集，则这族算子的范数是有界的。简言之，从算子族的局部有界性可推出一致有界性，因此这一定理也称为线性算子的“一致有界性定理”。按照数学惯例，共鸣定理还根据其提出和证明者命名为“巴拿赫-斯坦因豪斯定理”，因此“共鸣”在这里具有双重含义，既是线性算子之间的共鸣，也是两位数学家之间的共鸣。



左：斯坦因豪斯（1887-1972）；右：巴拿赫（1892-1945）。图源：psomath.com

胡戈·斯坦因豪斯 (Hugo Steinhaus) 和斯特凡·巴拿赫 (Stefan Banach) 是 20 世纪上半叶两位波兰国宝级数学家，斯坦因豪斯在泛函分析、数理逻辑、几何和三角学、概率论和博弈论等诸多数学领域做出了贡献，巴拿赫是 20 世纪世界上最重要和最有影响力的数学家及现代泛函分析学科的创始人之一。斯坦因豪斯是巴拿赫的老师，虽然他只比巴拿赫年长五岁。斯坦因豪斯将巴拿赫视为自己人生和数学的最大“发现”，两人携手创立了波兰两大数学阵营之一的利沃夫学派，他们保持终身的合作和友谊在数学史上留下一段不朽的佳话。

不期而遇

1900 年随着新世纪的开始，世界数学进入空前兴旺发达的时期，公理化运动为数学研究大厦奠定了基石。随着波兰民族的独立复国，波兰数学也进入了蓬勃发展的时代，雅尼斯察夫斯基 (Zygmunt Janiszewski)、谢尔宾斯基 (Wacław Sierpinski)、斯坦因豪斯等人是这一时期的杰出代表。1918 年，雅尼斯察夫斯基发表了纲领性文件《波兰需要数学》，希望波兰数学能够获得独立的世界地位，并与谢尔宾斯基一起创立了华沙学派。他们的研究领域主要集中在数学基础、集合论和点集拓扑等数学最核心的内容上，1920 年国际性的数学杂志《数学基础》(*Fundamenta Mathematicae*) 在华沙问世。

1887 年 1 月 14 日，斯坦因豪斯出生在波兰东南部亚斯沃 (Jasło) 的一个犹太家庭，当时属于奥匈帝国，他的父亲是当地的实业家和商人。1905 年斯坦因豪斯高中毕业后，家人希望他成为一名工程师。然而斯坦因豪斯却被抽象数学吸引，开始自学当代著名数学家的著作，并进入伦贝格大学学习哲学和数学。1906 年，他转学到当时的数学圣地德国哥廷根大学，师从多位大数学家，成为希尔伯特的及门弟子，五年之后以论文《狄利克雷原理新的应用》获得博士学位。第一次世界大战开始后，斯坦因豪斯回到波兰从军担任文员，之后前往克拉科夫工作。

1892 年 3 月 30 日，巴拿赫出生在波兰旧都克拉科夫，是一个奥匈帝国军队士兵和一个年轻女佣的非婚生子，他继承了父亲的名字却跟随母姓，在寄养家庭中长大。尽管巴拿赫从小得到悉心照料，但他从未见过生母，与父亲的关系也不亲密。巴拿赫十岁进入克拉科夫一所中学读书，表现出惊人的语言能力和数学天赋，他与中学时代的同窗好友威尔科斯 (Witold Wilkosz) 的课余时间大部分时间都在研究数学问题。高中毕业后，巴拿赫和威尔科斯都认为数学已经如此先进，不值得继续学习数学。多年之后，当巴拿赫已经是一位成熟的数学家时，他承认自己年轻时的想法是错误的。

1911–1913 年间，巴拿赫进入利沃夫理工学院学习工科，威尔科斯则在克拉科夫的雅盖隆大学 (Jagiellonian University) 攻读语言学，两年后改学数学并于 1918 年获得博士学位，后来成为一位数学家、物理学家和哲学家。一战期间，巴拿赫因左眼视力不佳而免服兵役，回到克拉科夫半工半读。虽然他当

时没有参加任何正规学习，但巴拿赫对于数学依旧充满激情，定期参加雅盖隆大学组织的波兰著名数学家讲座。巴拿赫还经常与威尔科斯基和尼科迪姆（O. Nikodym）一起读书和讨论。尼科迪姆于1925年获得华沙大学数学博士学位，1930年代因测度论中的Radon-Nikodym定理闻名。

时间来到1916年夏天，斯坦因豪斯与巴拿赫在克拉科夫的普兰蒂公园（Planty Park）不期而遇。根据斯坦因豪斯本人的回忆，一个夏夜他在公园散步时，偶然听到“勒贝格积分”这个词。这是20世纪初法国数学家勒贝格（H. Lebesgue）等人引入的一个现代数学概念，当时还是鲜为人知的“内部”术语。斯坦因豪斯好奇地走到一条长椅旁，发现正在交谈的巴拿赫与尼科迪姆。他邀请两位年轻人到自己家中，定期讨论数学问题。不久巴拿赫与斯坦因豪斯完成了第一篇合作文章《关于傅里叶级数的平均收敛性》，两年后发表。在斯坦因豪斯的提议下创办了一个非正式的克拉科夫数学协会，1919年演变为波兰数学会，巴拿赫与尼科迪姆出席了成立会议。



克拉科夫普兰蒂公园中尼科迪姆（左）与巴拿赫（右）的雕塑。图源：维基百科

成功之路

利沃夫于1256年建城，历史上曾经属于波兰-立陶宛联邦、奥匈帝国、波兰、苏联等不同国家，现在是乌克兰的城市，奥匈帝国期间利沃夫改名为伦贝格（Lemberg）。需要说明的是，由于利沃夫复杂的历史，因此英文是Lviv、波兰文是Lwów、乌克兰文的拉丁化是Lvov。1661年，当时的波兰国王和立陶宛大公扬·卡齐米日二世（Jan II Kazimierz）创立了利沃夫大学，1772-1918年间的名称是伦贝格大学，1920-1939年波兰第二共和国期间则改

为扬·卡齐米日大学，以纪念的大学创始人。1908–1914年间，谢尔宾斯基曾在伦贝格大学教书，撰写了三本著作及多篇论文，吸引了包括雅尼斯察夫斯基在内的多位波兰青年数学家，然而这一新生的数学圈却在第一次世界大战的战火中夭折了。

1917年斯坦因豪斯应聘到伦贝格大学任教，同年与斯蒂芬妮娅·施茂斯(Stefania Schmaus)结婚。在哥廷根受过教育的斯坦因豪斯是新时代数学家的代表，他的论文《加法和连续泛函运算》发表在1919年德国《数学杂志》(Mathematische Zeitschrift)上，被认为是波兰第一篇关于泛函分析的论文。1920年斯坦因豪斯获得Habilitation(特许任教资格)，1923年成为正教授。他在大学开设了勒贝格积分课程，成为最早在法国境外开设这门课程的数学家之一，还多次前往巴黎、哥廷根和博洛尼亚进行学术访问，在一战的瓦砾上重建了利沃夫的数学社区。

就在这样的历史节点，斯坦因豪斯将巴拿赫引入数学界。1919年巴拿赫被聘为利沃夫理工学院数学教授隆尼基(A. Lomnicki)的助理，开始接受正规的数学训练，利沃夫也成为日后斯坦因豪斯与巴拿赫合作的主场。巴拿赫最早的研究课题是关于三角级数和函数方程，他在《关于函数方程》一文中推广了柯西关于可加函数的一个结果，发表在1920年的《数学基础》第一卷上，英年早逝的雅尼斯察夫斯基的讣告也刊登在同一卷。这些早期工作为巴拿赫的进一步研究铺平了道路，他力图寻找一种方式，将各种具体的函数空间统一起来，迅速展示了出色的才华。

巴拿赫喜欢在酒吧里与同好谈论数学，却并不十分热衷于写下来发表。在斯坦因豪斯的催促下，一群学者决定协助巴拿赫完成博士论文。一位助理每天在咖啡馆、酒吧甚至火车站的啤酒厅陪伴巴拿赫，随手记录下他的陈述。巴拿赫从未获得大学文凭，对于博士学位也不感兴趣，但从不拒绝与人讨论数学。他以这种非传统的方式通过了论文答辩，1920年成为斯坦因豪斯的第一位博士。1920年9月19日，巴拿赫与露西亚·布劳斯(Lucja Braus)结婚。新娘曾是斯坦因豪斯担任律师和议员的堂兄的秘书，两人就是在斯坦因豪斯家中相识的。

巴拿赫的博士论文《抽象集中的运算及其在积分方程中的应用》是在自己参与整理的笔记基础上完成的，两年后发表在《数学基础》第三卷上。这篇论文中给出了完备赋范线性空间的公理化定义，成为泛函分析学科形成的标志之一。在博士论文中，巴拿赫还证明了许多重要定理，其中之一是度量空间上的Banach不动点定理——又称为压缩映射原理。完备赋范线性空间最初被斯坦因豪斯命名为(B)型空间，在巴拿赫的博士论文及后来的著作中都使用这个名字，第一次将其称为巴拿赫空间的是1929年法国数学家弗雷歇(M. Fréchet)。

1922年巴拿赫获得特许任教资格，并于当年7月22日成为利沃夫理工学院教授，迄今已逾百年。巴拿赫于1924年当选为波兰艺术和科学院院士，1927成为扬·卡齐米日大学正式教授。在当时波兰传统保守的学术圈内，巴拿

赫是一个另类。例如他很少按照对教授的要求着正装（大概除拍照以外），而是穿短袖衬衫上街，喜欢美国西部牛仔电影，经常参加平民足球比赛。也许这与他的出身有关，但可能只是个巧合。对于巴拿赫来说，数学是世界上最重要的东西，是他唯一的真爱。巴拿赫是一位真正的艺术家，数学是他的艺术作品。他通过谈话、演讲和讨论创造了这些作品，他认为撰写论文只不过是对于创造性行为的无聊补充。



为纪念巴拿赫成为利沃夫理工学院教授，2022年7月22日发布的谷歌涂鸦。

图源：Google.com

咖啡时光

1927年9月，第一届波兰数学大会在利沃夫成功举办。在斯坦因豪斯和巴拿赫的带领下，一个新的数学中心——利沃夫学派应运而生。受到华沙学派《数学基础》的启发，1929年斯坦因豪斯和巴拿赫一起创办了《数学研究》（*Studia Mathematica*）。这份新期刊侧重于泛函分析、概率论及其相关领域，以别于《数学基础》。1931年，两人又参与创办了系列丛书《数学专著》（*Monografie Matematyczne*）。作为泛函分析的领军人物，巴拿赫身边聚集了多位年轻的杰出人才。1929–1940年间，《数学研究》上近百分之七十的文章的均出自利沃夫数学家之手。

利沃夫的数学家还包括卡茨马兹（S. Kaczmarz）、库拉托夫斯基（K. Kuratowski）、萨克斯（S. Saks）、肖德尔（J. Schauder）、奥尔巴赫（H. Auerbach）、奥里奇（W. Orlicz）、马祖尔（S. Mazur）、乌拉姆（S. Ulam）、卡茨（M. Kac）等人，最多的时候同时达二十多位，这些名字和他们的成果在现代数学杂志和教科书中会常常读到。利沃夫的数学家们在波兰国内及国际数学圈均十分活跃，与其他数学中心特别是以谢尔宾斯基为首的华沙学派建立了密切合作和联系。曾经来访的国外著名数学家包括策梅洛（E. Zermelo）、勒贝格、博雷尔（É. Borel）、冯·诺依曼等。