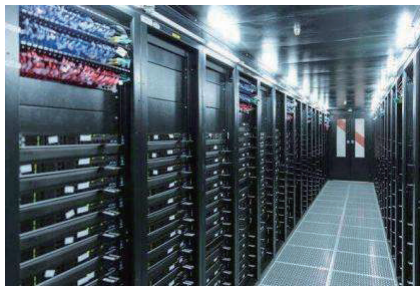
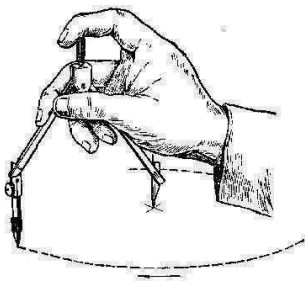




从尺规作图到机器证明

乔建永

随着人工智能科技的迅猛发展，一个幽灵般的问题开始在人们的头脑中徘徊：机器人能被训练成数学家吗？这一问题关系到哲学的基本问题。笔者以为，机器证明同尺规作图一样都是数学家借助辅助工具实施逻辑推理的过程，机器人、计算机和直尺、圆规等无疑是逻辑推理的辅助工具，而数学家是逻辑推理的主体。



所谓逻辑推理，是自然人由一个或几个已知的判断推导出一个新的判断的思维形式。人类从远古走来，正是靠这种方式，一步一步迭代，构建起庞大的推理型知识体系，支撑起当代人类文明。本文无意深入考察逻辑推理的科学和哲学内涵，而是探讨现有知识点之间的逻辑关系，建立推理型知识的网络动力系统模型，通过分析其动力机制，揭示快速计算和人工智能等新技术作为逻辑推理辅助工具的本质属性。



一、推理型知识网络及其演化动力

逻辑推理是产生新知识的一种重要方式。知识是人类通过各种途径获得的，经过提升、总结和凝练的系统认识。获取知识的复杂过程主要包括感觉、交流和推理。柏拉图认为，一条陈述能称得上是知识必须满足三个条件，它一定是被验证过的，正确的，而且是被人们相信的，这也是科学与非科学的区分标准。本文把知识进一步限定为人类通过逻辑推理获取的知识，没有通过逻辑推理而存在的“知识”暂且不叫知识。显然，推理型知识体系是无数个关联的知识点的集合，其中数学就是一个逻辑推理的知识体系，代数、几何、分析等各个分支也相对独立地构成子体系。如果我们把这些大大小小的知识点看作“点”，然后按照逻辑推理的新老关系用有向“边”连接起来，就构成了一个推理型知识网络。这个网络系统随着人类日复一日的逻辑推理在不断的演化——扩张、简约、纠错，没有最好，只有更好。

推动这个网络系统演化的唯一动力是人类的逻辑推理。某个自然人由一个或几个已知的知识点推出一个新的知识点，这个网络就增加了一个节点；当有人发现一些既有的节点之间的因果关系可以简化时，还可以用推理把这个网络进一步简约化；推理也可能发现老节点之间因果关系的错误，予以删除，实现这个网络的纠错。

我们特别强调，这个网络系统中的每一个节点都是某一个自然人通过逻辑推理得到的，因此，这一网络的局部特征就同自然人的生命长度和生理功能密切相关。任何一个节点以及同此点直接连接的所有节点代表的逻辑关系能够被一个自然人独立推导、阅读或审核，本文将这一性质称为自然人的局部可读性。

为了进一步解释这一网络的局部可读性，我们解剖一个具体数学问题：求前 100 个自然数之和。解决这个问题最初等的推理是按自然数顺序依次做 99 次加法运算，最终计算出结果；考虑到上面的推理用时较长，高斯观察到 $1+100, 2+99, \dots, 50+51$ 的值全是 101，因此上式之和为 101 与 50 的积，故等于 5050。毫无疑问，高斯的办法大大减少了推理的时间和推理语言占用的空间。仅仅针对这个小问题可见，自然人在生命时长内和在生理功能允许的范围内能否推导出希望的新结果，因人而异。但如果把问题改为求前 10 亿个自然数之和的问题，你就会发现不同推理方法的更多的价值。首先注意，如果试图用初等推理方法解决这个问题（也就是按自然数顺序依次做加法的运算），

将用时太长，一个自然人在其生命时间里无法完成；但用高斯的上述方法却很美妙，把推理过程写下来很短，具有“可读性”。为了避免第一种方法“不可读”的问题还有两种替代方法，一是把这一过长的计算截成若干段，让若干自然人接续按第一种方法计算，最终得到结果，这种方法相当于扩充了知识网络节点，虽然可能会用很长时间（或许需要数代人的接续），但每一步推理都具有可读性；二是汇聚一批人（几百、几千或几万人）同时分段、分层计算，能够加快计算速度，这同使用计算机是一个原理，这种方法虽然“可读性”比较差，但计算速度提高了。概括来讲，要解决自然人在生命长度内、在生理功能允许范围内不能完成的推理问题，有三种方法：用人的智力寻找新方法、把知识网络中的一个节点扩张为一系列节点、借助人体的生理功能以外的推理工具。

推理型知识网络演化的动力来源于自然人，这是本文的基本观点，也是迄今为止这一网络演化遵从的基本规律。自然人的局部可读性有效保证了这一网络系统的严密性和可靠性。从历史的宏观尺度来审视，这一网络系统演化过程的随机性和复杂性同样巨大。注意到人的复杂性、多元化、个性化，即每个人的兴趣、需求、特长都不一样，由各个自然人推理过程决定的节点之间的关系一定是千差万别的。这一网络系统的演化必定会受生长机制和推理者个人偏好的影响。每个网络都是从几个称之为公理或假说的小节点开始，通过添加新的节点而增长。虽然这一网络系统的演化历史在某些时刻会因为某些天才的“离经叛道”而改写，但多数时候这些新节点在决定连向哪里时，推理者往往会倾向选择那些拥有更多连接的节点，这是一个宏观历史规律。

二、围绕推理长度与可读性的争论

推理与概念、判断一样，同语言密切联系在一起，推理的语言形式为表示因果关系的复句或具有因果关系的句群；推理用语言表达出来，一个自然人必须能够在其生命长度时间里审核其正确性，不能太长，这就是前面定义的可读性；这里要求的是一个自然人完整审核推理过程，而不是一群自然人在同一个逻辑层级上分工阅读，然后彼此互相提供证言；逻辑推理是一个迭代的过程，如同建筑工程一样，从泥土，砖头，墙壁，到楼房。承认一个前提推演新的结论，不能把一系列逻辑推理压缩在一次逻辑推理里，这样会造成自然人的“不可读”，两个独立的人能够分工对一次逻辑推理的正确性负责吗？答案显然是否定的，这关系到科学大厦的严密性和可靠性。

本文前面提到的求前 10 亿个自然数之和的问题，如果用计算机解决问题，其实就是把若干自然人接续计算的若干次“可读型”逻辑推理压缩到计算机里。然而，视乎人们对此并不反感，因为人们对这种按部就班的加法运算太熟悉啦，以至于有点儿麻木。对那些人们确实陌生的问题，大家的态度会不会有变化呢？请看两个著名的例子。

第一个例子是四色猜想。1852 年 10 月，英国有位刚大学毕业的青年人在给地图着色的过程中发现似乎只需要 4 种颜色。1878 年 6 月 13 日，英国数学家凯莱在伦敦数学会上正式提出四色猜想，同时发表于会议的论文集。从此，