

如何求方程 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4$ 的正整数解?¹

Alon Amit/文 陈洁雨 欧阳顺湘/译

译注：2016年，alex alexeq 在数学问答网站 mathoverflow² 上问了一个问题：如何估计丢番图方程的解的大小？具体问题有两个：

- A. 是否有自然数 a, b, c 使 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 等于一个奇自然数？
- B. 假设 $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$ 等于一个偶数 (a, b, c 仍为自然数)，有何办法估计满足方程的最小解 a, b, c 的大小？

第一个问题的答案是否定的；对第二个问题，不是所有的偶数，方程都有解。在解存在的情形，解往往很大。事实上，2014年，Bremmer 和 MacLeod 发表文章³ 讨论了这个问题。该文作者之一的 MacLeod 在这个问题下留言并解释为什么提出这样一个问题。2017年，有人在知识问答网站 Quora 上问了标题中的问题。本文作者写了下面的回答。

我当时在考虑几个3次表示问题，类似于 Andrew 和 Richard Guy 先前的工作。数值结果十分迷人。

上面的评论是退休数学家 Allan MacLeod 给出的，解释了几年前他是怎样偶然碰到问题中的方程。这确实是一个非常有趣的问题。尽管我之前也见过一些丢番图方程，但老实说，这个方程是我见过的最妙的丢番图方程。

我遇到这个问题是因为这个问题作为一个智力趣题在网上广泛流传。不怀好意的好事者 (Scridhar⁴，这个人是你吗？) 把这个问题设计成图片形式。我忘了自己最早看到的是什么，但它看起来如下图：

¹ https://www.quora.com/How-do-you-find-the-positive-integer-solutions-to-frac-x-y+z+-frac-y-z+x+-frac-z-x+y-4?utm_source=qq&utm_medium=social

² https://mathoverflow.net/questions/227713/estimating-the-size-of-solutions-of-a-diophantineequation/227722#comment562414_227760

³ http://ami.ektf.hu/uploads/papers/finalpdf/AMI_43_from29to41.pdf

⁴ <https://www.quora.com/profile/Sridhar-Ramesh>

95%的人解不出这道题！

$$\frac{\text{🍎}}{\text{🍌} + \text{🍌}} + \frac{\text{🍌}}{\text{🍎} + \text{🍌}} + \frac{\text{🍌}}{\text{🍎} + \text{🍌}} = 4$$

你能找到🍎、🍌和🍌
的正整数解吗？

你很可能已经见过许多这样的图了。它们一般采用标题党，例如“95%的麻省理工毕业生无法解决这个问题”。这里的“问题”往往是无意义的，或定义不清楚的，有时甚至是无足轻重的脑筋急转弯。

但这个问题不是。这张图片是一个聪明的，或说阴险的玩笑。大约99.999995%的人根本没有机会去解决它，其中包括很多顶级大学非数论方向的数学家。这个问题是可解的，但它真的非常难。

（顺便说一句。发布的人实际上并不是 Scridhar，或者说不完全是他。请参阅这个评论⁵以了解相关历史）。

你可能会认为：如果其他所有的方法都不行，我们还可以直接用计算机求解。对这种形式上看起来简单的方程，很容易就能编写出计算机程序求解。只要方程的确有解，计算机终将能把解找出来。这就错了！计算机暴力搜索在这里无用武之地。

如果不假设读者们已经知道有关椭圆曲线的所有应该知道的相关知识，我不知道该如何在这里写出完整的答案。我所能做的仅是做一个简要综述。主要参考文献是最近由 Bremmer 和 MacLeod 发表在 2014 年《数学和信息学年鉴》⁶（*Annales Mathematicae et Informaticae*）上的一篇名为《不同寻常的 3 次表示问题》⁷（*An unusual cubic representation problem*）的精彩论文。

让我们开始吧。

我们需要求的是下面这个方程的整数解，

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} = 4 \quad (1)$$

⁵ <https://www.quora.com/How-do-you-find-the-positive-integer-solutions-to-frac-x-y%2Bz-%2B-frac-yz%2Bx-%2B-frac-z-x%2By-4/answer/Alon-Amit/comment/36734352?share=6f36ef63&srid=CPO>

⁶ <http://ami.ektf.hu/index.php?vol=43>

⁷ http://ami.ektf.hu/uploads/papers/finalpdf/AMI_43_from29to41.pdf