



**译者序：**本文译自澳大利亚数学家陶哲轩的“*What is Good Mathematics?*” (arXiv:math/0702396v1)。陶哲轩是调和分析、微分方程、组合数学、解析数论等领域的大师级的年轻高手。2006年，31岁的陶哲轩获得了数学界的最高奖菲尔兹奖，成为该奖项七十年来最年轻的获奖者之一。美国数学学会对他的评价是：“他将精纯的技巧、超凡入圣的独创及令人惊讶的自然观点融为一体”。1978年的菲尔兹奖得主著名数学家 Charles Fefferman 的评价则是：“如果你有解决不了的问题，那么找到出路的方法之一就是引起陶哲轩的兴趣”。

陶哲轩的这篇短文在一定程度上阐述了他的数学观，在这点上类似于英国数学家哈代的名著《一个数学家的辩白》(*A Mathematician's Apology*)，相信会让许多读者感兴趣（如果哪位读者想接受 Fefferman 的忠告，让自己的问题有朝一日引起陶哲轩的兴趣，那么读一读这篇文章可能会有所助益）。不过陶哲轩的这篇文章远比《一个数学家的辩白》难读得多。从表面上看，它不带任何数学公式，这点甚至比《一个数学家的辩白》做得更为彻底（后者还带有一些诸如  $1^2+1^2=2$  之类的公式），但实际上，文章的主要部分，即第二节（对应于译文中篇的全部及下篇的大部分），所涉及的数学概念相当密集，足以给非数学专业的读者造成很大的困难，因此译文对译者知识所及且能用简短方式加以说明的若干概念进行了注释。本译文略去了原文的摘要、文献及正文中单纯与文献有关的个别文句（即诸如“感兴趣的读者请参阅某某文献”之类的文句）。

本译文末尾附有 1982 年菲尔兹奖得主 Alain Connes 在一篇博客文字中对陶哲轩这篇文章的负面评论。

## 1 数学品质的诸多方面

我们都认为数学家应该努力创造好数学。但“好数学”该如何定义？甚至是否该斗胆试图加以定义呢？让我们先考虑前一个问题。我们几乎立刻能够意识到有许多不同种类的数学都可以被称为是“好”的，比方说，“好数学”可以指（不分先后顺序）：

- 好的数学题解（比如在一个重要数学问题上的重大突破）；
- 好的数学技巧（比如对现有方法的精湛运用，或发展新的工具）；
- 好的数学理论（比如系统性地统一或推广一系列现有结果的概念框架或符号选择）；
- 好的数学洞察（比如一个重要的概念简化，或对一个统一的原理、启示、类比或主题的实现）；
- 好的数学发现（比如对一个出人意料、引人入胜的新的数学现象、关联或反例的揭示）；
- 好的数学应用（比如应用于物理、工程、计算机科学、统计等领域的重要问题，或将一个数学领域的结果应用于另一个数学领域）；
- 好的数学展示（比如对新近数学课题的详尽而广博的概览，或一个清晰而动机合理的论证）；
- 好的数学教学（比如能让他人更有效地学习及研究数学的讲义或写作风格，或对数学教育的贡献）；
- 好的数学远见（比如富有成效的长远计划或猜想）；
- 好的数学品味（比如自身有趣且对重要课题、主题或问题有影响的研究目标）；
- 好的数学公关（比如向非数学家或另一个领域的数学家有效地展示数学成就）；
- 好的元数学（比如数学基础、哲学、历史、学识或实践方面的进展）<sup>1</sup>；
- 严密的数学（所有细节都正确、细致而完整地给出）；
- 美丽的数学（比如拉马努金的令人惊奇的恒等式；陈述简单漂亮，证明却很困难的结果）；
- 优美的数学（比如保罗·爱多士的“来自天书的证明”观念；通过最少的努力得到困难的结果）<sup>2</sup>；

<sup>1</sup> 此处“元数学”译自“meta-mathematics”，不过这里所举的有些内容，如历史、实践等，通常并不属于元数学的范畴。

<sup>2</sup> “来自天书的证明”译自“Proofs from THE Book”。爱多士喜欢将最优美的数学证明说成是来自“The Book”（我将之译为“天书”），他有这样一句名言：你不一定要相信上帝，但应该相信“The Book”。爱多士去世后的第三年，即1998年，Martin Aigner 和 Günter M. Ziegler 以《来自天书的证明》为书名出版了一本书，收录了几十个优美的数学证明，以纪念爱多士。

- 创造性的数学（比如本质上新颖的原创技巧、观点或各类结果）；
- 有用的数学（比如会在某个领域的未来工作中被反复用到的引理或方法）；
- 强有力的数学（比如与一个已知反例相匹配的敏锐的结果，或从一个看起来很弱的假设推出一个强得出乎意料的结论）；
- 深刻的数学（比如一个明显非平凡的结果，比如理解一个无法用更初等的方法接近的微妙现象）；
- 直观的数学（比如一个自然的、容易形象化的论证）；
- 明确的数学（比如对某一类型的所有客体的分类；对一个数学课题的结论）；
- 其它<sup>3</sup>。

如上所述，数学品质这一概念是一个高维的（high-dimensional）概念，并且不存在显而易见的标准排序<sup>4</sup>。我相信这是由于数学本身就是复杂和高维的，并且会以一种自我调整及难以预料的方式而演化；上述每种品质都代表了我们将作为一个群体增进对数学的理解及运用的不同方式。至于上述品质的相对重要性或权重，看来并无普遍的共识。这部分地是由于技术上的考虑：一个特定时期的某个数学领域的发展也许更易于接纳一种特殊的方法；部分地也是由于文化上的考虑：任何一个特定的数学领域或学派都倾向于吸引具有相似思维、喜爱相似方法的数学家。它同时也反映了数学能力的多样性：不同的数学家往往擅长不同的风格，因而适应不同类型的数学挑战。

我相信“好数学”的这种多样性和差异性对于整个数学来说是非常健康的，因为它允许我们在追求更多的数学进展及更好的理解数学这一共同目标上采取许多不同的方法，并开发许多不同的数学天赋。虽然上述每种品质都被普遍接受为是数学所需要的品质，但牺牲其它所有品质为代价来单独追求其中一两却有可能变成对一个领域的危害。考虑下列假想的（有点夸张的）情形：

- 一个领域变得越来越华丽怪异，在其中各种单独的结果为推广而推广，为精致而精致，而整个领域却在毫无明确目标和前进感地随意漂流。
- 一个领域变得被令人惊骇的猜想所充斥，却毫无希望在其中任何一个猜想上取得严格进展。
- 一个领域变得主要通过特殊方法来解决一群互不关联的问题，却没有统一的主题、联系或目的。
- 一个领域变得过于枯燥和理论化，不断用技术上越来越形式化的框架来重铸和统一以前的结果，后果却是不产生任何令人激动的新突破。
- 一个领域崇尚经典结果，不断给出这些结果的更短、更简单及更优美的证明，但却不产生任何经典著作以外的真正原创的新结果。

<sup>3</sup> 上述列举无意以完备自居。尤其是，它主要着眼于研究性数学文献中的数学，而非课堂、教材或自然科学等接近数学的学科中的数学。

<sup>4</sup> 特别值得指出的是数学严格性虽然非常重要，却只是界定高品质数学的因素之一。