开普勒猜想

蒋爱红　张小平

在数学发展的历史上，有一种奇特的现象，人们在世俗生活中提出的普通问题，经过数学家的提炼，会成为一个著名的数学猜想。再经过数学家们的攻关，有的被解决了，有的至今也没能解决。这样的数学猜想在被提出来的时候，大都因为和主流的数学理论缺乏联系，成熟的数学思想和方法难以用于解决这些问题，而在解决这些问题的过程当中却产生出了新的数学理论，创设出了新的数学分支。

地图四色猜想是在 1852 年由一位英国伦敦大学的学生格思里（F. Guthrie）最先提出来的。后来通过英国数学家德摩根（A. De Morgan）致信告诉了数学家哈密尔顿（W. R. Hamilton），直到 1865 年哈密尔顿逝世，这个问题也没有能够解决。1872 年，英国数学家凯利 (A. Cayley) 正式向伦敦数学学会提出了地图四色猜想。1976 年 9 月，美国伊利诺依大学的两位教授阿佩尔（K. Appel）与哈肯（W. Haken）宣称，他们通过两台电子计算机的运算，证明了这个猜想。但是，数学家们对如何检验计算机运算的正确率存有质疑，从这个意义上说，地图四色猜想仍然是一个没有解决的数学难题。

哥尼斯堡七桥问题是这个城市的居民们首先提出来的。流经哥尼斯堡的普累格河上有两个岛屿，它们之间与岸边由七座桥连接。当地居民在游览观光的过程中试图不重复的一次性走过这七座桥，却从来没有人成功过。这件事情在 1736 年引起了瑞士数学家欧拉的关注。他很快就用数学方法证明了不重复的一次性走过哥尼斯堡的七座桥是不可能的。

数学家们在探索证明这两个数学难题的过程中，引进了许多新的概念与方法，创立了一个新的数学分支——图论，也催生了拓扑学的诞生。与这两个问题同样著名的就是开普勒猜想。

1

拉雷爵士（来源：Wikipedia）

哈里奥特（来源：Pinterest）

1594 年的一天，英国探险家拉雷（W. Raleigh）爵士在为自己的船队出海远航做着准备工作。他在检查储备物资时，来到了摆放炮弹的位置，当时的炮弹还是铁球的形状，他要求助手哈里奥特（T. Harriot）能否在炮弹仓里尽可能地多装一些。哈里奥特是英国的一名数学家和天文学家，是拉雷爵士船队的技术顾问。哈里奥特按照自己的数学直觉，很快就找到了一种堆积炮弹的方案。数学家的思维是深刻的，这件事情启发哈里奥特联想到了另外一个有趣的问题，如何堆积一堆相同的球体，使它们所占空间的体积最小？哈里奥特后来研究了多种球体的堆积模式，在 1597 年出版了一本研究球体各种堆积问题的书籍，并且由此发展出早期的原子论的理论，为晶体结构理论奠定了基础 [1]。

1601 年，哈里奥特在与德国数学家和天文学家开普勒(J. Kepler)的通信中，提到了这个问题。这引起了开普勒的极大兴趣和思考。通过观察，他发现在日常生活中，人们广泛采用的装箱方法是上层球体安放在下层球体中间的凹陷处。受此启示，经过长时间的研究和试验之后，开普勒猜测，球体堆积最节省空间体积的方式应该是这样的，在第一层排列的每个靠里面的球的四周都有六个球与它们相切，然后第二层的球放在上一层球之上，让球的中心位置处于最低的点上，其余各层以此类推。这也是一种化学晶体中原子的排列形式，它的特点是，在一个小的局部里，每个球体都与其余 12 个球相切。他还给这种堆积方式起

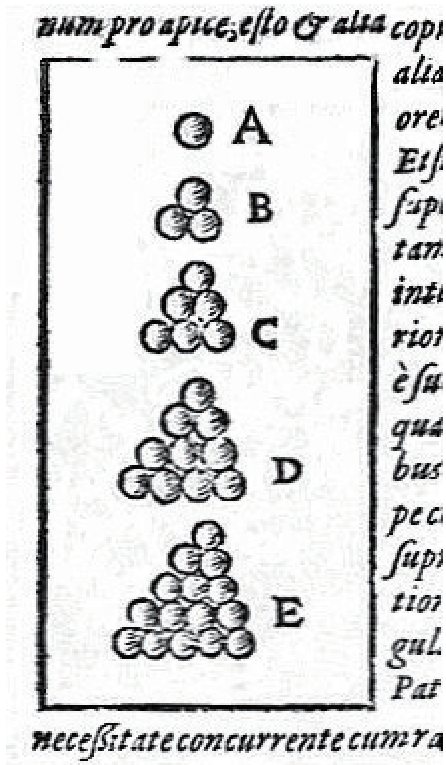
[1] Jeffrey C. Lagarias. The Kepler Conjecture: The Hales-Ferguson Proof. Springer-Veriag, New York, 2011.

了一个好听的名字叫“面心立方晶”[1]堆积法。

1606 年，开普勒写信告诉了哈里奥特他对这个问题的猜想。直到 1611 年，开普勒出版了《论六角雪花》一书，详细讨论了他的这个猜想。在这本书里，他用明确的数学语言概括了这个猜想，如果正方体箱子的容积为 L，球的半径为 r，球装入箱子的数量为 N，可以定义球堆积密度为

$$\frac{\frac{4}{3}\pi\gamma^3\times N}{L}。$$

根据开普勒构想的“面心立方晶”堆积法，我们可以构造一个理想模型进行计算。设想一个边长为 2 的正方体，分别以它的八个顶点及六个面的中心为球心，放上半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的球体，因此，在这个正方体内，共有 4 个整球的体积（八个角，每个角有 $\frac{1}{8}$ 个球；六个面，每个面有半个球），所以这个局部球堆积密度应该为：



《论六角雪花》中讨论开普勒猜想的一幅图（来源：Wikipedia）

$$\frac{1}{2^3}\times\frac{4}{3}\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^3\times 4=\frac{\sqrt{2}\pi}{6}=\frac{\pi}{\sqrt{18}}\approx 0.740480.$$

如果用这些边长为 2 的正方体为基本单位，填满一只足够大的正方体，就会得到一种球堆积的情形。直观地看，由于这种球堆积的每个局部的密度都是 $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$ ，那么整体的球堆积密度应该也是 $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$。因此，开普勒认为，球堆积密度的上确界应该是 $\frac{\pi}{\sqrt{18}}$。

因为球体在空间的堆积可以有无限多种方式，即使在面心立方晶的情况下，每个球与其他球接触的时候都有较大的空隙，所以每个球都会有移动的空间，另外，当球的数目趋向于无穷时，球堆积密度又涉及到极限的问题。正是由于诸如此类的困难，开普勒没有能够从数学上严格地证明球堆积密度的上确界问题。

开普勒在研究这个问题的时候进行过降维处理。他注意到，在平面内，对于一个圆，最多可以同时与 6 个同样大小的圆相切。进而，他发现在三维空间，一个球可以同时与 12 个同样大小的球相切。八十多年以后，这个问题引起了一位大数学家的注意。1694 年的一天，牛顿和数学家格雷戈里（D. Gregory）在剑桥大学三一学院讨论太阳系行星的有关问题时，话题就转到了一个球可以同时与多少个同样大小的球相切的问题。他们共同认为，一个球同时与 12 个