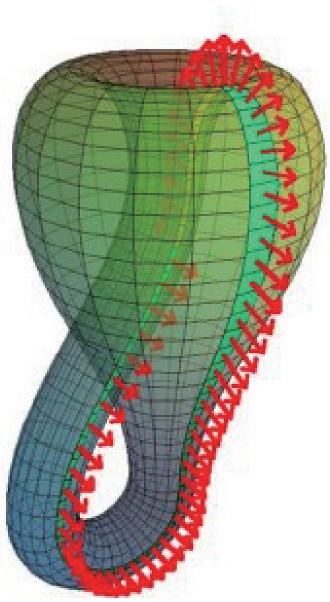
克莱因瓶

Konrad Polthier／文　丁 玖／译

我第一次和克莱因瓶打交道以失败而告终。当我还在学校时，我在一本周刊上看到了一张克莱因瓶的图片。我和一位专门从事物理设备工作的玻璃制造者朋友分享了我对此的迷恋。几天后，我就成了由玻璃制成的实体克莱因瓶的一个骄傲的拥有者。

这样的瓶子能做什么？为什么不用它做点事？填充它并不容易，因为流入的水堵住了内部的空气出来。所以我决定把剩下的空气保留在瓶子里，看看这个半填充瓶作为一个温度计有多有效。我添加了几种高锰酸钾晶体来使水变色，使其更容易标记玻璃上的水位。

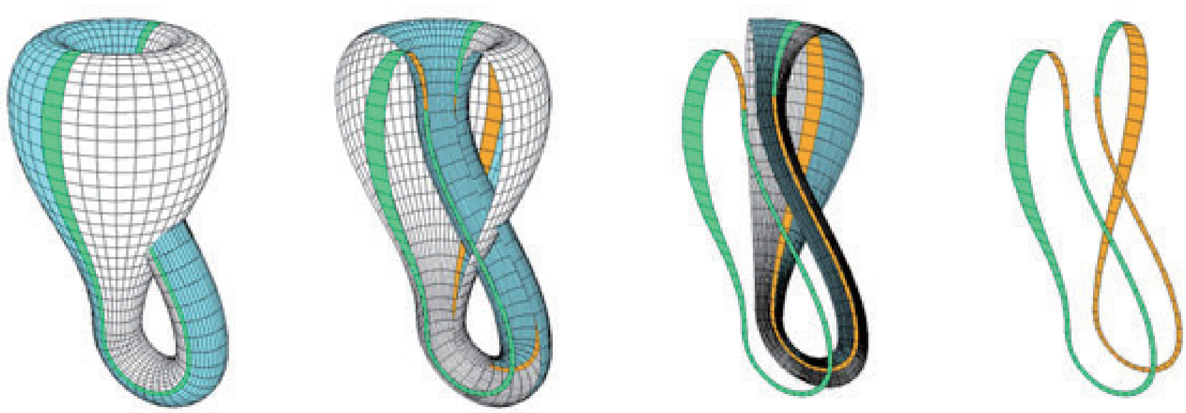


令我高兴的是，这种原始但有趣的温度计确实显示了白天的生命迹象。不幸的是，第二天早上就出现了一场灾难，大量的红水泼在我的窗台上。

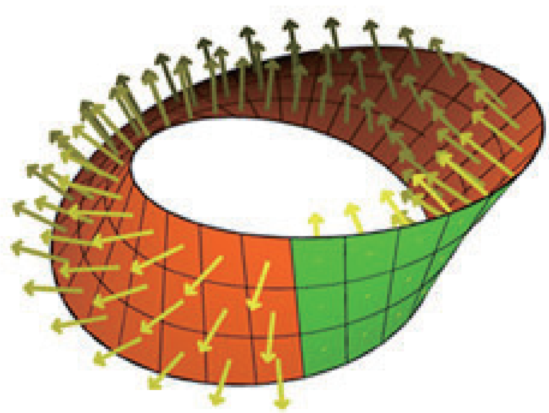
这是冬天，夜间的低温将瓶子里剩余的空气压缩得太厉害，以至于克莱因瓶手柄内的水位低于下部曲线，从而吸入了更多的空气。当空气在早晨再次升温时，体内空气的增加使水位在柄内过高上升。在那些日子里，我无法找到使得水和空气稳定的比例。

克莱因瓶是在 1882 年被克莱因（Felix Klein）发现的[1]，从此以后，在“象牙塔”之外，它进入了为一

[1] F. Klein, Über Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale, Teubner Leipzig (1882), p. 80.



般公众所知的数学形体的画廊。这个瓶子是一个单侧的曲面，就像众所周知的莫比乌斯带一样，但更加迷人，因为它是封闭的，没有边框，也没有封闭的内部和外部。按照克莱因的方式，我们使用视觉模型来研究这个曲面。



从莫比乌斯带到投影平面

莫比乌斯带是最简单的单侧曲面，并且很容易由一张纸带做成。标记纸张的两面——例如，在前面画一些红点，而在背面画一些绿点。现在将条带扭转后，把两端粘在一起，使红点附在绿点上。这就成了一个莫比乌斯带，沿表面移动不越过边界就能走遍红色及绿色的圆点。

这个带子于 1858 年由德国天文学家和数学家莫比乌斯（August Ferdinand Möbius）发现。加上 0 次扭转，2 次扭转或更一般地，偶数次扭转将始终产生双侧曲面。类似地，非偶数次的扭转将产生各种各样的单侧曲面。有趣的是，莫比乌斯带的边界是一个单一的闭合曲线。

拓扑学是研究形状在连续弯曲和拉伸下不变化的那些性质的一门数学学科。例如，如果一个莫比乌斯带由橡胶片做出，我们略微将它拉长而不会破坏它，它仍然是一个单侧曲面。相比之下，如果我们在没有扭转的情况下粘合了条带的两端，则所得的圆柱形形状将是在拓扑意义下不同的双侧圆柱面。

尽管很简单，但莫比乌斯带是一个真正的数学发现。关于曲面可定向性的推理是理解和分类拓扑中的曲面和流形的关键之一。

拓扑的后续任务是摆脱莫比乌斯带的剩余边界以产生封闭的曲面。最简单的解决办法是用橡皮莫比乌斯带并把所有边界点连续地拉到一起，就像我们可以将一个圆的点拉成圆锥面。无论我们是否去掉圆锥面的尖点，我们获得一个没有边界的封闭曲面，它是单侧的，因为无论从哪里开始我们总是可以去走到莫比乌斯带，然后像以前一样切换边。这个曲面称为投影平面，在拓扑上它是最简单的一个封闭的单侧曲面。不幸的是，射影平面的几何实现是相当复杂的。

例如，直到 1903 年，鲍埃（Werner Boy）[2] 才根据希尔伯特（David Hilbert，鲍埃的博士生导师）的建议，发现了没有尖角或边缘的射影平面的一个几何实现。幸运的是，莫比乌斯带的不同闭合可更简单地得到。

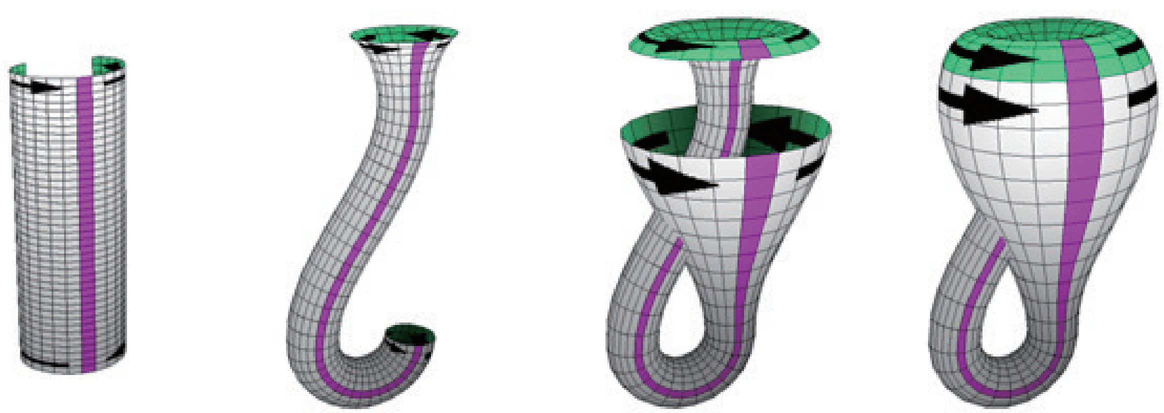
克莱因瓶不是一个甜甜圈

像甜甜圈形状的圆环面的构造从一张纸开始，将它卷起来形成圆柱面，然后将两端弯过来形成周围闭合的形状。圆柱面在一侧的内部与另一侧的内部连接，外部也一样。因此，环面是双侧曲面。

但是，我们也可以使用圆柱面来制作一个克莱因瓶。不像我们从纸条上制作莫比斯带时所做的那样加一个扭转，我们将圆柱面的一端在圆柱面内绕回，将其粘合到另一端，并将两个边界线以相反的方向粘合在一起。为了以令人愉快的形状来实现，我们调整圆柱面的宽度。这使我们能够将内部粘合到外部，获得一个单侧曲面。在下图中，我们使用白色和绿色来区分原来的圆柱面的两侧。当克莱因瓶完成后，颜色仍然显示圆柱面粘合在何处，但在任何其它平行圆周粘合也行。

在他的原始著作 [1] 中，克莱因将他的瓶子作为将“橡胶管翻转，使其通过自身内外相遇”的“某种无界的双曲面”的可视化。

不幸的是，克莱因瓶不界定体积——换句话说，它没有内部。这意味着你可以在“克莱因瓶”甜甜圈上放上两倍于环面甜甜圈的糖，但是它里面却没有面团！



[2] W. Boy, Über die Curvatura integra und die Topologie geschlossener Flächen, Math. Ann. 57 (1903), pp. 151-184.