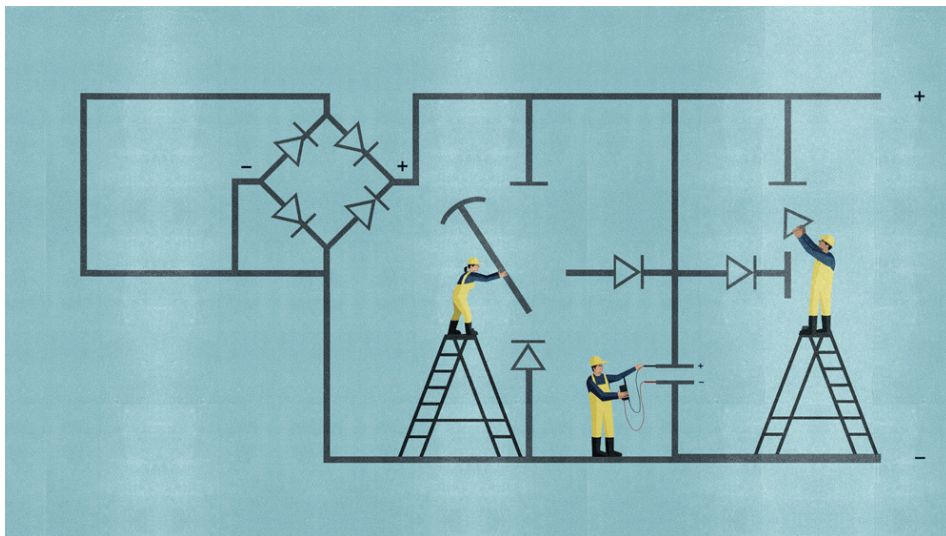


外行人破解困扰数学界 50 年的难题

Erica Klarreich / 文 赵京 / 译



2008年,丹尼尔·斯皮尔曼(Daniel Spielman)给他耶鲁大学的同事吉尔·卡莱(Gil Kalai)描述了他正在研究的一个计算机方面的问题——如何稀疏(sparsify)网络以减少节点之间的链接但仍保持原网络的基本结构?网络稀疏化在数据压缩和高性能计算中有广泛的应用。但斯皮尔曼的这个问题对卡莱而言却另有一番含义。它似乎和50年未解决的量子物理中著名的卡迪森-辛格(Kadison-Singer)问题相似。

几个世纪以来,从数学和工程领域开始,卡迪森-辛格问题已经渗入诸多其它领域,但仍然无人能够破解它。美国密苏里大学哥伦比亚校区(University of Missouri in Columbia)的皮特·卡萨扎(Peter Casazza)和詹妮特·特雷梅恩(Janet Treiman)2014年共同发表过一篇综述性的文章,称“这个问题”击败了过去50年间最杰出的数学家们的最大努力。

做为计算机学者,斯皮尔曼对量子力学和同卡迪森-辛格问题密切相关的 C^* -代数知之甚少。但是,当卡莱,那时执教于以色列耶路撒冷的希伯来大学,向他描述了其多种等价形式后,斯皮尔曼立刻意识到他很可能是难题破解的最佳人选。“对我而言,我每天所做的研究工作正是围绕着它进行的,我肯定能证明它。”斯皮尔曼觉得他只需要几个星期的时间就可以完成破解。

然而,破解却历时5年的时间。终于在2013年,斯皮尔曼和他当年的博士后,现在执教于普林斯顿大学的亚当斯·马库斯(Adam Marcus),还有当



破解难题的计算机学者：斯里瓦斯塔瓦（左）、马库斯（中）和斯皮尔曼

年的研究生，现在执教于加州伯克利大学的尼基尔·斯里瓦斯塔瓦（Nikhil Srivastava），一起完成破解。消息在数学界不胫而走。对 C*- 代数及相关领域略知皮毛的三位门外汉破解了他们的最大难题。

数学家们对这个石破天惊的消息忧喜参半。被卡萨扎和特雷梅恩称为“当今世界最重要的成果”的破解完全出人意料。过去两年里，卡迪森 - 辛格问题的专家们花了很大功夫整理答案的思路。卡萨扎感叹道：“斯皮尔曼、马库斯和斯里瓦斯塔瓦用了大量我们从未听说过的方法”，“虽然我们极度期待难题的破解，但其方法又实在令人费解。”

执教于加州洛杉矶大学的著名华裔数学家陶哲轩一直追踪卡迪森 - 辛格问题的进展。他评论说：“对破解方法有深度了解的人却不是破解它的人。”数学家们为了将这儿拨毫不相干的人聚在一起讨论破解细节而举办了几个研讨会，但消化它们还需要几年的时间。陶补充说：“方法太诡秘了，我们还没准备好。”

然而，计算机学者们却没有时间等待，他们立刻开始探索破解所带来的应用。例如，去年两位计算机学者将新方法应用到著名的旅行商问题而取得重大突破。执教于普林斯顿大学的数学家阿萨夫·奈尔（Assaf Naor），其研究领域和卡迪森 - 辛格问题接近，解释说：“这个问题太重要了，不可能没有大量应用。”

卡迪森 - 辛格（Kadison-Singer）问题

受物理大师狄拉克的启发，延伸海森堡的不确定性原理，理查德·卡迪森（Richard Kadison）和艾沙道尔·辛格（Isadore Singer）1959年提出：是否可以用某个子系统的完整信息来了解整个量子系统？不确定性原理指出一个粒子的某些性质，包括位置和动量，是不可能同时精确度量的。

让卡迪森和辛格不确定的是，能否通过同一时间观测到的某个子系统的大量不同性质来推断出整个大系统的信息呢？

如果是粒子沿着直线移动的系统，卡迪森和辛格的结论是否定的。在这种系统中，看似相同的粒子实际上是处于许多不同的量子状态。在一个电子邮件里，卡迪森进一步解释说：“不同的粒子可以同时处于相同的位置。换句话说，它们存在于平行空间内。”不过，他还是提醒大家这类系统是否真实存在尚不清楚。



卡迪森（左）和辛格

对于粒子不沿着直线移动的系统，或者是被称为“颗粒状的”，卡迪森和辛格并没有给出明确答案。这就是著名的卡迪森 - 辛格问题。

根据对连续空间的结果，卡迪森和辛格猜测在“颗粒状的”系统中也存在平行空间；就是说，结论也应该是否定的。但是，他们并没有将这一猜测正式列为猜想，这真是明智之举因为它最终被证明是错的。卡迪森多年后感叹说“幸亏当时没有大意。”

卡迪森目前执教于宾夕法尼亚大学，而辛格已从麻省理工学院退休，他们是在量子力学处于复兴时代提出这个著名问题的。至于如何解决它，当时的一些物理学家持“埋头钻研”的观点；另一些推崇数学的物理学家们则将它视为概率论随机过程基本结构的 C^* -代数问题。

C^* -代数的难度与深奥，用卡萨扎的话来讲“是数学里最抽象和捉摸不透的。外行对它一无所知。”因而，开始的 20 年里，卡迪森 - 辛格问题处于毫无进展的状态。

转机发生在宾夕法尼亚州立大学的退休教授乔尔·安德森 (Joel Anderson)，他证明这一问题等价于线性代数里是否可以将矩阵分解为子矩阵这一容易理解和叙述的问题。做为线性代数的核心内容，矩阵是用来描述直线、平面和高维空间的数学现象。一时间，卡迪森 - 辛格问题遍布各个领域；很快，它成为一个又一个研究领域内的重要课题。

然而，这些领域鲜有交集。直到卡萨扎发现它等价于信号处理方面的某个最重要课题之前，大家都没有意识到卡迪森 - 辛格问题的普及性。卡萨扎本人是研究信号处理的，其等价的难题是关于能否将信号分解为小型的、简单的信号问题。卡萨扎沉迷于卡迪森 - 辛格问题，直到 2005 年和特雷梅恩及另外两位合作者共同撰文证明它与多个数学和工程领域中的未破解难题等价；攻克其中任何一个，其它等价问题也就迎刃而解了。

等价问题的版本之一是几年前由执教于圣路易斯华盛顿大学的尼克·韦弗 (Nik Weaver) 提出的韦弗猜想。他的版本是关于能否将一组向量分为两组向