天工数形

Helaman Ferguson, Claire Ferguson/ 文　　崔继峰 林家声 / 译

动机

为塑以数，弄数以塑，此吾之乐也！石者，万世如斯；数者，亘古不灭。雕数于塑之上，方得永恒。

我曾经觉得，要让生活有条不紊，还是得把科学和艺术分得越开越好。我怕有人说我在两方面都不够用心，而这样做才免得暴露我这条把两者纠缠的灵魂。划清科学和艺术的界线是我们这代人的教条之一。“鱼和熊掌不可兼得！”父母们总是好言相劝，“如果你刚好有点儿科学上的天赋并能从业于此，那就再好不过——艺术家可混不到饭吃。”

不过当下既是科学的黄金时代，也是艺术的豆蔻年华。从业的选择更加丰富。现在，我终于有机会同时从事科学和艺术，并将两者结合起来。对此，我心怀感激[1]。

数学家有他们自己的审美观，这种对于“妙”与“美”的独特感受是难以言说的[2]。我的设计灵感总是来源于一些深刻的数学概念。我的雕塑则在于表达出生活中常见的基本形体和一些抽象数学概念的深刻联系。

人是一个环面。这就使我们的身体和抽象的拓扑学有了关联。比如，拿商空间作为抽象概念，环面就是一个简单的例子。我们还可以考虑“握手”这个生活中的基本动作，人们握手时手的空间位置对应的就是一个有三个洞的环面——这个例子稍微困难一些。在我的作品里头，几何学、拓扑学和人文学科相得益彰，并能以各种形式表达在纸上、电脑上、黏土、青铜或是石头里。

我设计的雕塑，你必须得摸。艺术博物馆的工作人员总是警告我们“只能看，不能摸”。而我的雕塑却需要被触摸、被把握，你要用你的手指触摸、甚至用你的腿脚从它中间爬过，最后用你的大脑三思，目的才算达到。

普通的模型，我是不做的。但我有自己的方式化无形为有形。我的每一具雕塑背后都藏着一系列漂亮的数学定理。我对数学之热爱难以诉诸言语，但可以凝聚在雕塑之中。我渴望我们的艺术和科学中的美丽奇观能够在一个更广阔的世界中存在[3]。

青铜中的数学定理

失蜡铸青铜

和许多雕塑家一样，一开始我从青铜做起。这个过程有很多复杂的步骤，比如从正的原型，到负的铸模，到正的蜡模、负的陶瓷，再到正的青铜。紧接着，还有镂刻、铜

[1] Katherine Ungar, Helaman Ferguson: Carving his own unique niche, in symbols and stone, Science 314 (2006), no. 373, 412–413.

[2] James A. Cannon, Mathematics in marble and bronze: The sculpture of Helaman Rolfe Pratt Ferguson, The Mathematical Intelligencer 13 (1991), no. 2, 30–39.

[3] Claire Ferguson, Helaman Ferguson: Mathematics in Stone and Bronze, Meridian Creative Group, Erie, Pennsylvania, 1994.

图 1 数控脐环

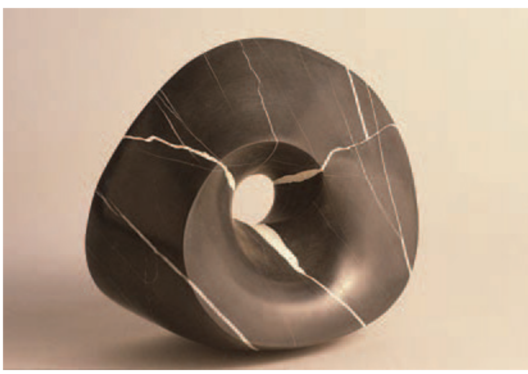

图 2 犹他州石灰岩做的

锈处理，或是最终的表面抛光等工序。有时候我先铸一个整体，再往其上做雕刻，最后将其磨光 [3]。

青铜和铸铁很类似，其原材料一般是锭状的。许多工业上的铜合金都以青铜为名，世界各地的青铜也是五花八门。锰铜合金一般用在水龙头上。北美的美术用青铜是一种特制的含有硅的铜合金，倾倒时不会断截且易磨光。硅铜合金的一个典型的分子式是

$$9438Cu+430Si+126Mn+4Fe+Zn+Pb。$$

将上面各元素的系数除以 10000 我们就得到了美术用硅铜合金的一个“单位”。古往今来，青铜在工业和军事上都大有价值；而人造的青铜制品一直辗转于危难——即便人们天天梦想世界和平，烽火硝烟年年都少不了。不过，青铜被磨光之后，没有其它材料能媲美其反光效果，熠熠的光彩是它给人的嘉赏，就像 4, 5, 6, 7, 8 所说的那样。

数控脐环

大概二十年前，我用一块佛得角来的优雅又古老的彩陶黄铜做了一个“数控”的脐环 [3]。我已经用石头雕过不少扭曲的环面了，比如我就曾用犹他州落基山脉得来的一块可打磨的石灰岩做过一个脐环。“数控”就是指“数字控制”，在那时，控制铣床还得用一卷卷纸带。

比起其它扭曲的环面来说，这个“数控脐环”最吸引我的注意，因为它和群 $GL(2, \mathbb{R})$ 的表示论有直接联系。群 $GL(2, \mathbb{R})$ 就是指所有 2 阶实可逆矩阵的乘法群。这个群作用

[4] Sculptor Helaman Ferguson, Clay Mathematics Institute Award, Clay Mathematics Institute, Cambridge, Massachusetts, 1998–present.

[5] Sculptor Helaman Ferguson, David and Bessie Borwein Award, CMS/SMC Career Award. Canadian Mathematical Society, 2004 to present.

[6] Sculptor Helaman Ferguson, AMS Public Service Award, American Mathematical Society, 2009 to present.

[7] Sculptor Helaman Ferguson, Gauss Society Donor Award, Mathematical Sciences Research Institute Gauss Society, 2009 to present.

[8] Sculptor Helaman Ferguson, Stephen Anson Coons Award, career award. ACM/SIGGRAPH, biennial, 1999–present.

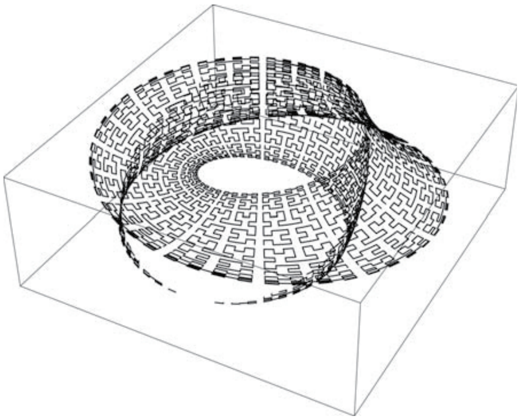

图 3

在所有齐次二元二次型（2 个变量，3 个系数）上，就得到了我们熟悉的椭圆、双曲线和抛物线的二次曲线分类。这群还能作用在齐次二元三次型上（2 个变量，4 个系数），就能给出椭圆脐型、双曲脐型、抛物脐型和纯三次型的分类[9]。

我曾想以一定的数值精确度雕出径向截面为（有三个尖的圆内摆线）、轴向截面是心脏线的 1/3 扭曲环面，还想在表面上表示出一个填满平面的皮亚诺—希尔伯特曲线。三轴铣床采用硬质球头铣刀对材料进行切割，铣刀的所有点对点移动都编写在一卷纸带中并由其控制。制定刀具的路径时，我发现用充满平面的曲线来作路径能做到既高效又美观。刀具的所有偏移和运动都必须预先编制好。在那会儿，用来控制铣床的 G- 码数据用掉的纸带都够塞满整个车间了！幸好，实验室人员后来找了硬盘来控制铣床，替代了纸条子。

在图 3 中我们可以看到三维空间中的刀具路径曲线，坚硬的铣刀就沿着这条轨迹移动。这一步机械雕刻只能做出最原始的、不成形的一坨高密度塑料泡沫。然而要做出这一原始的“数控脐环”模型，就得用到应用数学、计算机和工程等不少专业知识。在这许多繁复的正负形交替的失蜡铸造步骤之后，我终于用古老的佛得青铜完成了这具“数控脐环”。

在不少的微积分课本的封面上都能见到脐环或是其它类似形状的身影。我遇到的许多学生都和我说，他们都曾看这些封面图和介绍看得出神。一位年轻的小姐姐还和我说，由于她的微积分老师太无趣，她就一直看着这脐环的图像和描述来打发课内时光。

岩石中的数学定理

于雕石之上

石头是我最爱用的材料之一。也许是因为我从小是由一位石匠带大的吧——他在一块极其普通的野外的石头中也能发现美。我的审美标准包括地质年代、起源以及减法。我们是先学习加法再学习减法。减法比较难，不是吗？

按照传统，做雕塑的过程不是加法就是减法。加法比较受欢迎：先把黏土做成想要的形状，再把它粘到一个支架上；或者把几块金属焊在一起。这些是对不同模块的操作。大部分美术学院并不会通过雕石头来教减法。这种从一整块石头开始、慢慢去掉不想要的部分而留下所须部分的雕刻方法已经老掉牙了。这方法不仅难做，更难教。但对我来说，正是减法才比加法来得更有趣，特别是当我自己就这么做的时候。

数学家最引人注目的一点就是他们喜欢把事情都让自己做一遍。不能自己创造定理来证明，就要无视已有的证法、把别人的定理让自己证明一遍。雕塑家则与此相反。如今，要做一个石雕艺术品就像大张旗鼓地录制一张摇滚音乐专辑；足够有钱的雕塑家就可以把刻石头的工作交给别人，即所谓的“外包”。我所要关心的，即是“究竟要雕什么

[9] Helaman R. P. Ferguson, Two theorems, two sculptures, two posters, American Mathematical Monthly 97 (1990), no. 7, 589–610.

图 4

图 5

东西”这个问题。我如何来分包 C^∞ 函数？负高斯曲率呢？更重要的是，我做了这件事之后又学到了什么？

但并不是说，我们既然生活在这个有求必应的好时代就要把工作都外包出去。我随便去一个地方都完全可以在当地找一个五金店，拿它的库存自己组建一个像模像样的石雕工作室，甚至还能配备各种钻石锯。要是我在四十年前想建一个这样的工作室，那所有这一切都压根不可能——这得归功于近几年来钻石切割技术的迅猛发展[10]。随着人造合成金刚石的生产，现在到处都可以找到加工得棱角分明、表面光亮的石头。在不久之前，加工这些石头的开销还高得令人望而却步呢。

通常我的雕塑会被放到各学院和大学当中。这样的话，学校的教工、学生、职员还有他们的家人及其世世代代就都能看到我的作品了。我的作品大概会颠覆他们的种种成见，告诉他们，数学的创造和艺术的创造何以共有这种独特的、启迪灵魂并发人深省的生命力。

一块存在了几百万年的石头，再过个几千年，它也还会在那里。尤其是经过我的雕刻，它对军事和工业就毫无用处了，就更不会有人去损坏它。我所用来做雕塑的石头本身也就没什么价值，而且从功利角度来讲，这石头经过我的雕刻反而变得更加一无是处。艺人之意不在用，在乎藏之久也！

要是几千年以后，有人把我的雕塑从土里挖了出来，他也一定能猜出此中蕴藏的深意，并继续为数学欢呼喝彩。我的雕塑还得够大、够坚固，才能让这些漂亮的数学定理

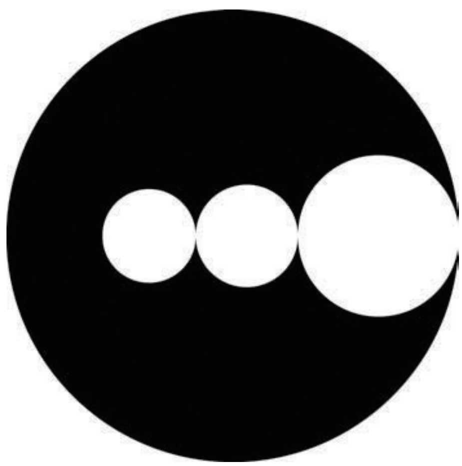

图 6

[10] Howard Tracy Hall, Ultrahigh pressure research: Tetrahedral anvil press, Science 128 (1958), 445–449.

在课本和教室之外也找到一席之地，并能超脱于当下而“存在”。比如 11, 12, 13, 14, 15, 16。

接下来我们就用数学来谈谈雕塑中的减法，并把它用到石头上面。然后，以我的两件石雕作品作为例子总结全文。

减法

欧几里得算法是历史上最古老的数学算法之一。其对于整数对的算法记录在《原本》第七卷中，对于实数对的算法则写在第十一卷。欧氏将这一方法称为“辗转相除法”。1977 年诺德尼 • 福卡德（Rodney Forcade）和我发现并证明了，欧氏算法之于 n 元有序实数组、复数组甚至四元数组都有不可数无穷多种推广 [17]。这些算法都是辗转相除法，现在被称为 PSLQ 算法。首先取一列有序实数列 $x \in \mathbb{R}^n$，并构造一有序整数列 $m \in \mathbb{Z}^n$，使得所取的实数以这些整数为系数线性相关，即 $x \cdot m = 0$，如果这样的整数 m 存在的话。如果不存在这样的线性相关性，则 PSLQ 至少可以给出这种相关性大小的下界。PSLQ 算法发现一 n 维线性关系所用的时间，是维数 n 以及其系数组之欧氏范数之对数的多项式函数；在我看来，我的算法即是用 $GL(n, \mathbb{Z})$ 中矩阵的求逆来进行的“辗转相除法”。目前为止，这种“辗转相除法”已经催生了不少新的发现 [18]。

我来举一个这类发现的例子：PSLQ 给出了一个新的算 π 的公式 [19]。这公式有一个惊人之处，即可以直接算出 π 的小数点后任意位置起的二进制小数，而不用算出前面的

[11] Sculptor Helaman Ferguson, Eightfold Way, volume Carrara White Marble and Albemarle Virginia Serpentine, Mathematical Sciences Research Institute, 17 Centennial Way, Berkeley, California, 1993.

[12] Sculptor Helaman Ferguson, Four Canoes: Two Linking Klein Bottles, volume 12 tons with plaza, billion-year-old Texas red granite, half-billion-year-old Academy Black California quartz diorite. University of St. Thomas, Sabo Square, University of St. Thomas, corner of Cretin and Summit Avenues, St. Paul, Minnesota, 1995.

[13] Sculptor Helaman Ferguson, Fibonacci Fountain: Essential Singularity II, volume 42 tons of red and beige Texas billion-year-old granite, concrete, and steel. Dean Morehouse, Lake Fibonacci, Maryland Science and Technology Center, Bowie, Maryland, 2000.

[14] Sculptor Helaman Ferguson, Invisible Hand- shake I, volume 9' × 5' × 6', negative Gaussian curvature carving; base is 10’ diameter hyperbolic disk tiled by right-angled pentagons forming a checkerboard in two colors of granite. Merck Pharmaceutical, Upper Gwynedd, Pennsylvania, 2002.

[15] Sculptor Helaman Ferguson, SYZYGY: Venus and Mars redux, volume billion-year-old Texas red and beige granite, articulated Poincaré discs with Mayanmars and Venus pyramids. Hamilton College, in front of the Science Center, Hamilton College Campus, Clinton, New York, 2006.

[16] Sculptor Helaman Ferguson, Invisible Hand- shake II, volume 3-ton quartz diorite, half-billion-years-old, negative Gaussian curvature, Macalester College, Olin-Rice Science Center, Macalester College, St. Paul, Minnesota, 2008.

[17] Helaman R. P. Ferguson, Analysis of PSLQ, an integer relation finding algorithm, with David H. Bailey and Steve Arno, Mathematics of Computation 68 (1999), no. 225, 351–369.

[18] David H. Bailey, Integral relation detection, Communications in Science and Engineering, Top 10 Algorithms of the Century: 24–28, January/February 2000.

[19] Simon Plouffe, David H. Bailey, and Peter B. Borwein, On the rapid computation of various polylogarithmic constants, Mathematics of Computation 66 (1997), no. 218, 903–913.