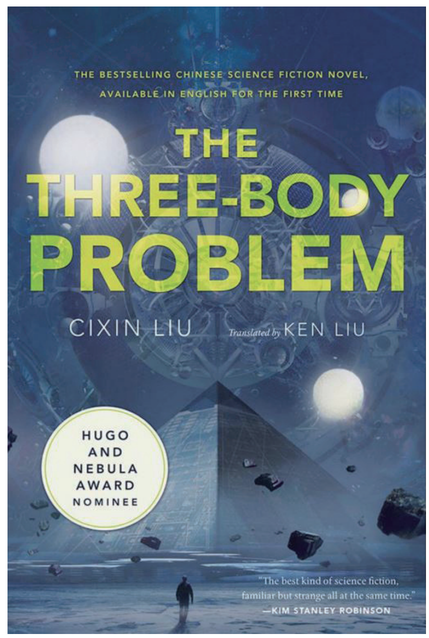
降维攻击

万精油

前一阵的一大新闻是中国科幻作家刘慈欣的科幻小说《三体》获得2015年雨果奖。雨果奖是由国际科幻协会颁发的科幻成就奖，被普遍认为是科幻界的诺贝尔奖，目前已颁发了63届。但到刘慈欣获奖以前，不仅是中国，整个亚洲还没人得过这个奖。刘慈欣是第一人，所以应该算是一个大新闻。



在小说《三体》中，刘慈欣引进了一个降维攻击的概念，用低维的方式向高维攻击。通过低维空间解决高维空间的问题是数学家常用的手段。刘慈欣加上科幻的内容后有了新意，很能抓眼球，所以我们借用了这个概念来做本期的题目，主要是想介绍数学上通过把高维的东西映射到低维来解决的一些手法和例子。

讲数学以前先讲一个笑话。百度网站有许多贴吧，各种群体、各种话题都有自己的贴吧。比如军事吧、足球吧、围棋吧，或者成都吧、深圳吧等等。《三体》迷们想建立自己的贴吧。可惜，“三体吧”这个名字被北京第三体育学校的校友们占了。如果是个人，名字被占了或许就在名字后加一个后缀之类的另起一个名字就算了。可是《三体》迷们不肯将就，一定要把“三体吧”这个名字夺回来。于是一大堆《三体》迷空降到原本属于北京第三体育学校的“三体吧”。如果在现实生活中打架，《三体》迷们肯定不是体育学校学生的对手。但是，在网上拼杀，从三维世界降到二维的荧光屏上，体校的学生就不是他们的对手了。很快贴吧里的各种话题都以小说《三体》为主，原来的体校学生基

本上插不上话，据说现在已经完全被《三体》迷们占领。用成语来说这就叫鸠占鹊巢。用《三体》的语言来说，这就叫降维攻击。

回头再来讲数学。高维空间，甚至像希尔伯特空间那样的无穷维空间都是数学里经常出现的研究对象。许多抽象定理（比如矩阵中的定理）都普适于任意维数 N。但是，有时我们需要研究具体问题。因为我们是三维动物，三维以上的东西很难视化（作图有困难），理解起来有难度。于是，我们就通过一些手法把高维的东西映射到低维来，在不影响所研究的问题在高维空间中的性质的时候，这种映射就把原来的问题直观化了。庞加莱映射就是这样一种手法，我们这里就来介绍一下。

动力体系（Dynamical Systems）是数学的一个分支，主要研究一个满足某种条件的系统随着时间推进时的各种状态。时间有时可以离散，所以，也可以是一个非连续的离散系统。

图 1 是著名的洛伦兹吸引子。它产生于数学家（气象学家）爱德华 • 洛伦兹（Edward Lorenz）研究的一个微分方程动力系统（现在被称为洛伦兹系统）。这个系统在一定的参数下有混沌的特性，两个相近的点经过一段时间后会分隔得很远，“洛伦兹蝴蝶”因此而得名。后来被夸张到世面上流行的说法：北京一个蝴蝶抖一下翅膀，有可能会引起美国加州的大风暴。

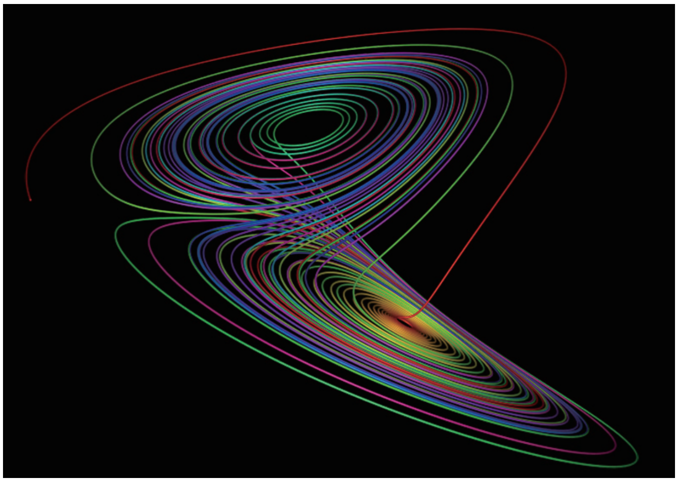


图 1　洛伦兹吸引子

其它一些微分方程系统与此类似，甚至更复杂。在这样的系统中，一个点的轨迹错综复杂，研究起来不是很直观。于是人们想到一个比较直观的办法，只跟踪这些轨迹在一个平面上的映射。如图 2。不管点 X 在平面 S 以外的轨迹，只管下一次这个轨迹与平面 S 相交的点（图中的 $P(x)$）。注意，虽说是不管平面 S 以外的轨迹，计算还是需要的（或者说解微分方程），否则怎么能知道 $P(x)$ 在哪里。只不过我们只记录 x 与 $P(x)$，略去了不必要的枝节，保持了本质的东西。这样一来，一个微分方程系统从视角上来说就变成了平面 S 上的一个离散变换。通过这个离散变换的一些特性我们可以推出原来的系统的一些特性。比如图 3。

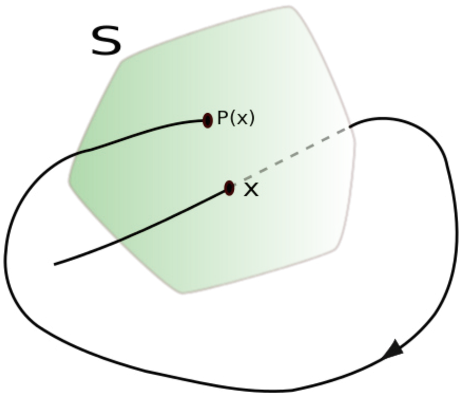


图 2　庞加莱映射

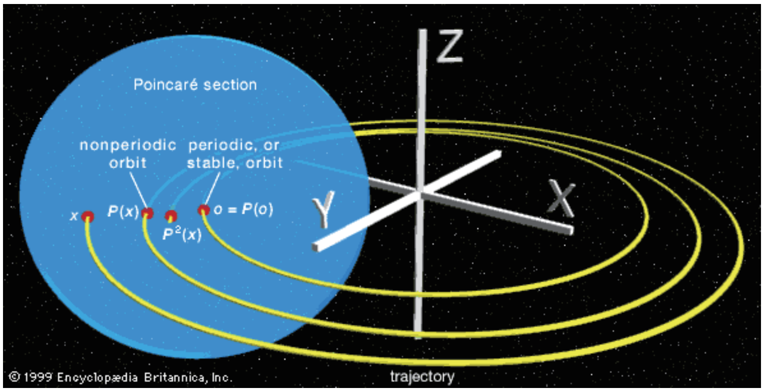


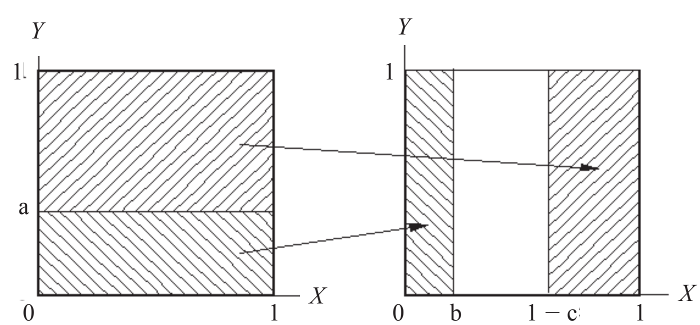
图 3 周期性与稳定性的研究

如果一个点绕一圈（或者几圈）后回到原来的地方，我们知道这个轨迹是一个有周期的轨迹。如果两个相邻的点绕一圈后离得更远，那么我们知道其中一个点在另一个点的不稳定方向上面。反之，如果两个相邻的点绕一圈后离得更近，那么我们知道其中一个点在另一个点的稳定方向上面。

这种方法在天文学上也很有用。比如我们研究某个星球的轨迹，就只需记录它在某个截面上的踪迹即可。记录月亮轨迹时，一般用它在垂直于黄道的平面上的截点。这些都是庞加莱映射的应用。

洛伦兹当年研究那个蝴蝶吸引子的时候用的是另外一种降维法。他研究从一个制高点（一个圈中 Z 最大的）到下一个制高点的映射。总之，把维数降低以后就更有助于研究。注意，这个维数也不可以随便乱降，一定要保证所研究的性质在降维以后没有本质变化（比如上面提到的周期性以及稳定性）。否则，如果性质改变了，降维以后的结果就不能返回原来想研究的高维系统。

在保证研究性质不变的时候，有些时候可以降更多维。比如把一个二维映射简化到一些离散区域之间的映射，比如图4. Baker's 映射。研究这些区域之间的映射就变成了一个离散问题。



$$S_{\text{Baker}}(x,y)=\begin{cases}(2x,y/2), & \text{for } 0\le x<\frac{1}{2}\\ (2x-1,1-y/2), & \text{for } \frac{1}{2}\le x<1\end{cases}$$

图 4 Baker's 映射

动力体系中很多问题都可转换成离散问题来研究，以至于有特别的分支来研究这种问题。有限类型子交换（Subshift of finite type ）就是这样的学科。上期的题目，实际上就是满足某种条件的子交换。这期的文章算是对这个题目的背景介绍。