



万圣节时说点与鬼神有关的数学

蒋迅 王淑红

万圣节 (Halloween), 又称鬼节, 为每年的 10 月 31 日。一年一度的万圣节又将如期而至, 作为数学人, 仿佛只有在节庆中品出数学的味道才会有某种存在感和满足感。乘兴漫步数学花园, 竟然有幸拾得几个与鬼神多少有关的数学掌故, 聊以心慰, 且与诸君共享, 比如吸血鬼数、康托尔函数、骨骼、大魔群、小魔群、魔群李代数、魔群月光猜想、纳皮尔之骨、阿涅西箕舌线、兽名数目、超自然数、蛛网图和墓碑等。看到上述魔鬼色彩的数学, 你是否能感受到数学无处不在, 数学的魔力非比寻常呢? 许多学生很清楚数学的魔法无边, 却畏惧其所谓的艰深而踌躇不前。如果全社会营造出一些数学的话题, 相信数学就不再是一条畏途。一些博客、论坛、科普正在担当着这样的角色。德国儿童文学作家思岑斯伯格 (Hans Magnus Enzensberger, 1929-) 在 68 岁高龄出版力作《数字魔鬼》¹, 目的就是为了解除少年儿童学习数学的恐惧。

魔鬼不仅有凶神恶煞之义, 还可以形容鬼斧神工的艺术、严格的训练、完美的身材以及杰出的艺术家。唐代浪漫主义诗人李贺虽在 26 岁英年早逝, 但因其诗歌具有波谲云诡、迷离惆怅的鬼魅风韵, 素有“诗鬼”之称。西方有很多关于魔鬼的传说, 比如《圣经》中的恶鬼, 别名撒旦, 传说原为天使, 因犯罪被打入地狱, 从此专与上帝作对, 成了诱人犯罪的恶鬼。在中国也有驱除鬼怪的传统, “千门万户曈曈日, 总把新桃换旧符”描写的就是人们在新年用门符来“驱邪”和躲避瘟疫。对于中国人, 最熟悉的鬼故事大概就是清代著名小说家蒲松龄的《聊斋志异》了。但是中国古代科举考试把数学打入了冷宫, 我们不但未能看到像西方那样的现代数学, 也未能出现这类聊斋味道的趣味数学。如果大家有兴致, 就让我们用上面有点鬼魅色彩的数学掌故来做背景和道具, 演绎一部万圣节的数学聊斋吧。

¹ (德) 思岑斯伯格著, 朱显亮译, 数字魔鬼, 北京: 人民文学出版社, 2008.



1. 吸血鬼数 (vampire number)



恐怖片里有吸血鬼，数学上有一种数以吸血鬼命名。吸血鬼 (vampire) 是传说中的超自然生物，通过饮用人类或其他生物的血液，能够令自身长久生存下去。在以吸血鬼小说出身及闻名的美国作家安妮·莱斯 (Anne Rice, 1941-) 的笔下，吸血鬼在很多方面都与人类相似，但是却隐秘地生活着。吸血鬼数就是对这一特点的一种数学刻画。吸血鬼数是傅利曼数 (Friedman number) 的一种。傅利曼数是在给定的进制制中，能够用组成数字通过四则运算、括号和幂组成式子，结果是自己的数，例如 347 是一个傅利曼数，因为 $347 = 7^3 + 4$ 。吸血鬼数则限制运算为乘法，它是从合数 v 开始，该合数为 n 位数 (且 n 为偶数)，然后用 v 的各个数字组成两个 $n/2$ 位数的正整数 x 和 y (x 和 y 不能同时以 0 为个位数)，若 x 和 y 的积刚好就是 v ，那么 v 就是吸血鬼数，而 x 和 y 则称为尖牙 (fangs)²。

例如 1260 是吸血鬼数，21 和 60 是其尖牙，因为 $21 \times 60 = 1260$ 。可是 $126000 = 210 \times 600$ 却不是吸血鬼数，因为不存在符合“吸血鬼数”定义的乘法分解。又例如 1023 是 31 和 33 的积，但 31 和 33 并没有用到原数的所有数字 (例如 0)，易见 1023 不是吸血鬼数。

吸血鬼数是由柯利弗德·皮寇弗 (Clifford Alan Pickover) 于 1994 年在 Usenet 社群 sci.math 的文章中首度提出的。后来他将吸血鬼数写入“Keys to Infinity”³ 一书的第 30 章。最初的几个吸血鬼数为：

1260, 1395, 1435, 1530, 1827, 2187, 6880,
102510, 104260, 105210, 105264, 105750, 108135,
110758, 115672, 116725, 117067, 118440, ……

一个吸血鬼数可以有多对尖牙，例如

$$125460 = 204 \times 615 = 246 \times 510$$

$$13078260 = 1620 \times 8073 = 1863 \times 7020 \\ = 2070 \times 6318$$

$$16758243290880 = 1982736 \times 8452080 \\ = 2123856 \times 7890480 = 2751840 \times 6089832 \\ = 2817360 \times 5948208$$

伪吸血鬼数和一般吸血鬼数不同之处在于其尖牙不强制是 $n/2$ 位数的数，故伪吸血鬼数的位数可以是奇数。把这样的数称为弱吸血鬼数可能更合适。



柯利弗德·皮寇弗 (1957-)

² E. W. Weisstein, Vampire Numbers, MathWorld.

³ C. A. Pickover, Keys to Infinity, New York: Wiley, 1995.

2002年，卡洛斯·里维拉（Carlos Rivera）定义了质吸血鬼数（prime vampire number），亦即尖牙是质因子的吸血鬼数，第一个质吸血鬼数是 $117067 = 167 \times 701$ 。第二到第五个质吸血鬼数是：124483, 146137, 371893, 536539。

皮寇弗是 IBM 沃森研究院的生化学家，也是一位作家和编辑，经常在数学和科幻方面写科普文章，至今有超过 30 本关于电脑与创意、艺术、数学、黑洞、人类行为和智慧、时间旅行的书。除了吸血鬼数，他还定义阶乘数（factorion）、杂耍数列（juggler sequence）等许多概念。吸血鬼数悄悄地隐身于我们的庞大数学系统之中，但至今仍然有许多没有被发现。原来吸血鬼数、尖牙这些名称只是名字有些可怕和触目惊心，看来发明者取这样的名字只是为说明它们的内涵，表达一种神奇吧。

2. 恶魔楼梯 (devil's staircase)



函数是数学中的一个重要名词，从中学开始便进入我们的视线，但不同的时期不同的科目里对它的定义形式也不同。有一种连续函数叫康托尔函数（Cantor function），又被称为恶魔楼梯。为什么撮此恶名呢？原来这个函数的图像看似陡峭，但是它的导数却几乎处处为零。这就是说，它的图像几乎处处是平稳的，但是它又实现了大幅度变化。谁要是从这样的楼梯下楼，一定有下地狱的感觉。如果配上利盖蒂·捷尔吉·山多尔（Ligeti György Sándor, 1923-2006）的钢琴第 13 练习曲“恶魔楼梯”（The devil's staircase）一起听，更是觉得脚下一步一颤。特别是最后结尾处，音箱的回音让人感觉到身临其境。下面让我们来感受一下恶魔是如何施展法力的吧。

首先，我们定义康托尔集⁴ C ：

将基本区间 $[0, 1]$ 用分点 $1/3, 2/3$ 三等分， $n=1$
 并除去中间的开区间 $(1/3, 2/3)$ ，把余下的 $n=2$
 两个闭区间各三等分，并除去中间的开区间 $n=3$
 $(1/9, 2/9), (7/9, 8/9)$ 。然后再将余下的四个闭区间用同样的方法处理。

把这样的步骤继续进行下去，我们得到了一个由无穷多开区间组成的开集 $G = (1/3, 2/3) \cup (1/3^2, 2/3^2) \cup (7/3^2, 8/3^2) \cup (1/3^3, 2/3^3) \cup (7/3^3, 8/3^3) \cup (19/3^3, 20/3^3) \cup (25/3^3, 26/3^3) \cup \dots$ 。康托尔集为其余集： $C = [0, 1] - G$ 。

下面，我们在 $[0, 1]$ 区间上定义康托尔函数：

引进 $[0, 1]$ 中小数的三进制表示来考察，例如 $1/3(10) = 0.1(3)$ （括号中的数表示进制）， $2/3(10) = 0.2(3)$ ， $1/9(10) = 0.01(3)$ ， $2/9(10) = 0.02(3)$ ， $7/9(10) = 0.21(3)$ ， $8/9(10) = 0.22(3)$ ，但是 $1/3$ 又可表示成 $0.02222\dots(3)$ ，这里约定用无限表示。基于此可以发现， $(1/3, 2/3)$ 区间中的数用三进制表示时，第一个不为 0 的数一定是 1。归纳可证，

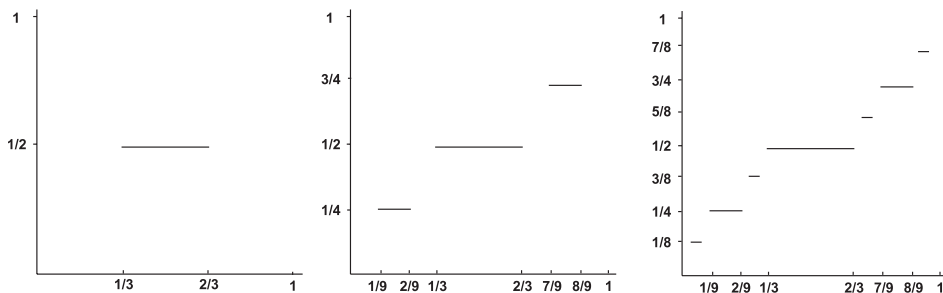
⁴ J. Miller, Earliest Uses of Symbols of Set Theory and Logic, 2007.

G 中的点, 表示成三进制时, 必有一位为 1, 而 $C = \{0.x_1x_2x_3\cdots(3): \text{每个 } x_i \text{ 为 } 0 \text{ 或 } 2\}$ 。

现在定义函数 $f: C \rightarrow [0, 1]$, 对 C 中任意一点 x , 将 x 用三进制表示: $x = 0.x_1x_2x_3\cdots(3)$ 。令 $y_i = x_i/2$, 则定义 $f(x) = 0.y_1y_2y_3\cdots(2)$

则对 G 中区间的端点, 函数值相等。如 $f(1/3) = f(0.02222\cdots(3)) = 0.01111(2) = 0.1(2)$, $f(2/3) = f(0.2(3)) = 0.1(2) = f(1/3)$ 。其他区间端点同样可得。

将 f 的定义域扩展到 $[0, 1]$, 使 G 中区间里的所有点的值定义为端点的值。由于 C 中没有孤立点, 且 f 在 C 上是单调的, 这样 $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, 是连续的。这个函数在 $[0, 1] \setminus C$ 上是可导的, 且导数恒等于 0。而 C 的测度为零, 所以康托尔函数的导数在 $[0, 1]$ 上几乎处处为零。



如果读者感觉康托尔集和康托尔函数的定义稍微复杂一点, 可以看看康托尔函数前三步的图示(如下图), 就会对这个恶魔的楼梯有一个直观的体验。

《中国证券报》在 2011 年曾刊登过一篇股市分析文章⁵, 作者观察到, 从图形线条上升的表面来看, 股市中某些股票的分时图形和恶魔的楼梯图形相似, 说如果发现了这样的分时图形, 对于投资者的即时投资决策将起到很好的作用, 可以快速获得最佳的短线收益。作者建议一旦具有恶魔的楼梯分时放量图形出现, 投资者可据此做出投资决策。信不信只能由读者判断。也曾有人连续杀人作案, 竟然是按恶魔楼梯的公式进行的。一个人把数学用到穷凶极恶的地步, 很可悲, 也不是数学的本意。侦探们学好数学可能会对断案有所裨益。

康托尔函数不是唯一的恶魔楼梯。闵科夫斯基问号函数(Minkowski question mark function)号称光滑恶魔楼梯, 柯尔莫哥洛夫的圆映射(Kolmogorov's circle map)由阿诺尔德之舌(Arnold tongues)而得。更多的魔鬼楼梯还在等待读者们去寻找。

3. 骨骼和骷髅 (skeleton)



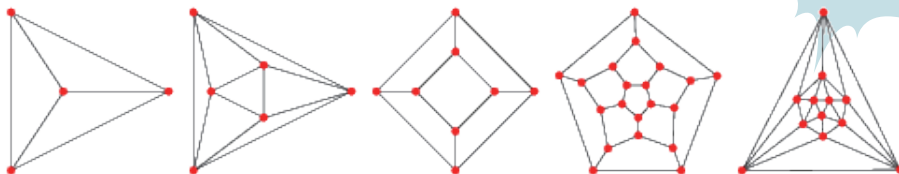
骨骼和骷髅在英语里是同一个词 skeleton。谈到骷髅, 会使人不觉联想到武侠大师

⁵ 依据“恶魔的楼梯”短炒 <http://stock.hexun.com/2011-09-12/133305824.html>

金庸的《射雕英雄传》1983年版电视剧里的梅超风，她似乎一度成了厉鬼、恶魔的代名词。直到舞蹈家杨丽萍2003年版的梅超风面世，重在刻画其灵魂和精神，同时也没有淡化和美化其邪恶，将有害于身心健康的血腥暴力升华为一种悲剧美，才慢慢削弱了她的恶魔印象。

数学里用到骨骼和骷髅的地方不止一个。

在代数拓扑中，把一个 p -骨骼⁶ 定义为复形 k 的一个单纯子复形 (simplicial subcomplex)，即 k 的所有维数至多是 p 的单形 (simplices) 的集合，记作 $k^{(p)}$ 。



把一个多面体的面以其边和顶点代替，得到的图形就是多面体的 0-骨骼或 1-骨骼。上面的图形就是对应柏拉图立体 (platonic solids) 骨骼的多面体图形。有 $n(n = 4, 5, 6, \dots)$ 个顶点的不同胚的骨骼数量 $N(n)$ 为 1, 2, 7, 18, 52, ... 这是 Sloane 得到的结果。

“ β -skeleton” 是一个比较新的数学概念，1985年才被提出。在这里，我们把它翻译成“ β -骨骼”。这个名字来自于形态分析中的拓扑骨骼 (topological skeleton)。这个概念更接近于人体骨骼的概念。

在计算几何和几何图论里， β -骨骼是一个在欧氏平面上由一个点集形成的无向图。具体地，设 β 为一个正实数。由 β 定义角 θ 如下：

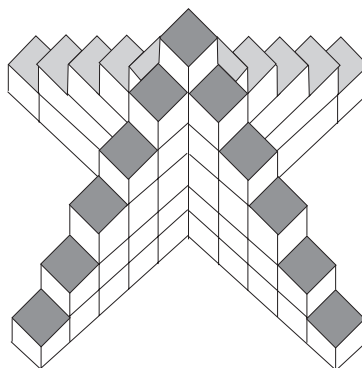
$$\theta = \begin{cases} \sin^{-1} \frac{1}{\beta}, & \text{if } \beta \geq 1 \\ \pi - \sin^{-1} \beta, & \text{if } \beta \leq 1 \end{cases}$$

给定平面上的两个点 p 和 q ，设 R_{pq} 为平面上所有使得 $\angle prq > \theta$ 的点集。这个点集叫做 p 和 q 的禁区 (forbidden region)。再假定 S 是平面上的一个点集，其中 p 和 q 是 S 中的两个点。

如果 R_{pq} 中不含有 S 的其他点，那么线段 pq 就在 S 的 β -骨骼中。上图是两个由 100 个随机产生的点所成集合 S 产生的 β -骨骼。粗实线是当 $\beta = 1.1$ 时的 β -骨骼，虚线则代表当 $\beta = 0.9$ 时的 β -骨骼。关于 β -骨骼，目前有很多研究，还有不少没有解决的数学猜想。

上面的两个例子对一般读者可能太深了。骷髅塔 (skeleton tower) 是一个初等数学的例子。

如图，骷髅塔是由若干方砖组成。其实它的样子并不是很恐怖，跟骨骼和骷髅也不相像。它的原型是海岸线上的铁架灯塔。一个典型的问题是，当塔层数为 n 时，问需要多少方砖。这是一个锻炼学生观察总结模式的题目，在美国中学里用的很多。我们也可以把骷髅塔做一些变异，比如金字塔等。



⁶ <http://mathworld.wolfram.com/Skeleton.html>