

## 张家山汉简《算数书》“圆材”三题

吴朝阳 晋文

张家山汉简《算数书》与“圆材”相关的共有“圆材”、“以圆材方”、“以方材圆”三个算题。“圆材”算题因为出土原简字迹难辨之处太多，造成原释文中有许多缺文，至今没有令人满意的释读，而“以圆材方”及“以方材圆”二题，则因为题中的公式与单纯的数学公式不一致，导致学者们意见纷纭、莫衷一是。本文首先将“圆材”原简字迹难辨处加以处理，从中得到关键线索，并考证出正确的释读。对“以圆材方”及“以方材圆”两个算题，我们则根据上古数学水平、算题的应用实际性质以及《算数书》中的例证展开论证，从而得到正确的释读。



### 一 “圆材”

张家山汉简《算数书》的“圆材”题共含 156、158 号两支简，张家山二四七号汉墓竹简整理小组的释文为：

圆（圆）材 有圆材一（？），断之口口市口口口口口口口口大几何？曰：七（？）十（？）六（？）口口四寸半寸。述（术）曰：口自乘，以（156）入二寸益之，即大数已<sup>1</sup>。（158）

由于很多文字无法释读，本题诸家均无法读通<sup>2</sup>。笔者对原简图版进行一定程度的技术处理，使一些关键字得以读出，部分图版处理结果如下<sup>3</sup>：

从图 1 可知，“圆材”之后还有余地，并有墨迹，因此，原释文“一”字可取。从图 2 可以看到，原释文“断之口口市”是成问题的，对比“断”字的隶书写法可以发现，此段竹简的第一个字左上有二小“口”字形，其形比“断”之小“口”明显要大，而其下既没有“断”字那么多笔划的墨迹，最左侧并无“断”字之“L”形之残墨，空间也不足以容纳“断”字的左下部。因此这个字不是“断”字，而应该是“斲”字。综合字迹及图 2 其他简文可以发现此字确为“斲”字，而此段简文为“斲之入二寸”。

“斲”与“断”一字之差，关系到全题的理解与释读。岳麓书院藏秦简《数》书以及《九章算术·勾股》都有“斲圆材”的算题，其文援引如下：

[今]有圆材斲[埋]地，不智[知]小大，斲之，入材一寸而得平一尺，问材周大几（可）[何]？即曰：半平得五寸，令相乘也，以深一寸为法，如法得一寸。有[又]以深益之，即材径也<sup>4</sup>。

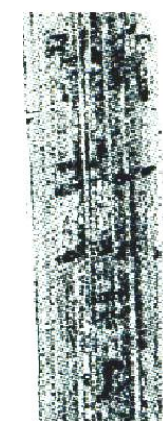


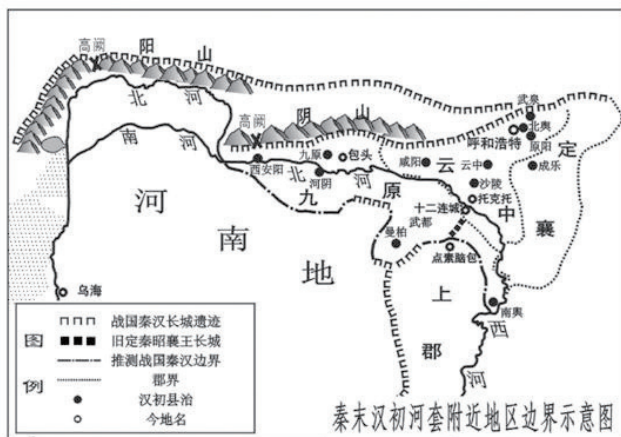
图 1：有圆材一 图 2：斲之入二寸 图 3：平尺四寸 图 4：曰大二尺有 图 5：六寸半寸

<sup>1</sup> 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第153页。按：整理小组误将157号简归入此题，为简化讨论，此处径略去此简。

<sup>2</sup> 参见：彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第113页；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期。

<sup>3</sup> 原图片参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：前揭书，第96页156号简。

<sup>4</sup> 简文转引自：肖灿、朱汉民：《岳麓书院藏秦简〈数〉的主要内容及历史价值》，《中国史研究》，2009年第3期。



今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？答曰：材径二尺六寸。术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径<sup>5</sup>。

张家山汉简《算数书》本算题所论是“圆材”，简文有“斲之入二寸”句，并且“而得”、“问口大几何”、“寸自乘”、以及“入二寸益之”都可以明确释读，在简文中又都处于合适的位置。因此，对比以引岳麓秦简《数》及《九章算术》中的算题，本题毫无疑问是一个同类的“斲圆材”算题。因此，算题中无法确认的文字可以借助这两则算题的行文方式来做判断。

图3所示竹筒片段第一字无法辨认，第二字的位置依上下文及墨迹形状应是“尺”字，第三字据文义是一个数字，依墨迹形状判断应为“六”或者“四”字，而最后一字依文义及残墨则可以肯定为“寸”字。此段竹筒之前有“而得”二字，其中“而”字可辨，“得”字依上下文可以断定。对照岳麓书院藏秦简《数》书相应内容，可以判断此四字为“平尺四寸”或“平尺六寸”。

图4、图5两部分，原释文为“曰七(?)十(?)六(?)”及“口口四寸半寸”。据图5，“寸半寸”可辨，而前一字依残墨判断，或者如原释文是“四”字，或者是“六”字。图4除“曰”字外均不可辨，但依上下文知其为“曰大口尺口”。考虑图5简文是“口寸半寸”，而“尺”后面的字残墨之迹与“有”近似，故依行文此字应为“有[又]”字。至此，据计算可知，此答数为“二尺有六寸半寸”，而图3则为“平尺四寸”。

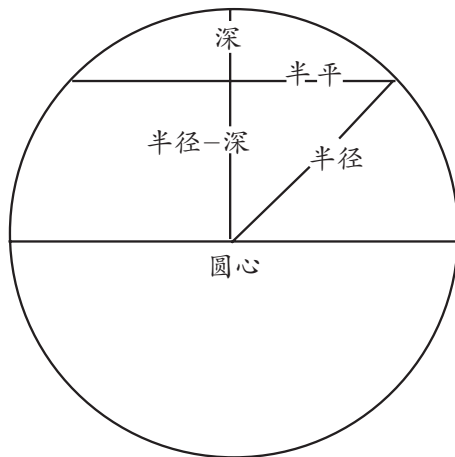
<sup>5</sup> 参见：李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第695-697页。

对照上引岳麓秦简“术”的行文，可知158号简脱漏“为法，又以入二寸”七个字。因为“入二寸”在我们复原的简文中出现两次，所以这一脱误的原因是明显的：它是因为简文上下有两处“入二寸”，抄写者不慎相涉而产生脱误。至此，我们得到复原的简文如下：

圆材 有圆【材】一，斲之入二寸，而得【平尺四】寸，问【材】大几何？曰：大【二尺有六】寸半寸。术【术】曰：【七】寸自乘，以（156）

入二寸【为法，又以入二寸】益之，即大数已。（158）

此处，158简中的“大”即问题中的“材大”，“大数”即为圆材直径之尺寸数。《九章算术》将此类算题归入“勾股”章，其计算公式由勾股定理推导而得，其推导过程如下：



如上图，（半径-深）、半平、半径构成直角三角形，据勾股定理得：

$$(\text{半径}-\text{深}) \times (\text{半径}-\text{深}) + \text{半平} \times \text{半平} = \text{半径} \times \text{半径}$$

展开、化简，得：

$$2 \text{深} \times \text{半径} = \text{半平} \times \text{半平} + \text{深} \times \text{深}$$

因此，

$$\text{直径} = \text{半平} \times \text{半平} / \text{深} + \text{深}$$

本题、上引岳麓秦简、《九章算术》三者算法的叙述方式相互均有所不同，但它们都是以上这个公式。按照这个公式，本题的计算如下：

$$\text{圆材的直径} = \frac{7 \times 7}{2} + 2 = 26 \frac{1}{2}。$$

## 二 “以畧材方”

张家山汉简《算数书》“以畧材方”及“以方材畧”两个算题，由于其“术”提供的公式不同于从数学出发而推得的所谓正确的公式，因而历来研究者要么认为其公式有误，要么认为其数据有误<sup>6</sup>。然而事实并非如此，我们将证明：这两个算题中的公式不是纯数学公式，它们是根据生产实际，测算以圆形木材制造的方形材大小的应用公式。本小节先讨论“以畧材方”算题，其简文如下：

以畧材方 以圆材为方材，曰：大四韦[围]二寸廿五分寸十四，为方材几何？曰：方七寸五分寸三。术曰：因而五之为实，令七而一，四（153）

【而】一即成<sup>7</sup>。（157）

原释文“以畧材方”只有153号简，此算法，即“术”文显然是不完整的，苏意雯等、段耀勇及邹大海、以及日本张家山《算数书》研究会诸专家认为应补以“而一”<sup>8</sup>二字。这种校补句法通顺而又与答案相符，文义完整而合理。然而据图版<sup>9</sup>可知，本题竹简即153号简，其简文至“四”字已抵竹简下端编线，可见此处“术”不是缺文，而是缺少后续的一支竹简。153号简出土编号为H103，而157号简的出土编号为H102，二简出土编号既相连，而出土位置也确实相邻。由于157号简的全部简文为“一即成”，内容与153号简内容相接。而如上节所论，157号简不属于“畧材”题，因此我们确定157号简是153号的续简，两简简文之间误脱一个“而”字。所以，我们将157号简列于此简之后，并以脱误例校补“【而】”字。

简文中“韦”借为“围”，古以“径尺为围”，这里的“围”实际上等于“尺”。因此“大四围二寸廿五分寸十四”的意思是“圆材”周长为 $42\frac{14}{25}$ 寸。据“术”文计算，“方材”的边长为： $42\frac{14}{25} \times 5 \div 7 \div 4 = \frac{38}{5} = 7\frac{3}{5}$ ，正与答案相符。因此，我们认为本题算法与答案的简文都没有问题。上引诸家中彭浩、郭世荣、郭书春认为本题有误，并各以己意解读、校改，我们与段耀勇、邹大海一样，认为他们都不正确。

本题之前《算数书》的所有60个算题中，虽然存在一定数量的脱文、衍文以及传抄错误，但是由于错误的“术”而产生错误答案的仅有“妇织”一个算题，而“妇织”问题性质上属于“趣味数学”而非“实用数学”<sup>10</sup>。也就是说，《算数书》中的实用算题的算法都是正确的。因此，从统计的角度看，本题的“术”也就很不可能是错误的。



而本题的“术”文算法与答案相符，而且对应于本题的“四而一”，后文所论“以方材畧”题中的算法中也相应地是“因而四之”。可见，本题的“术”文及答案肯定都没有问题。

古人“圆用规，方用矩”，因此圆内接正方形与圆的关系古人显然是清楚的，上引“畧材”则证明勾股定理在秦代也是人所熟知的知识，而从张家山汉简《算数书》的“方田”题及《九章算术》可知：古人在对形如 $N = a^2 + r$ 的自然数开平方时，常用 $\sqrt{N} \approx a + \frac{r}{2a+1}$ 为近似公式<sup>11</sup>。

<sup>6</sup> 参见彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第110-111页；苏意雯、苏俊鸿、苏惠玉等：《〈算数书〉校勘》，台湾师大《HPM通讯》第三卷，2000年第10期；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期。段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以畧材方”、“以方材畧”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期；日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第12-13页。  
<sup>7</sup> 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简〔二四七号墓〕（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第152、153页。按：释文据我们所批评的错误理解为基础而校改，此只引原简文。

<sup>8</sup> 参见前注所引诸文，为避繁琐，此后引以上诸文从略。

<sup>9</sup> 本简图版见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简〔二四七号墓〕》，文物出版社，2001年11月，第95页；出土位置编号及位置图见第318及322页。

<sup>10</sup> 参见彭浩：前揭书。

<sup>11</sup> 参见彭浩：前揭书，第125页注2；李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第388页。