

# 希尔伯特与广义相对论场方程

卢昌海

## 一. 引言

众所周知，二十世纪最著名的物理学家是爱因斯坦（Albert Einstein, 1879-1955），爱因斯坦最著名的成就是广义相对论。关于广义相对论的提出，爱因斯坦的晚年合作者、波兰物理学家英菲尔德（Leopold Infeld, 1898-1968）在《爱因斯坦：他的工作及对世界的影响》（Albert Einstein: His Work and Its Influence on Our World）一书中曾经记述过一段有趣的对话：

……我曾对爱因斯坦说：“无论您是否提出，我相信狭义相对论的问世都不会有什么延误，因为时机已经成熟了。”爱因斯坦回答说：“是的，这没错，但广义相对论的情形不是这样，我怀疑直到现在也未必会有人提出。”

英菲尔德并且评论说，这一回答很好地表述了爱因斯坦在广义相对论发展史上所扮演的角色。

确实，在二十世纪前二十五年所发生的那场影响深远的物理学革命中，狭义相对论、广义相对论和量子力学这三大理论的提出可谓各有特色：狭义相对论是水到渠成、瓜熟蒂落，量子力学则是群雄并起、共襄盛举——这两者虽很不相同，但似乎都是“离了谁地球照样转”。唯有广义相对论，几乎是爱因斯坦“一个人的战斗”，是没有爱因斯坦就没有广义相对论。这一点不仅有爱因斯坦本人与英菲尔德的上述对话作脚注，也是很多其他物理学家的共同看法。比如著名美国物理学家奥本海默（J. Robert Oppenheimer, 1904-1967）在为纪念爱因斯坦逝世十周年而撰写，后被收录于爱因斯坦诞辰 100 周年纪念文集《爱因斯坦——世纪文集》（Einstein: A Centenary Volume）的题为“论爱因斯坦”（On Albert Einstein）的文章中，就写过一段与英菲尔德的回忆有异曲同工之意的文字：

量子的发现必定会以这种或那种的方式出现……对没有任何信号能运动得比光更快的含义的深刻理解也必定会出现……直到今天仍未被实验很好证实的广义相对论则除他以外，在很长很长时间内都不会有人能提出。

《爱因斯坦——世纪文集》的主编、以编写物理教材而知名的美国麻省理工学院（MIT）物理学教授弗伦奇

（Anthony French, 1920-）也在为该文集撰写的题为“广义相对论的故事”（The Story of General Relativity）的文章中“英雄所见略同”地写道：

有人曾经评论过，在 1905 年之前……狭义相对论已经呼之欲出了，如果爱因斯坦没有将之透彻化，用不了多久其他人也会做到。无论这是否正确，可以确定的是：在创立广义相对论时爱因斯坦迈出了自己独一无二的一步。没有他的引路，这一步也许几十年都不会有人迈出。

这样一场“一个人的战斗”从历史考究的角度看，照说是不该有什么悬疑的，其实却不然。在广义相对论的历史考究中除了探讨爱因斯坦的“心路历程”外，还有一个颇有争议性的话题，那便是究竟谁最先提出了广义相对论场方程？这个争议性话题就是本文的主题，它的主角有两位：一位当然是爱因斯坦，另一位则是德国数学家希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）。

## 二. 希尔伯特对物理学的兴趣

希尔伯特是二十世纪最著名的数学家之一，也是“数学圣地”哥廷根（Göttingen）的灵魂人物之一，不仅研究领域



爱因斯坦（左）和希尔伯特



希尔伯特（前右）和学生哈尔（后左一，Alfréd Haar，离散小波创始人），儿子 Franz Hilbert（后左二），朋友、合作者闵科夫斯基（前左，Hermann Minkowski），夫人 Käthe Hilbert（前中），学生 Ernst Hellinger（后右一）

极为宽广，研究成果也极为丰硕。单就以他名字命名的数学名词而论，就有不下一打，比如希尔伯特基（Hilbert basis）、希尔伯特特征函数（Hilbert's characteristic function）、希尔伯特立方（Hilbert cube）、希尔伯特矩阵（Hilbert matrix）、希尔伯特模形式（Hilbert modular form）、希尔伯特函数（Hilbert function）、希尔伯特多项式（Hilbert polynomial）、希尔伯特概型（Hilbert scheme）、希尔伯特空间（Hilbert space）、希尔伯特变换（Hilbert transform）、希尔伯特不变积分（Hilbert invariant integral）等等，以及——最后但对本文来说绝非最不重要的——爱因斯坦—希尔伯特作用量（Einstein-Hilbert action）。

对于很多数学家来说，名字能出现在一个数学名词中就已足是难得的荣誉了，但对希尔伯特来说，那一打以上的数学名词加在一起，也还只是勾勒出了他研究工作中偏于“战术性”的那部分，而未能包括很多视野更宏大的“战略性”研究——比如对几何基础及数学基础的研究。不仅如此，作为数学家的希尔伯特的研究领域甚至不是数学所能涵盖的，因为除数学外，他对物理学也怀有浓厚的兴趣并从事过研究。

早在1900年发表的著名演讲“数学问题”（Mathematische Probleme）中，希尔伯特就把物理学的公理化列为了问题之一（即希尔伯特第六问题）。这个貌似泛泛的问题并非是为了让他的演讲看起来包罗万象而随意引入的，而确实实是代表了希尔伯特所看重并感兴趣的一个方向。希尔伯特后来的学术轨迹在很大程度上印证了这一点：自1902年起，他开始讲授物理学；自1912年起，他设立了物理学助手职位，并招收指导了从事理论物理研究的学生；1913年，他组织了所谓的“哥廷根周”（Göttinger Gastwoche）活动，邀请普朗克（Max Planck, 1858-1947）、德拜（Peter Debye, 1884-1966）、能斯特（Walther Nernst, 1864-1941）、

索末菲（Arnold Sommerfeld, 1868-1951）、洛仑兹（Hendrik Lorentz, 1853-1928）等众多第一流的物理学家来做报告，介绍了包括气体运动理论及兴起中的量子论在内的诸多课题。1914年，他邀请物理学家德拜开设了有关物质结构的讲座。

在希尔伯特对物理学的兴趣中，公理化思想是一个很重要的方面，不仅他本人深为重视，受他影响，一些其他数学家也对物理学的公理化展开了研究。比如在哥廷根大学（University of Göttingen）就读过的希腊数学家卡拉西奥多里（Constantin Carathéodory, 1873-1950）在热力学的公理化方面就做了重要工作。除公理化思想外，极小值原理（minimal principle）也极受希尔伯特的器重。极小值原理在物理学上的具体应用有着各种不同形式，那些形式大都为希尔伯特所熟悉。比如在讲授力学时，他曾经使用过高斯最小约束原理（Gauss' principle of least constraint）；在我们将要介绍的有关引力理论的研究中，则使用了在现代物理中被广泛运用的最小作用量原理（principle of least action）。

在对物理学的持续关注中，希尔伯特那颇具识人之明的眼光并没有漏掉一位比他年轻十七岁、正快速成长为大腕的“后起之秀”——爱因斯坦。早在1912年，希尔伯特在研究线性积分方程时，就曾与爱因斯坦有过信件往来：他向爱因斯坦索要过气体运动理论及辐射理论方面的论文，并回赠过一本自己新出版的积分方程著作。他也曾邀请爱因斯坦在“哥廷根周”期间访问哥廷根，做一次有关气体运动理论的报告，但爱因斯坦婉拒了。不过，从1915年6月28日至7月5日，爱因斯坦终于应希尔伯特的邀请对哥廷根进行了为期一周的访问，并作了六次——每次两小时的——报告，介绍他的广义相对论研究。

那次哥廷根之行给爱因斯坦留下了不错的印象，他在1915年7月15日给索末菲的信中描述了自己的观感：

在哥廷根，我非常愉快地看到所有的东西都在细节上得到了理解。我对希尔伯特很是着迷，他是一个重要人物！

在给其他同事和朋友的信件中，爱因斯坦也毫不讳言地表示了对希尔伯特的好感，并提到他（在引力理论方面）已完全说服了希尔伯特与克莱因（Felix Klein, 1849-1925）<sup>[注1.1]</sup>。

#### 注 1.1

克莱因是一位比希尔伯特更资深的哥廷根的著名数学家（不要与有相同中文译名的美国数学科普作家 Morris Kline 相混淆，此处及后文提到克莱因所指的是 Felix Klein）。关于爱因斯坦认为自己说服了希尔伯特一事，信件中并未提及细节，如果用后来的情形来印证的话，那么希尔伯特主要是接受了爱因斯坦的广义协变原理及用度规张量描述引力势的想法，但对爱因斯坦理论的若干其它细节，尤其是当时那尚不正确的场方程，是并不认同的。

希尔伯特对爱因斯坦的访问也极为重视。那次演讲之后不久，希尔伯特离开了哥廷根去度暑假。对于他在那段时间中的具体行程史学家们所知不全，但一般认为，在那段时间中希尔伯特的研究重心向引力理论方向作了显著倾斜。这一倾斜使得他与爱因斯坦之间展开了一场无形的——在某些环节上甚至是有形的——竞争，也为史学家们留下了一个小小的谜团。

1915年11月20日，希尔伯特在哥廷根皇家科学院(Royal Academy of Science in Göttingen)作了有关引力理论的报告，介绍了他的研究成果。那次报告对于探讨谁最先提出了广义相对论场方程是极为重要的。可惜的是，也许因为听众大都是数学家，报告的主题却是物理学，从而“言者谆谆，听者藐藐”的缘故，后世的史学家们未能收集到有关那次报告的第一手资料——比如听众的反映或有关报告内容的细节性回忆等。早期的史学研究所依据的乃是希尔伯特于1916年3月31日发表在《皇家科学与人文学会新闻》(Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften)上的题为“物理学基础”(Die Grundlagen der Physik)的论文<sup>[注1.2]</sup>。那篇论文明确标注了曾在1915年11月20日的会议上作过报告(Vorgelegt in der Sitzung vom 20 November 1915)，从而被视为了有关那次报告的最直接——一度甚至是唯一直接——的资料。

接下来我们就先对希尔伯特的那篇论文作一个简短介绍。

#### 注 1.2

细心的读者也许注意到了，这一论文标题与他的名著《几何基础》(Grundlagen der Geometrie)的标题是极为相似的。

#### 注 1.3

希尔伯特早年曾倾向于接受所谓的机械观，后来才转而接受电磁观。自1913年之后，则更具体地青睐于建立在电磁观之上的米理论(有关机械观与电磁观的简单介绍，可参阅拙作《质量的起源》的第三节)。

#### 注 1.4

米的“世界函数”是一种拉格朗日函数(Lagrangian)，后者的符号通常取为 $L$ 。拉格朗日函数在具体使用时分“拉格朗日量”(Lagrangian)与“拉格朗日密度”(Lagrangian density)两种主要情形，前者常用于离散体系，后者常用于场论，希尔伯特所用的是后者。拉格朗日密度有时也称为作用量密度(action density)，其不变体积元 $\sqrt{g} d^4x$ 的积分则称为作用量。不过为简洁起见，在不会混淆的情形下，我们将把两者统称为作用量。

### 三. 希尔伯特的“物理学基础”

希尔伯特对引力理论的研究有两个主要切入点：一个是来自爱因斯坦的广义协变原理及用度规张量描述引力势的想法，这是爱因斯坦自1907年开始思索引力问题以来逐步确立起来的想法；另一个则是来自德国物理学家米(Gustav Mie, 1869-1957)的物质理论。米(一个字的中文译名真是别扭)的物质理论(简称米理论)是建立在物质起源于电磁相互作用这一被称为电磁观或电磁世界观(electromagnetic worldview)的观念之上的<sup>[注1.3]</sup>，与建立在电磁观之上的其它理论一样，在昙花一现之后很快就入驻了“历史博物馆”。

借助这两个切入点，沿袭物理学公理化的大思路，希尔伯特在论文的开篇中列出了两条公理。其中第一条被称为“米的世界函数公理”(Mie's axiom of the world function)，这条公理虽被冠以米的名字，从框架上讲，实际引入的乃是最小作用量原理，只不过用被米称为“世界函数”的函数 $H$ 来表述作用量而已<sup>[注1.4]</sup>。除此之外，该公理还规定世界函数 $H$ 只包含度规张量及其一、二阶导数，以及电磁势及其一阶导数。从而同时体现了爱因斯坦用度规张量描述引力势的想法以及米的建立在电磁观之上的物质理论(因为物质场部分只含电磁场)。而第二条公理则是所谓的“广义不变性公理”(axiom of general invariance)，它规定世界函数在任意坐标变换之下为标量。毫无疑问，这条公理体现的是爱因斯坦的广义协变原理，只不过作用量是标量，从而“协变”(covariance)成为了“不变”(invariance)。如果更细致地分析的话，那么第一条公理中的 $H$ 只包含度规张量及其一、二阶导数的限定有可能也是来自爱因斯坦的，因为是他通过对经典极限的研究，发现了引力理论不含有度规张量的二阶以上导数<sup>[注1.5]</sup>。

以这两条公理为基础，希尔伯特给出了一系列数学和物理上的结果。其中数学上的结果包括：

1. 缩并形式——即关于里奇张量(Ricci tensor)——的毕安基恒等式(Bianchi identity)<sup>[注1.6]</sup>。

#### 注 1.5

不过场论中通常就不含场量的二阶以上导数，因此这一限定虽有可能来自爱因斯坦，但即便没有爱因斯坦，估计希尔伯特也会做出同样的限定。

#### 注 1.6

毕安基恒等式据说最早乃是意大利数学家里奇(Gregorio Ricci-Curbastro, 1853-1925)于1880年发现的，后来于1902年由意大利数学家毕安基(Luigi Bianchi, 1856-1928)重新发现，并因此得名。在广义相对论的早期研究中，无论爱因斯坦还是希尔伯特都不知道这一恒等式，从而未能直接利用它来简化场方程的推导。

2. 诺特定理 (Noether's theorem) 的雏形<sup>[注1.7]</sup>。

而对我们来说更有兴趣的物理上的结果则主要包括：

1. 引力理论的作用量为  $K + L$ ，其中  $K$  为曲率标量（现代符号为  $R$ ）， $L$  为物质场的作用量，对希尔伯特来说特指为米理论中的电磁作用量。

2. 引力场方程为  $\sqrt{g} (K_{\mu\nu} - \frac{1}{2} K g_{\mu\nu}) = -\partial (\sqrt{g} L) / \partial g^{\mu\nu}$ ，其中  $K_{\mu\nu}$  为里奇张量（现代符号为  $R_{\mu\nu}$ ）， $g_{\mu\nu}$  为度规张量， $g$  为度规张量的行列式。

这两个物理上的结果正是后来在史学界引发争议乃至风波的核心所在。如前所述，包含这两个结果的论文虽是1916年3月31日发表的，但由于明确标注了曾在1915年11月20日的会议上作过报告，而关于那次报告，又一度并无足够详尽的其它资料可供研究，因此早期的史学家便将这篇论文中的结果视为是希尔伯特不迟于1915年11月20日所得到的。与之相比，爱因斯坦最早得到正确的引力场方程是在1915年11月25日，那一天他向普鲁士科学院 (Prussian Academy) 报告了正确的场方程，并随即以“引力场方程” (The Field Equations of Gravitation) 为题发表在了普鲁士科学院的会议报告 (Sitzungsberichte) 中。这一时间比希尔伯特作报告的日子晚了五天。因此，一些早期的史学家认为希尔伯特先于爱因斯坦就得到了广义相对论场方程。

不过，对于多数其他人来说，希尔伯特的论文其实并未引起太大反响，这也许是因为——如前所述——聆听他1915年11月20日报告的大都是数学家，对物理学话题相对隔膜。而当希尔伯特的论文正式发表时，不仅爱因斯坦关于引力场方程的最早的短文早已发表，就连他有关广义相对论的著名长篇综述“广义相对论基础” (The Foundation of General Theory of Relativity) 也已问世。另外一个可能的原因则是爱因斯坦研究广义相对论所用的数学对当时的物理学家来说虽有些另类，但比起希尔伯特的数学来却可能还算略显“通俗”的，从而更容易被接受。

由于希尔伯特的论文未引起太大反响，因此关于希尔伯特是否先于爱因斯坦得到广义相对论场方程一事，很多人即便风闻过消息，对细节也大都知之不详。这方面的一个例子，是印度裔美国科学史学家梅拉 (Jagdish Mehra, 1937)

## 注 1.7

诺特定理是德国数学家诺特 (Emmy Noether, 1882-1935) 于1918年发表的，不过其证明据说在1915年就完成了。希尔伯特在准备12月20日的报告期间，曾经让诺特做他的助手，因此两人在诺特定理这一课题上可能有过讨论。

所提到的。1974年，梅拉在有关这一话题的著作《爱因斯坦、希尔伯特与引力理论》 (Einstein, Hilbert, and the Theory of Gravitation) 的序言中提到，他之所以研究这一课题，并撰写这一著作，是因为匈牙利数学及物理学家维格纳 (Eugene Wigner, 1902-1995) 曾风闻过希尔伯特先于爱因斯坦发现广义相对论场方程的说法，并向他寻求证实。维格纳不仅是数学及物理学家，而且曾在哥廷根大学做过希尔伯特的助手，连他都不知道此事的细节，其他人就更可想而知了。

但在转而探讨历史细节之前，有关希尔伯特那篇论文还有其它一些东西值得评述。

在希尔伯特的论文中，除上述结果外，还提出了一个有趣的观点，那就是引力场的作用量对于度规张量的10个分量和电磁势的4个分量分别作变分，一共可以得到14个方程（即10个引力场方程与4个电磁场方程），但由于缩并形式的毕安基恒等式共有4个，因此其中有4个方程是不独立的。希尔伯特对这一结果作出了自己的诠释，他认为这意味着4个电磁场方程可以作为10个引力场方程的推论，从而表明电磁理论可以从引力理论中得到<sup>[注1.8]</sup>。而依据希尔伯特当时所认同的电磁观，电磁理论乃是物质理论的基础，因此电磁理论可以从引力理论中得到，也就意味着全部的物理学都可以归并为引力理论。希尔伯特将自己那篇有关引力理论的论文取名为“物理学基础”，就在一定程度上体现了这一诠释。在论文的末尾，他甚至充满乐观地展望道：

通过本文所确立的基本方程式，我相信最深层的、目前还隐藏着的原子内部过程也将得到解释。尤其是将所有物理常数普遍约化为数学常数必定是可能的……物理学在原则上变成像几何那样的科学——这毫无疑问是公理化方法的最高成就。

这种乐观憧憬也是刻在其墓碑上的希尔伯特的毕生信念“我们必须知道，我们必将知道” (Wir müssen wissen. Wir werden wissen) 的一个生动写照。

当然，我们现在知道（希尔伯特本人在不久之后也意识到了），希尔伯特的上述看法是完全错误的，因为缩并形式的毕安基恒等式并不意味着电磁理论可以从引力理论中得到。从现代观点来看，4个缩并形式的毕安基恒等式的存在

## 注 1.8

有意思的是，希尔伯特的这一结论实际上是逆转了米的观点。米是电磁观的贯彻者，他的理论是单纯的电磁理论，并一度曾希望将引力也归因于电磁理论（因此米也是统一引力与电磁的早期尝试者），这与希尔伯特所得到的结论恰好相反。米后来放弃了将引力归因于电磁理论的努力，转而尝试用四维矢量来描述引力势。

使得 10 个引力场方程中只有 6 个是独立的，从而在求解度规张量时必须添加 4 个坐标条件，仅此而已。这一点实际上是与广义协变性一脉相承的，因为后者意味着引力场方程及其解允许对 4 个时空坐标作任意变换，从而只有在添加 4 个坐标条件后才能得到确定的解。这一切丝毫不意味着从引力理论中可以得到电磁理论，更谈不上能将全部的物理学归并为引力理论（后者还进一步假定了本身也是错误的电磁观），及支持希尔伯特论文末尾那些天马行空般的想象。此外，正确的引力场方程与缩并形式的毕安基恒等式一同确保了协变形式的能量动量守恒定律，而能量动量守恒定律——视具体的物质体系而定——蕴含了物质运动方程的全部或部分信息，这在如今也已是众所周知的结论了，前者在现代广义相对论教材中更是往往作为引力理论所需满足的条件及推导引力场方程的捷径来用。可惜在早期研究中，无论爱因斯坦还是希尔伯特都未能清楚地看到这些。爱因斯坦早年走过的许多弯路（包括一度以为广义协变性无法普遍成立），以及希尔伯特的上述错误都与之不无关系。当然，这绝不能作为后人苛责他们的理由，在黑暗中探索的前辈们所面临的困难是我们这些事后诸葛无法直接体验的，爱因斯坦本人对此有过精辟的评论：

在黑暗中探寻真理的那些能够体味却难以描绘的年月，那些强烈的渴望和在信心与疑虑之间的反复徘徊，直至突破后的明晰和领悟，都只有亲身经历过的人才能知晓。

不过，希尔伯特将电磁理论乃至整个物理学归并为引力理论的观点虽然不正确，他的这一做法却可以算是先于爱因斯坦走上了试图统一引力与电磁的道路。当然，在这点上他虽先于爱因斯坦，却也绝非“第一人”，比如笃信电磁观的米在他之前就做过类似努力（参阅 [注 1.8]）。希尔伯特本人则将这条道路的开创归功于德国数学家黎曼（Bernhard Riemann, 1826-1866），表示黎曼是“最早探索引力与光之间的理论关联”的人（因为在黎曼手稿中有一篇探讨引力与光的短文），而他自己所得到的结果则是“对黎曼提出的问题的简单且很令人惊讶的解答”。相比之下，爱因斯坦是二十世纪二十年代开始才正式走上同样道路的，不仅比黎曼、米、希尔伯特来得晚，也晚于德国数学家外尔（Hermann Weyl, 1885-1955）、卡鲁查（Theodor Kaluza, 1885-1954）等人——当然，他较晚进入这一“死胡同”对物理学来说乃是

不幸中的幸运。

希尔伯特那篇论文的另一个值得评述的特点，是率先用最小作用量原理表述了正确的引力理论。希尔伯特以最小作用量原理为基本出发点（即视为公理）的做法，曾被奥地利物理学家泡利（Wolfgang Pauli, 1900-1958）列为是妨碍物理学家接受他理论的两大障碍之一（另一个障碍是采用了米理论）。不过从现代物理学的观点来看，希尔伯特的做法却极具前瞻性。因为现代物理学上几乎所有的基础理论研究都是从最小作用量原理出发的 [注 1.9]。就连爱因斯坦本人，虽然曾在 1916 年 5 月 24 日给好友艾伦菲斯特（Paul Ehrenfest, 1880-1933）的信中表示不欣赏希尔伯特那“不必要地复杂迂回”的理论，在同年的 10 月却开始了沿这一方向的研究，并且在论文中改称希尔伯特的理论为“特别清晰的形式”。看来外尔在晚年的回忆中把希尔伯特比喻为吹着迷人长笛，引诱一大群老鼠跟随他跳入数学长河的人是颇为贴切的——就连爱因斯坦也挡不住诱惑地跟着他跳了一回。

说到这里，顺便回过头来评述一下本文开头所引述的爱因斯坦本人及其他物理学家的看法，即认为广义相对论如果没有爱因斯坦，在非常长的时间内都无法由别人提出。我早年接触到这一看法时，曾有过完全的认同，因为像广义相对论那样复杂的理论，是不可能像发现牛顿引力定律那样利用观测线索来发现的（那样的线索只能得到一部分后牛顿近似，而不可能反推出广义相对论来），而纯理论的探索则有太多的可能性，米等人的探索就是例子，甚至连爱因斯坦本人的探索，也走过了大量歧途，且最后的成功——如后文将要提到的——仍有一定的歪打正着之处。对于这样的复杂理论，其他人完全独立地提出一模一样的理论似乎确实是不可思议的 [注 1.10]。不过，后来我的看法有了显著改变，理由正是最小作用量原理。从最小作用量原理的角度讲，只要有人想到了坐标变换可以突破狭义相对论的限制（这当然也不容易，但与创立整个广义相对论相比还是容易得多的），则度规张量的引入就是必然的，而度规张量及其低阶导数构成的最简单的标量就是曲率标量，这一数学事实也早晚会被注意到的。如果进一步考虑到在现代物理研究中，对最小作用量原理的运用越来越广泛，对作用量的选取则呈现出穷举性，即认为凡未被基本原理所禁止的项都可以进入作用量中，则曲率标量的进入——从而广义相对论的发现——也几乎是

#### 注 1.9

需要提到的是，爱因斯坦、洛仑兹等人在相对论研究中也使用过最小作用量原理，只不过没有像希尔伯特那样将其地位放得如此之高，而且也没能给出正确的引力理论作用量。

#### 注 1.10

有读者可能会觉得希尔伯特就是一个反例。其实不然，因为——如正文所述——希尔伯特的研究是建立在来自爱因斯坦的许多框架性观点之上的，从而至多只是在我们将要讨论的推导场方程这一环节上独立于爱因斯坦，而并非在整个引力理论的研究上都独立。