自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

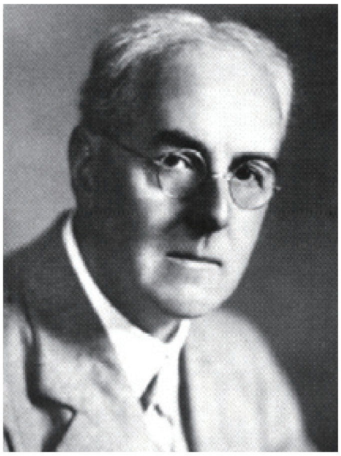
丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。” —— 伽利略

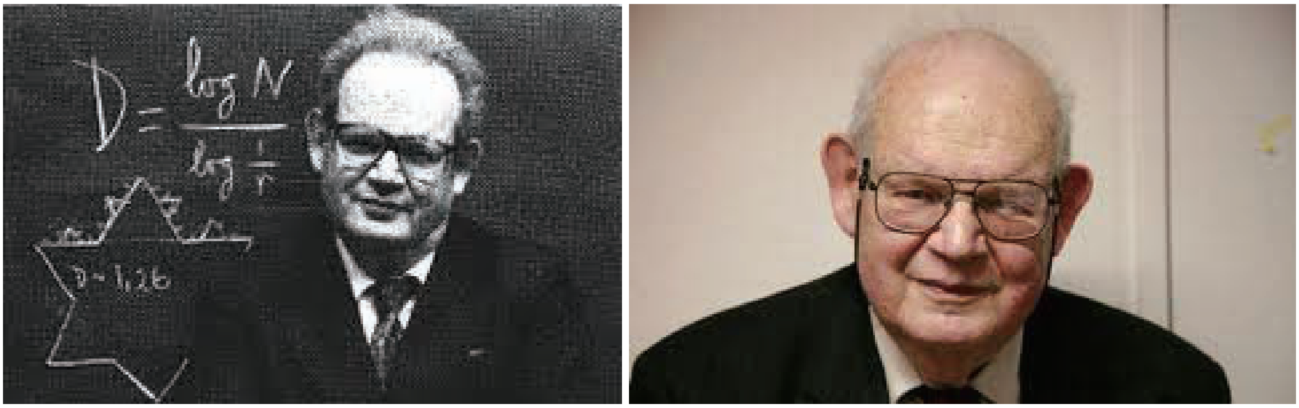
（九）“英国的海洋线有长？”

1970 年，曼德波罗（Benoit Mandelbrot, 1924-2010）的一篇文章大概会让自以为懂得几何、代数又好的读者觉得好笑。文章的题目是疑问式的：“英国的海洋线有多长？”

英国的海洋线有多长？富有个性的一位英国前辈、湍流研究的首创者理查德逊（Lewis F. Richardson, 1881-1953），曾对曲折的国境线好奇。他比较了比利时、荷兰、西班牙和葡萄牙的百科全书，发现这些国家对共同边界长度的记载相差 20%。曼德波罗


理查德逊（Lewis F. Richardson, 1881-1953）


英国海岸线



曼德波罗（Benoit Mandelbrot, 1924-2010）

在他的文章中得出结论：任何海岸线在某种意义上是无限长的。这真是与普通常识相悖。如果无限长，那为什么马拉松运动员能从海岸线一端跑到另一端？

我们知道怎样测量一条直线段的长。要测量一条海岸线的长，拿一只两脚规，把它张成某个单位的长度，比如一米。然后沿着海岸线一步一步地数数，最后的米数只是真实长度的一个近似，因为两脚规忽略了两脚之间的迂回曲折。如果把两脚规并拢一些，比如张成一尺长，再量一次，就会数到稍稍大一些的长度，这是因为原来每步一米量了一步的距离，现在每步一尺地量出来不止三步。再把两脚规的步长缩短到一寸，重新数步子，就会算出更大的长度。如果一只不厌其烦的小蚂蚁自告奋勇地担当两脚规的角色，翻过海岸线上的每一粒粗沙子，它会向我们报告一个还要大的长度。看上去，两脚规张得越窄，量得的长度就越大，但是常识告诉我们，它们会趋向于一个最终值，即海岸线的实际长度。

银行定期存款问题也有类似的说法。设想你有一笔财富 100000 元人民币存一年定期，年利息为 100%。如果到年底取回存款时才计算利息，你拿回家 200000 元，其中 100000 元是利息。如果聪明的你要求银行一个季度算一次利息，每季利滚利，到时你拿到的钱比 200000 元多一点点。如果银行更大方，答应一个月算一次利息，则你得到的更多。一天算一次利息，一年后连本带利还要多。如果银行“连续”地计算你的利息，连续地利滚利，不要以为你能获得无穷大的年终收益，但你一年之后能拿回最大可能的人民币数额 271828 元，即你的本金 100000 元乘上“自然对数”的底 e 这个常数。

如果海岸线是“足够规则”的，譬如是椭圆形的，那么上述“两脚规”测量的过程确实收敛到一个有限数。这就是从大学微积分里学到的怎样计算光滑曲线的长。但是，曼德波罗发现，当把“两脚规”的步距越调越小时，因为大海湾显露出越来越小的子海湾，犬牙交错、弯弯曲曲、参差不齐，所得的海岸线长度也就无限地上升。

曼德波罗是个“杂学家”，与常规意义下的科学家不同，他是一个兴趣广泛的数学家。当多年后荣誉等身的他演讲前主持人介绍他“……在哈佛教过经济学，在耶鲁教过工程学，在爱因斯坦医学院教过生理学……”的时候，他不无骄傲地对听众们说：

“当我听到过去从事过的一连串职业时，就经常怀疑自己是否存在。这些集合的交集肯定是空的。”

曼德波罗出生于波兰首都华沙一个立陶宛犹太人的家庭，十二岁时他随父母定居法国巴黎，原因之一是他的数学家叔叔佐列姆 • 曼德波罗（Szolem Mandelbrojt, 1899-1983）在那里教书。老曼德波罗和其他几个志同道合、才华横溢的年轻数学家，如后来坐上冯 • 诺依曼在普林斯顿的椅子的韦伊（Andre Weil, 1906-1998），三十年代在因第一次世界大战而数学家断代的祖国建立了“布尔巴基”(Nicolas Bourbaki) 这个影响了世界几十年的数学团体。它后来的积极参加者包括斯梅尔的“反越战盟友”、荣获 1950 年菲尔兹奖的施瓦茨（Laurent Schwartz, 1915-2002）。 这个组织杜撰的人名出现在他们集体写成的多卷本浩瀚巨著的作者签名处，其实曾是十九世纪具有希腊血统的一位面孔严肃的法国将军的真名。布尔巴基的成员对待数学也是“面孔严肃”的。他们和团体建立之初依然健在的英国理论数学巨匠哈代有着共鸣，但对已逝的本国同胞庞加莱比较反叛。他们从公理开始，以推理为准，要演绎出一切严格的定理。他们坚信，数学就是数学，不是物理，应当纯粹，无关应用。在他们眼里，几何直观永远是不可靠的，甚至是愚弄逻辑思维的罪魁祸首。

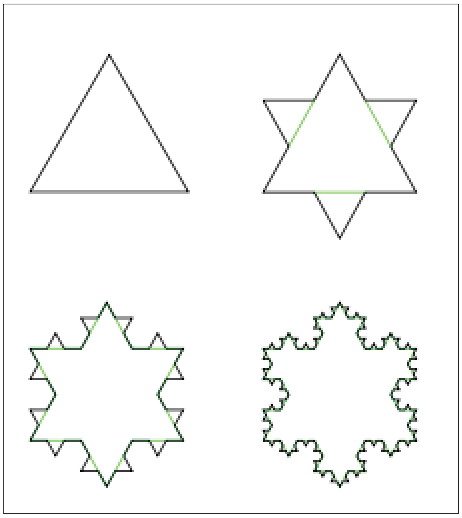
但是，老曼德波罗可能影响了一部分世界，却未能够影响他侄子的数学世界观。曼德波罗对布尔巴基的价

值观是不能容忍的。二战后，他考取了庞加莱的母校巴黎高工和更为有名的巴黎高师。他开始时慕名上高师，但几天后便逃离了这个布尔巴基分子集中的法国最高学府，转入高工。十年过后，由于他无法在弥漫着布尔巴基形式主义空气的法国感到快乐，便离开了祖国，离开了祖国的学术界，去了美国IBM的沃森（Thomas J. Watson, 1874-1956）研究中心。但当他宣誓加入美国籍时，依然保留他的祖国籍。他后来获得了IBM的“院士”（Fellow）荣誉称号，并任耶鲁大学的讲座教授。

曼德波罗具有与生俱来的强大“几何直觉力”，终生热爱几何图形，并喜欢用几何的语言来解释或描绘吸引他眼球的任何自然现象。这与他的同胞——“十八世纪最伟大最谦虚的数学家”拉格朗日（Joseph-Louis Lagrange, 1736-1813）截然相反，后者在他似乎最需要图形的杰作《分析力学》前言中颇为得意地特别强调：“这本书找不到图”。移居到美国东部后，曼德波罗从属于经济学的关于棉花价格变化无序之间发现有序规律的“尺度无关性”，到属于工程科的为消除电话线噪音提出的描述信息传输误差分布的新策略，为自己日后创立新几何提供了具体的模型、铺下了前进的道路。

没有哪个同事理解曼德波罗研究实际复杂问题时改变尺度、化繁为简发现规律的新颖做法，但他正在做的“几何分析”思想的老祖宗却是那个下半辈子由于思想超前而被逼疯的康托尔。不连续性、随机噪声，错综复杂的海岸线，都被欧几里得的几何学拒绝于千里之外，都被牛顿的微积分扼杀在摇篮之中。直线与平面、三角形与圆、椭球与锥体，是多么美丽的几何图形，托勒密（Ptolemy, 约100-178）用以构造宇宙学说、毕加索（Pablo Picaso, 1881-1973）用以画出传世之作。欧几里得的几何占据了我们的大

科克（Helge von Koch, 1870-1924）



科克曲线（前四次迭代）

脑已有两千年之久，阻碍了我们“非常规的思维”。康托尔革命性的“三分集”构造，是近代科学四百年历史上第一次对经典几何的反动。

曼德波罗传播他的新几何思想：云彩不是球面、山峰不是圆锥。不规则的自然世界具有像康托尔三分集那样的结构和特征。2010年底的冬天对北京的居民来说是一个“无雪的冬天”。当入冬后过了一百多天，第一场雪姗姗来迟时，多少人欢欣雀跃。但是，他们是否仔细瞧瞧托在手掌心中的雪花？

1996年的某天下午，在美国密西西比州Hattiesburg市橡树园小学读书的一位名叫丁易之的小女孩放学一回到家，就迫不及待地告诉她在大学数学系教书的爸爸：

“Dad，今天我们‘提高班’的老师讲了chaos！”

接着，她拿出一支笔和一张纸，先画了一个大的等边三角形。然后她把三角形的每一条边分成三等份，以中间的那部分为底边又画了一个形状一样但边长小三分之二的三角形。结果是一个有十二条边的六角形。在每一条边上，她做同样的事，以中间的三分之一段为底边画上更小的等边三角形。她一直画到越来越小的三角形看不清楚为止。

看到这些，丁易之的爸爸颇为惊奇。在美国，这么小的孩子就能知道一些当代科学的初等概念，而在中国，他们整天被关在教室里做习题。于是，他笑眯眯地喊着他女儿的小名说：

“丁丁，你可以告诉你的老师，你爸爸的导师和他的导师就是定义什么是chaos的两个人。等你长大点我可以告诉你关于chaos更多的故事。”

2005年，丁易之为台湾的“庆祝李天岩六十生日国际研讨会”翻译了她爸爸写的“李天岩学术传记”，从中知道了更多关于混沌的历史。

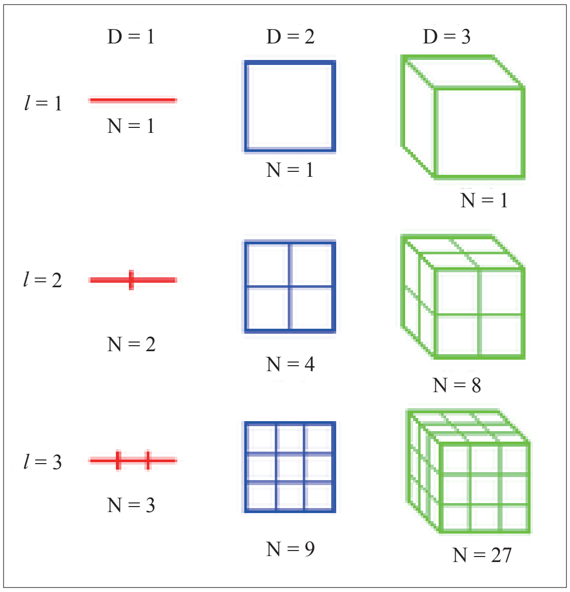
设想我们能把丁易之画三角形的过程一步步做到无穷，就看到围在外面的由折线边构成的边界变得越来越细微，就像构造康托尔三分集的过程中变得越来越稀疏一样。它最后的形状就像北京人手中融化前的雪花。瑞典数学家科克（Helge von Koch, 1870-1924）早在1904年就描述了这个“雪花”的边界线，现在它就被称为“科克曲线”，又经常被形象地叫做“科克雪花”。

科克曲线和康托尔的三分集一样具有自相似性。如果我们割下科克

雪花的一边，再把它的三分之一部分放大三倍，就得到和原先割下的那片一模一样的图形。科克曲线自相似性的放大因子也是3。

科克曲线围了一个有限的区域，事实上这个区域包含在原先的等边三角形的外接圆之内，因而它的面积是个有限数。外接圆的周长也是有限的，因为它是圆直径的 π 倍。但是科克曲线的长也是有限的吗？

我们来算算看。假设三角形的三个边长都为1。那么它的周长等于3。在每一步后，各个顶角的两边各长出一个边长缩短了三倍的三角形，因而这一步后的周长等于上一步后的周长乘上4/3。这样，第一步后的周长为 $3(4/3)$，第二步后为 $3(4/3)^2$，第三步后为 $3(4/3)^3$。由此类推，第 n 步后的周长为 $3(4/3)^n$ 。这个数随 n 的变大也变得越来越大，没有上限。因此我们得到一个令人难以置信的结论：连续、永不自我相交、连通、并位于一个有限区域内的科克曲线的长度是无穷大，和两边无限延长的一条直线一样长！



线段、正方形和立方体的维数

科克曲线这个有穷区域的无穷长边界线在上世纪初让见到它的数学家睡不好觉，它太和直觉不容、它太和常规相悖，在当时的数学主流世界被视为一个怪物，因而成了一个被遗弃的无人领养的“私生子”，直到曼德波罗把它捡起，让它复活。他把科克曲线看成是“粗糙而生动的海岸线模型”，把它看成现实世界的图像，用以解释丰富多彩的自然现象。

虽然现在最时髦的理论物理学家在他们的“超弦理论”中断言我们周围的宇宙至少有十维，我们只感知生活在三维空间之中。也许是四维之中，如果时间另加一维的话。我们行走的地球表面却是二维的球面，我们的小轿车开过的高速公路只是一维的线，花粉过敏者的鼻子最不想吸入的微小颗粒大概算是零维的点。但是维数的概念也和观察者的尺度有关。春天里老让人打喷嚏、令人困扰的花粉在我们的眼里是个零维的点，但在吸附在它身上的细菌看起来（如果细菌有眼睛的话）却是一个三维的庞然大物。

欧几里得两千多年前就精确地告诉我们什么是点、什么是线、什么是面，它们的维数分别是0、1、2。二维面内的一维曲线不用周围，面积为零，只有长度，而三维空间中的二维曲面不占空间，体积为零，只有面积，这些“常识”已在我们的头脑中根深蒂固。直来直去、表里如一者往往被人说成“一维个性”，能说会道、左右逢迎者可被称为“二维巧匠”，翻手为云、覆手为雨者大概非“三维大师”莫属。

对西方文明影响最大的古希腊哲学家亚里士多德（Aristotle，公元前384-前322）也说得清清楚楚：“直线在一个方向上有大小，平面在两个方向上有大小，而立体在三个方向上有大小；除此以外，就没有其他大小了，因为这个已是全部了……不同种之间的大小是不能转化的，如从长度到面积，从面积到体积都不能转化。”

“整数维”已经在我们的头脑里挥之不去。如果有人说，这个东西是半维的或一点五维的，我们会认为他要么是个诗人，要么是个疯子。须知，美国上世纪最伟大的诗人大都在疯人院里写出他们最伟大的诗篇。

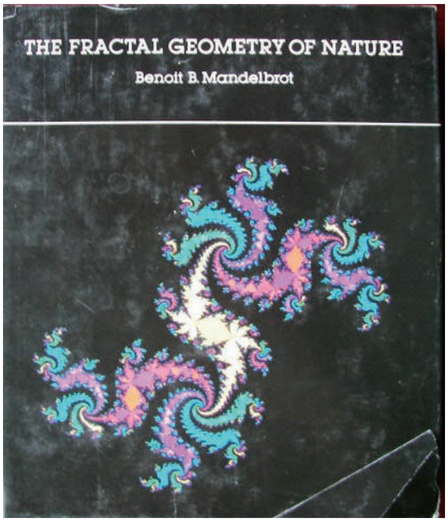
但是，当曼德波罗宣称科克曲线的维数是1.2618时，他不是疯子，他是IBM心智健康的科学家。他也不是诗人，但是他喜欢引用爱尔兰多面手作家斯威夫特（Jonathan Swift, 1667-1745）的语句：

于是博物学家看到小跳蚤，
又有小跳蚤在上面跳，
它们又挨小蚤咬，
这样下去没个了。

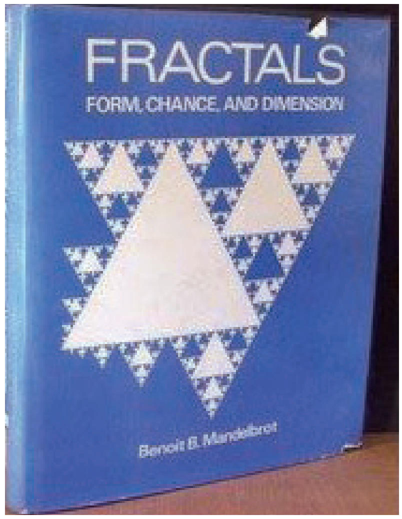
我们用比直觉多一点的“数学”方式来检验维数的概念。一条长度为1的线段可以被分为 n^1 个小段，每段长 $1/n$。一个边长为1的正方形可以被分为 n^2 个小片正方形，每片面积为 $1/n^2$。类似地，一个边长为1的立方体可以被分成 n^3 个小块立方体，每块体积为 $1/n^3$。这三个数 n^1、n^2、n^3 中的“指数”1，2，3就分别是线段、正方形和立方体的维数。

在以上的“化整为零”的剖分之中值得注意的是：无论是小线段、小方形、小立方，放大 n 倍后就和原先的图形一模一样。它们也有和康托尔集合或科克曲线一样的自相似性，这个 n 也是所谓的“放大因子”。采用放大因子，加上“对数”这个工具，曼德波罗告诉我们：

线段维数为1，因为小线段个数的对数除以放大因子的对数等于1；正方形维数为2，因为小方形个数的



曼德波罗著《自然的分形几何》



曼德波罗著《分形：形态、机遇和维数》

对数除以放大因子的对数等于 2；立方体维数为 3，因为小立方个数的对数除以放大因子的对数等于 3。

曼德波罗用同样的想法来计算科克曲线的维数。希望我们还记得在其构造的第一步，原先的三角形的每条边生成四个小边，其放大因子为三 . 这么一来，他就算出科克曲线的维数等于 4 的对数除以 3 的对数，约为 1.2618。

这个分数就被曼德波罗视为英国海岸线的“维数”，它比一大点，比二小点。因而，怪模怪样的海岸线比笔直的高速公路“宽些”，但比平整的飞机场“窄点”。类似地，可以算出康托尔三分集的维数等于 2 的对数除以 3 的对数，差不多是 0.6309。粗糙不平的乡间马路的维数可以是 2.25。

革命的时机成熟了。1975 年某天的一个下午，曼德波罗要为他刚完成的开天辟地的大书命名。一个新学科总要有一个名字，像刚出世的新生儿。他“老来得子”的儿子刚从学校放学回来，于是他借了儿子的拉丁语词典翻了翻，如同当上爷爷的中国老学究为求孙子一“佳名”而沉入康熙字典。拉丁文是英文的祖先。没有什么比最接近英文单词 fraction（分数）的什么东西更能反映这个学科的特色，于是，他把这个单词的最后三个字母“ion”巧妙地改成“al”，从而造了“fractal”（分形）这个数学名词，它既是名词又是形容词，既属于英语，又属于法语，代表了他生活过的两个国家。曼德波罗造字的历史功绩，大概只有中国唐朝的女皇帝武则天（624-705）才敢相比。

1977 年，曼德波罗的第一部著作《分形：形态、机遇和维数》（Fractals: Form, Chance and Dimension）出版了，它宣告了新几何“分形学”的诞生。1982 年，他对这本书增订修正，以《自然的分形几何》（The Fractal Geometry of Nature）新名问世。这引发了科学界甚至一般民众对“自然界的分形美观”狂热的注意，就像美术爱好者趋之若鹜地涌向毕加索的画展那样。

（十）自由王国的几何

曼德波罗的著作让人们再次以欣赏的眼光审视大自然的杰作。在分形几何统一思想的旗帜下开始聚集不同学科的科学家，他们在各自的领域里看到了特异怪癖之处，经典的思维无法解释。

我们周围花花绿绿的世界并不总是规则有序的，一直在统治着我们中学教科书的欧几里得几何对此却束手无策。放眼看去，缥缈不定的彩云、雷霆万钧的闪电、纷纷霏霏的落雪；绵延不断的群山、蜿蜒曲折的海岸、崎岖不平的马路；跌拓多姿的人生、变幻莫测的心理、叱咤风云的官场，怎能用简单平滑的整数维数来描绘？

1978 年，美国哥伦比亚大学地球物理学家肖尔茨（Christopher H. Scholz, 1942-）一买到曼德波罗的书，就觉得它在自己的工作中大有用武之地。在他看来，既然地球表面和海洋相交的海岸线有分形结构，地面顶部的内表面所形成的“分裂层”也会具有相似性。这些断层控制着地层中流体的运动和地震的活动，深入了解它们十分重要。他最终成了在这个领域里头成功应用分形技术的少数几个名人之一。

造物主把我们身体的组织结构设计得几乎是天衣无缝，除了极少数的不甚重要之物，比如阑尾。血液走遍全身，动、静脉血管、毛细管到处密布，既形成连续的分布，又大玩分形结构的把戏，这样它们既有巨大的表面积，又能挤进小于人体 5% 的体积，活像科克曲线那样。难怪曼德波罗大开英国文豪莎士比亚（William


《威尼斯商人》中贪婪的夏洛克和聪明的鲍西娅