
# 自然的奥秘：混沌与分形

## 谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。”——伽利略

### （五）巴西海滩的“马蹄”

生于美国密西根州 Flint 市的斯蒂芬·斯梅尔（Stephen Smale, 1930-）是个有独特个性的数学家，这不光体现在他的数学研究上，也在于他独立思考的政治态度。1966 年夏天的 8 月，中国的文化大革命正在如火如荼之时，毛主席在天安门广场的城楼上接见激动得热泪盈眶的百万红卫兵小将，而此时的斯梅尔达到他个人学术生涯荣誉的最高峰：抵达莫斯科参加有 5000 人出席的国际数学家大会并领取菲尔兹奖。加拿大数学家菲尔兹（John Charles Fields, 1863-1932）去世前捐出 47000 美金建立了这个“数学的诺贝尔奖”，每四年全世界 40 岁以下的数学家只有二到四人获此殊荣，比得诺贝尔奖还难。

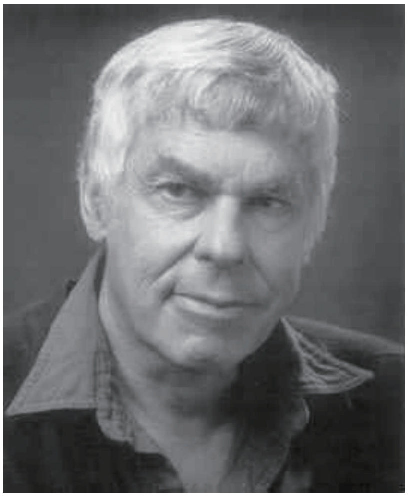
在国内，意气风发、精力充沛的斯梅尔就是一位“反越战英雄”。美国国会恰巧在他获菲尔兹奖的当天正在举行听证会，调查他和鲁宾（Jerry Rubin, 1938-）1965 年在他任教的加州大学伯克利校区建立从事反战抗议活动的“反动”组织“越南日委员会”并担任共同主席的这件事。国际数学家大会快要结束之际，在莫斯科大学的宽阔台阶上，年轻时曾经“左倾”的斯梅尔应一位北越记者的邀请举行了记者招待会。他以谴责他自己的国家对越南的武装干涉开始，这让招待会在场的主人、冷战时期的苏联人大喜过望。

突然间，他话锋一转，进而谴责苏联入侵匈牙利以及国内缺乏政治、言论和出版自由，这让刚刚高兴的主人尴尬不已。由于公开得罪了超级大国的政府，他立刻被请入汽车，在公众视野里消失了几小时，但仍受苏联官方礼遇，未有太大麻烦，可能是受惠于手中的菲尔兹奖章。还未回到美国，国家自然科学

基金会主任就毫不留情地马上扣下了资助他研究的两个月夏季薪水的第二张支票，并指控他一大堆“经济问题”，如“滥用政府资助，整夏欧洲旅游”。所谓“欲加之罪，何患无辞”。第二年当他继续申请自然科学基金会资助时，某些让基金会领导害怕的美国国会议员还不想“放他一马”，百般刁难。生性倔强的斯梅尔毫不妥协，在校方及数学家同仁的支持下最后以胜利告终。这真是极具讽刺意义的故事：批评过苏联缺乏言论自由的斯梅尔在标榜“自由、民主、平等”的祖国也饱吃了一餐“言论自由”的苦果。

斯梅尔出生在一个美国的共产党员之家，青年时代的他也加入过这个组织。这并不奇怪。在那时代，熬过三十年代大萧条的美国人有许多对共产主义的想法发生了兴趣，向往苏维埃制度。当代美国有数学家布劳德三兄弟（Felix Browder, 1927-, William Browder, 1934-, Andrew Browder），前两位都曾当过美国数学学会的会长。 他们的父亲老布劳德（Earl Browder, 1891-1973）担任过十六年美国共产党的主席（1929-1945），直至被他的“同志们”赶下了台。奥本海默年轻时也在共产党组织的边界上徘徊过，他后来自杀的美丽未婚妻以及他的弟弟都是共产党员。

斯梅尔在家乡一所仅有一间教室的简陋的乡村学校读到八年级，以全班第三名的成绩高中毕业，没有显现任何天才迹象，但被视为一个孤独者和象棋高手。不像匈牙利的冯•诺依曼或美国的费恩曼，中学时代的他不太是一个“算得快”的少年，可能像中国的传奇数学家陈景润（1933-1996）一样不太适合参与奥林匹克数学竞赛。他获得四年免学费奖学金在离家仅仅一步之遥的号称“美国大学之母”的密西根大学读本科，后来一直读到 1956 年，在



斯梅尔（1930-）

年轻的教授、匈牙利人博特（Raoul Bott, 1923-2005）门下获得他的博士学位。在密西根教书三十年后去了哈佛的杰出数学家博特是一个高大的斯洛伐克人，他在 1953 年开设了一门代数拓扑课，除了一大群旁听教师，只有三名本土的研究生注了册，其中的两人，斯梅尔和芒克斯（James Raymond Munkres, 1930-），都成了著名的拓扑学家，后者的教科书《拓扑学》一直是这个行当好评如潮的大学生标准教材。后来，博特却以调侃的口吻说过，第三位的研究生贝利（James Berry）是“真正聪明的一个”，可惜他未完成学位。

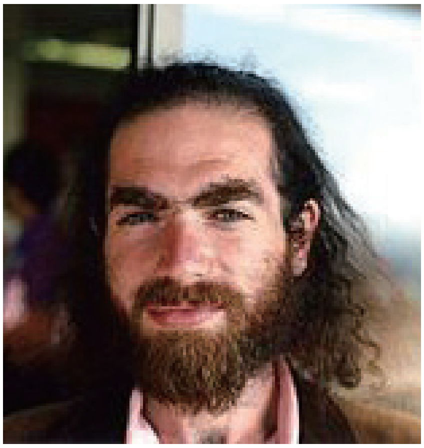
除了大一算是好学生，斯梅尔本科期间后三年的成绩大都是“非 B 即 C”，甚至核物理课拿了个不体面的 F（不及格）。这一部分原因是他对敏感政治活动的投入，在麦卡锡（Joseph McCarthy, 1908-1957） 主义“清算共产主义”方面不光与官方不配合，反而经常与校方对着干。幸运地被本系录取为研究生后，他的平均成绩依然是 C, 直到 1953 年 6 月收到系主任一封措辞强烈的“最后通牒”信，威吓着要赶他走，这才真正用功起来。从此，政治向数学低头，马列主义让位于拓扑学。大器晚成的他真是个“浪子回头金不换”的最好正例，也是流行中国的口号“不让孩子输在起跑线上”的最好反例。后来的斯梅尔以强有力的数学洞察力著称于世，例子之一就是他拿到博士之后在其学术生涯第一站的芝加哥大学教书首年，就与一般直觉相反地证明了数学意义上的“球体翻转”——他有生以来第一个世界级水平的结果。

斯梅尔最伟大的工作都和庞加莱创立的拓扑学和动力系统有关。拓扑学研究的是几何图形在像挤压、拉伸或扭曲这样的“连续变形”下仍然保持不变的那些性质。在欧几里得（Euclid, 前 330- 前 275）的几何里，圆和椭圆是两样完全不同的东西，但在拓扑学里它们却被看成是一模一样的东西，因为一个圆铁圈一被挤压就变成一个椭圆圈。但是，一位少妇手腕上戴的玉镯表面和她儿子玩的皮球表面不光在欧几里得几何里不一样，在拓扑学里也不一样。学过拓扑学的学生都会津津有味地谈论为什么每个人头顶上都有一个旋窝，不长头发，他们也知道为什么地球上不可能每个地方都同时刮“不管是西北风还是东南风”。

像斯梅尔这样的拓扑学家们考虑一个几何物体是否连通、是否有洞、是否打结。他们研究比我们的眼睛可以看到的一维曲线或二维曲面更为一般的“拓扑流形”。斯梅尔获得菲尔兹奖的成就是证明了对于维数大于四的“广义庞加莱猜想”，即 1904 年庞加莱提出的关于一类三维流形是否能与三维球面“拓扑等同”的著名猜想在四维以上的情形。四维的广义庞加莱猜想 1982 年被美国人佛雷德曼（Michael Freedman, 1951-）解决，并获菲尔兹奖。庞加莱猜想最终被俄罗斯数学天才佩雷尔曼（Grigori Parelman, 1966-）“临

门一脚”攻破，但他不光拒绝了随之而来的菲尔兹奖，而且拒绝接收由美国波士顿的成功商人兼数学爱好者克莱（Landon T. Clay）夫妇1998年设立的克莱数学研究所为全球公开悬赏求解庞加莱猜想而设立的一百万美元的奖金。


佛雷德曼 (Michael Freedman, 1951-)


佩雷尔曼（1966-）

当斯梅尔摘取了庞加莱之树的第一个果实并奠定了他在本领域中的大师地位后，他“挥泪告别拓扑学”，踏进了动力系统的新疆场。奇怪得很，庞加莱这个取名为“动力系统”的小儿子在他死后五十年间没有他另一个儿子“拓扑学”那么风光，研究者寥寥无几，尤其是与微分方程有关的“微分动力系统”。历史是如此的巧合，几乎是同时，当洛伦茨在北美洲东海岸的美国麻省理工学院摆弄着他的天气模型时，斯梅尔在南美洲巴西里约热内卢的纯粹与应用数学研究所和临近的Copacabana海滩上发明了他的“马蹄”。

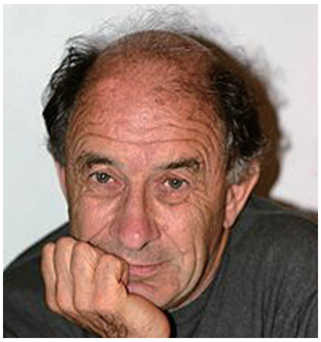
斯梅尔首先考虑的问题与动力系统的“结构稳定性”有关。低维系统的结构稳定性概念源于三十年代以柯尔莫果洛夫（Andrey N. Kolmogorov, 1903-1987）为首的苏联学派。1961年被美国哥伦比亚大学高薪挖去当正教授前，刚刚三十出头的斯梅尔在莫斯科见到比他更为年轻的四位崭露头角的数学家阿诺索夫（Dmitri V. Anosov, 1936-）、阿诺德（Vladimir I. Arnold, 1937-2010）、诺维科夫（Sergei P. Novikov, 1938-）和西奈（Yakov G. Sinai, 1935-），令他刮目相看，并叹息一声“西方并无这种组合”。巴西数学家佩肖托（Mauricio Peixoto, 1921-）研究圆这个特殊的数学框架时用到结构稳定性，但他未能将他得到的有关结果推广到更一般的动力系统。斯梅尔1958年申请到国家自然科学基金会两年资助到普林斯顿高等研究院做“博士后”研究，认识了早一年去那里访问的佩肖托，并洞察到这一概念的巨大前景。

但是一开始，斯梅尔就给出了一个关于稳定性问题的错误猜测。其实，在研究家的探索过程中，这不奇怪。现在哈佛任教的卓越华人数学家丘成桐（1949-）因为证明极其难解的“卡拉比（Eugenio Calabi, 1923-）猜想”是对的，1982年荣获菲尔兹奖，但是一开始他差点儿“证出”卡拉比猜想是错的。

生活中到处都有关于稳定性的问题。站在高山之巅上欢呼的人要特别地小心，因为稍有不慎就会坠入深渊。但是年轻的父母不必担心放在圆锥形摇篮内的婴儿会掉下来。前一个情形的平衡状态是“不稳定”的，因为一个小小的扰动就回不了原先的平衡位置，而后一种情形的平衡状态却是“稳定”的，因为任何一个小扰动不会妨碍又回到原先的平衡位置。

上述的“稳定”或“不稳定”是关于一个固定系统的一个平衡点而言，因而称之为“平衡点的稳定性”，这是一个局部性的稳定性问题。斯梅尔关心的是一种全局性的稳定性问题，即当动力系统本身稍微改变一


柯尔莫果洛夫（1903-1987）


阿诺德（1937-2010）


诺维科夫 （1938-）


西奈 （1935-）


维纳（1894-1964）


莱温松（1912-1975）


范德波尔（1889-1959）

点时，系统的解是否有本质性的变化。这就是系统的“结构稳定性问题”。

如果原为圆锥形的山顶削成四面体形锥体，站在上面还是一样危险。同样，如果把圆锥形摇篮做成更为美观的半圆形摇篮，婴儿照样安全。所以，这些系统的小小改变并没有改变平衡点的性质，系统是“结构稳定的”。

有“结构不稳定”的例子吗？会画指数函数图像的人就有一例。中国的高中生都知道每一个以大于 1 的数 $a$ 为底的指数函数 $y = a^x$ 的曲线都经过 $y$- 轴上半部和原点相距为 1 的那个点。它向上弯曲（向下凸）并且递增，底越大，递增越快，曲线越陡峭，底越靠近 1，递增越慢，曲线越平坦。当底为某一个特别的常数时，更确切地说，为 $e$（约为 2.71828）的 $e$ 分之一次方这个在 1.445 附近的常数时，这条曲线恰好与 $xy$- 轴的对角线 $y = x$ 相切于 $(e, e)$ 这个点，并站在对角线的上方。这就保证了这个特别的指数函数有，并且只有一个“不动点”（刚好为 $e$）。只要底比这个常数小，对应的曲线和对角线相交于两点，就是说该函数有两个“不动点”，而底大于这个常数的曲线再也不碰到对角线了，这时的函数就没有任何“不动点”。没有学过高中代数的人可以想象一根竖着的朝上开口的抛物线铅丝向上“穿过”一根挂衣服的水平绳线时的情形：先有两个截点，然后是一个切点，最后没有交点。

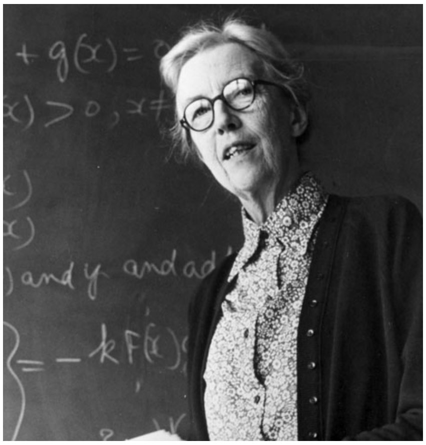
上面一段落的“千言万语”汇成一句话：底为 $e^{1/e}$ 的指数函数这个“系统”是“结构不稳定”的，因为底的变大或变小改变了不动点的数目。实际上，连不动点的性质也起了变化。懂得初等微积分并喜欢读读“课外书籍”的大学生可以打开《美国数学月刊》的姐妹期刊《高校数学杂志》（The College Mathematics Journal）2009 年 11 月的那一期，翻到一篇名叫“指数函数的动力学”的文章，其第二、三页上就有你想要看到的图形和分析。

斯梅尔考虑的描述微分动力系统的微分方程，带有可以取不同值的某些参数。例如，对于洛伦茨研究的热对流天气模型，流体的粘性指数就是一个参数。参数的大变化当然导致系统的解的大变化。自然地，人们都希望，小小的参数变化只会导致系统的解的微小变化，并且不改变解的主要性质，也就是说，系统是结构稳定的。

斯梅尔最开始的错误猜测大意是：具有不规则解的微分方程（即后来所称的混沌系统）不可能是结构稳定的。他定义了一类结构稳定的微分方程，后来被大家称为“莫尔斯（Marston Morse, 1892-1977）- 斯梅尔型”，并宣称任何一个混沌系统都可用这类方程中的一个来任意逼近。学过大学矩阵理论的人可以这样来类比：具有固定行数和同等列数的所有的“非奇异矩阵”都可被看成是“结构稳定的”，而每一个“奇异矩阵”可被某个非奇异矩阵任意逼近。可惜的是，矩阵的这个性质在微分方程中的类似并不成立。

正当斯梅尔和他的太太在里约热内卢的临时公寓里被他们两个婴儿的尿布忙得不可开交时，1960 年元旦前寄来的一位数学同行的信让他大伤脑筋，就像十多年后年轻气盛的明日之星丘成桐公开宣称“卡拉比猜想”不对后不久，收到意大利出生的犹太人、美国宾夕法尼亚大学数学系讲座教授卡拉比本人寄来的“质疑信”那样令人苦恼。

这封信来自一位在维纳的熏陶下由电子工程硕士转变成的数学家、



卡特赖特（1900-1998）

李特尔伍德（1885-1977）

也曾是共产党员并在1953年在专门设立的调查共产党的国会非美委员会巨大压力之下“反悔”的麻省理工学院教授莱温松（Norman Levinson, 1912-1975）。他在信中描述了他于1949年发表的一篇论文中所考虑过的一个既是混沌的又是结构稳定的系统，小小的扰动并不让解的不规则性态消失掉。其实，这个“斯梅尔猜想”的反例是四十年前被一名荷兰工程师和物理学家范德波尔（Balthasar van der Pol, 1889-1959）研究过的刻画具有周期驱动电路的一个二阶非线性常微分方程。这个系统的解是不可预测的，但系统却实实在在是结构稳定的，和摇篮里的婴儿一样稳定得“固若金汤”。事实上，斯梅尔后来知道，洛伦茨将要研究的那三个微分方程解的不规则性在小扰动下也是保持不变的，但是他们当时并不认识对方，直到七十年代初约克把洛伦茨的论文给了斯梅尔后，他才知道洛伦茨这个人及其工作。

得到莱温松这个重量级数学家的启发，受过拓扑学训练而导致几何思维发达的斯梅尔深思熟虑，一下子“豁然开朗”。在他1998年发表在美国大众数学杂志《数学信使》（Mathematical Intelligencer）第二十期上的混沌：在里约的海滩上发现马蹄”这篇文章里，他回忆道：

“无论如何我最后说服自己莱温松是对的，而我的猜想是错了。混沌已经隐含在卡特赖特与李特尔伍德的分析之中！迷途已经解开，而我则作出错误的猜测。但是在这学习的过程中，我发现了马蹄！”

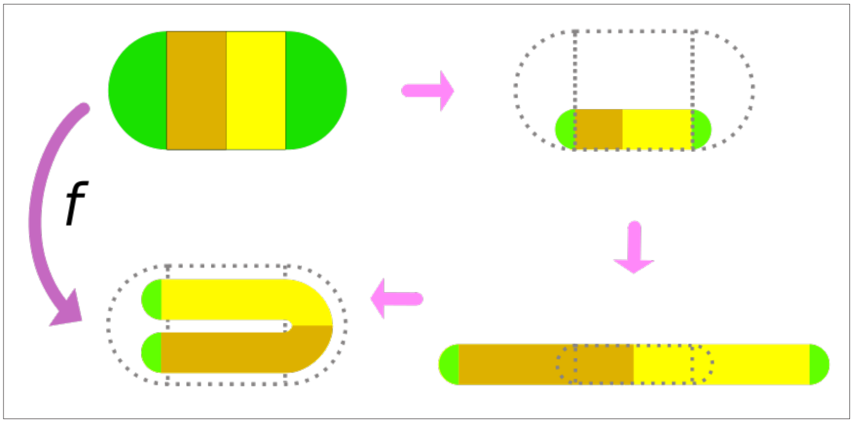
作为哈代（Godfrey H. Hardy, 1877-1947）与李特尔伍德（John E. Littlewood，1885-1977）这一“强强联手”在哈代70岁过世之后的“解析延拓”——哈代的博士生、“少有翻版”的英国女数学家卡特赖特（Mary Lucy Cartwright,1900-1998）与李特尔伍德形成了一个新的“科学组合”，他们对微分方程理论的精深研究，影响了这个领域的几代学者。

这个孕育在巴西海滩上的斯梅尔“骏马铁蹄”是怎样的东西？它又怎样踏进混沌的疆场？

我们在纸上画一个长方形，用A、B、C、D从左下角起顺时针来依次记它的四个顶点。我们设想把长方形横向拉长，同时纵向缩短，变成一个瘦长的长方形。这个过程有点像山西人做拉面，面条越拉越长、越拉越细。然后把它弯曲成一个马蹄形，使得长方形的左边出现在马蹄的上面顶端。马蹄对应的四顶点依次记为A’、B’、C’、D’。下一步将马蹄放到原先的长方形上，它们相交成位于长方形内的两个有一定距离的平行的狭长长方形。

把这些操作复合成一步完成，就可以想象这定义了一个把长方形映到马蹄上的函数 *h*，它把长方形的每一个点映射到马蹄的一个点，例如，*h* 把A点映到A’点，不同的点映到不同的点，相近的两点映到相近的两点。反过来，马蹄的每一点都是长方形的某一点被 *h* 映来。这个函数是一个拓扑学家们经常挂在嘴上的“拓扑同胚”。

斯梅尔构造的这个“马蹄函数”不属于他以前提出的“莫尔斯-斯梅尔型”的。他证明它不光是混沌的，而且是结构稳定的。其混沌与庞加莱在求解“三体问题”时苦苦思索




斯梅尔的“马蹄

康托尔（ 1845-1918）

康托尔三分集

过的同宿点存在性有关。同宿点联系着系统在将来和过去的相反方向时间都趋向于同一个不动点这一平衡状态。从美国第一代数学家领袖之一莫尔（Eliakim Hastings Moore, 1862-1932）手中拿到芝加哥大学博士文凭的伯克霍夫沿着庞加莱的思路进一步证明在同宿点附近有无穷多个周期状态。但是他的工作在之后的几十年内只是在故纸堆里睡大觉，一直到斯梅尔在巴西的研究所里叫醒它。

斯梅尔还记得当时的情形："我从检视纯粹与应用数学研究所图书馆内的伯克霍夫文集而知悉同宿点和庞加莱的工作。"

我们已经看到在马蹄函数作用一次后，原先的长方形中有一部分的点将留在长方形内，这些点事实上构成两个平行的瘦高长方形。运用想象力，可以感知如果连续作用马蹄函数两次，那些仍然留在长方形内的那些点将组成四个平行的更瘦削的长方形。作用三次，就有八个平行的细细的长方形，看上去像物理光学实验课上看到的黑白相间的光谱线，它们的点在迭代马蹄函数三次后还留在原先的长方形内。不断迭代下去，我们就会"看"到愈来愈细、愈来愈多的"光谱线"。山西手工拉面的行家可能更容易体会它：多次拉面的动作就会拉出越来越多、越来越细的面条。这个漂亮的"几何图像"让我们立刻想起一个人，一个由于受到大权在握、极其富有金钱的同胞数学家克罗内克（Leopold Kronecker, 1823-1891）全方位的"数学迫害"，前后三十年一连串精神失常并在疯人院度过一生最后时光的倒霉德国人——"集合论之父"康托尔（Georg Cantor, 1845-1918）。

十九世纪末期的1883年，康托尔构造了实数轴上的一个点集合。他把0到1之间的数区间[0, 1]这一线段分成三等份，然后把中间那个等份的线段去掉，但留下它的1/3和2/3这两个端点。在剩下的两个线段[0, 1/3]和[2/3, 1]中再去掉中间的三分之一。这样就剩下四个小线段：[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]。再去掉每一段中间的三分之一，如此重复做下去，直至无穷。这样构造的一个点集称为"康托尔三分集"，它包含所有被挖掉的线段的端点和其他没被挖掉的点。事实上，这个康托尔集由不可数个点组成，但它本身不包含长度可以任意小的任何线段，无限地稀疏。

康托尔三分集的几何有个有趣的特色，这个称为"自相似性"的性质后来被"分形学"借了过去而大放异彩。如果我们只局限于看到三分集从0到1/3的这一段，一旦放大三倍，就会发现它的结构和原先的整个三分集一模一样。把0到1/27这一段放大27倍也是一回事。其实，三分集的任一小段放在放大镜下看都和整个三分集完全相同，就像小皮球放大一亿倍后看上去是个大月亮。这个数3就是康托尔集自相似性的"放大因子"。

康托尔的这个集合虽然出现在数学系本科生所修的课程《实变函数论》的教科书中，但跟他的其他伟大发现相比简直是"小巫见大巫"，只是他创造的震撼数学界的"集合论"大餐中的"一碟小菜"而已。故贝尔在他的大作《数学伟人传》中最后一章"失乐园？康托尔"谈到他的数学时就根本没提及到它。康托尔集除了在《实变函数论》中偶尔露个面，被关在集合论的象牙塔里几乎一百年，和美不胜收的自然界"老死不相往来"。

斯梅尔的马蹄动力学就这样和康托尔三分集联姻起来。将伯克霍夫早先的想法再向前推进，斯梅尔证明了他的马蹄函数同宿点的存在以及由此产生的迭代过程最终性态对初始状态的敏感依赖性，而这就是混沌的本质。几年后，他那里程碑式的著名长篇综合报告"微分动力系统"也在1967年被《美国数学会通报》（Bulletin of the American Mathematical Society）发表，马上被这个领域的建筑师们欢呼为一座"标志性大厦"

当数学家斯梅尔在他的微分动力系统开创性研究中大玩"高深数学"而大显身手的时候，他大概对一般只用到一点点"低级数学"的

马尔萨斯（1766-1834）

马寅初（1882-1982）

罗伯特•梅（1936-）

生物学“不屑一顾”。然而，就在这时，普林斯顿大学的一位动物学教授斩钉截铁地向世界宣告：简单的数学模型也可能复杂得令人咋舌。

## （六）莫名其妙的人口涨落

十八世纪末的1798年，英国有位名叫马尔萨斯（Thomas Robert Malthus, 1766-1834）的经济学家出版了一本书《人口论》，忧心忡忡地提出了他的“人口理论”：人类赖以生存的生活资料是以算术级数增长的，然而人类自己却是以几何级数增长的。如果 $n$ 代表未来的年数，前者的增长像 $n^2$，后者的像 $2^n$。当 $n$ 为20时，$20^2$ 仅为400，但 $2^{20}$ 已经超过一百万。马尔萨斯解决人口过剩的简单而冷酷的办法是：战争。

一百六十年后，东方的中国也有一位姓马的经济学家。他的全名是马寅初（1882-1982），早年拿过美国哥伦比亚大学的博士学位，时任北京大学的校长。1957年，他在《新人口论》中也忧心忡忡地担心中国的人口如不注意节制，就增长太快了。他的担心是对的，但是相信“人多力量大”的最高领导认为他杞人忧天，不是另一个姓马的“共产主义之父”马克思的信徒。虽然他多年失去话语权，但每天洗冷水浴的他比活了99岁的贝特还多活一年。

“人口动力学”这个学科并不一定要研究人，尽管研究人口很重要。中国人宋健（1931-）的“人口控制论”研究就在国际上有口皆碑。人口动力学更正式的名字叫“生态学”，英文术语是Ecology，研究的是生物种群数目的涨落、生命的盛衰。曾为英国“首席科学家”的罗伯特•梅（Robert M. May, 1936-）男爵就是在生态学领域里发现了混沌现象的一位生态学家。

梅和乌拉姆一样，生于律师之家，但不是犹太人。他1959年在祖国澳大利亚的悉尼大学获得理论物理学博士学位，然后去哈佛做了两年“博士后”，研究应用数学。回到母校做到理论物理正教授之后，他“心血来潮”地对生物学着了迷，1971年他到普林斯顿高等研究院呆了一年，不干别的，专找普林斯顿大学的生物学家“聊天”。1973年，硕果累累的他就成为普林斯顿大学的动物学讲座教授。

当年马尔萨斯的人口无限制增长模型太过粗糙了，因为它只用到线性函数。在食品无限充足的最理想情况下，如果一个种群的数目每年按某个增长率增加，那么种群下一年的数目为一个大于1的参数 $r$ 乘上当年的数目，即迭代的函数为线性函数 $f(x) = r\,x$。这样的话，种群个数最终趋向无穷大，就像放在银行的存款永远不拿那样。然而，任何生命体有生，也有死，有复杂的生存环境，如天敌的存在。非洲狮子的数目不可能无限制增加，因没有足够多的斑马供它们享用，同样，斑马也不会太多，因为狮子总想吃它们。

这样，种群的数目必定随时间有升有降。要得到更反映现实的模型，生态学家合理地假设：种群数小时上升很快，数目适中时增长速度为零，而在数大时急剧下降。如果我们用0表示绝种，用1表示可设想的最大种群数，那么“相对种群数”$x$ 由0与1之间的一个数来表示。满足上述自然要求的最简单的“相对种群数”函数是拿原先的线性函数 $r\,x$ 乘上因子 $(1 - x)$，得到的函数是一个二次多项式 $f(x) = r\,x\,(1 - x)$，其中参数 $r$ 代表着种群的增长率。当 $x$ 上涨时，$1- x$ 下跌，它们的乘积就会制约种群数目的变化。

这个最简单的二次模型称为“逻辑斯蒂模型”。它的函数图像是开口向下的抛物线。当 $x$ 从0上升到1/2时，函数也跟着上升，但当 $x$ 从1/2继续上升到1时，函数却随之下降。这恰恰反映了种群数目的涨落规律。