复数及其文化意义

薛有才

虚单位 i 以及由此产生的复数 $a+bi$ 在数学的发展史上具有非常重要的文化意义，它与非欧几何等现象改变了人们对于数学的认识，对于人类思想史、认识论的发展产生了重大影响。

1 复数的历史

历史上第一个遇到虚数的人是印度数学家婆什迦罗（Bhaskara Acharya, 约 1114-1185 年），他在解方程时认为方程 $x^2=-1$ 是没有意义的，原因是任何一个实数的平方都不会是负数。

大约过了 300 多年，1484 年法国数学家许凯（N. ChuQuet, 约 1445-1500 年）在《算术三篇》一书中，解方程 $x^2-3x+4=0$ 时得到的根是 $x=1.5\pm\sqrt{2.25-4}$。由于根号里的数是一个负数，所以他被这个“怪物”弄得不知所措，于是他发表声明称这个根是不可能的 [1]。

可以说，婆什迦罗与许凯都“发现”了虚数，但是他们没有认识到这将导致一种新的数的诞生，从而放弃了这个重大的机会。

时间大约又过了 60 多年，1545 年意大利数学家卡尔达诺（G. Cardano, 1501-1576 年）在他的著作《大术》中记载了如下的乘法运算：$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$。这是世界数学史上第一次明确表示虚数的符号，也是虚数第一次的数学表示方法。当时，他用的符号是：*RM*: −15. 其中的 *R* 表示根号，*M* 表示负数符号，它宣告了虚数的诞生。卡尔达诺明白一个负数开平方是不允许的，所以无法解释负数的平方根是不是“数”，于是他在书中写到：“不管我的良心会受到多么大的责备，事实上 $(5+\sqrt{-15})$ 乘以 $(5-\sqrt{-15})$ 刚好是 40”! 他称 $\sqrt{-15}$ 这个数为“诡辩量”或“虚构的”量。他认为一个正数的根是真实的根，而一个负数的根是不真实的，虚构的，或者是虚伪的数，虚构的数，也是神秘的数。这就如他在书上所写的：“算术就是这样神秘地进行，它的目的正像人们说的又精密又不中用。”[2]。这里，不管卡尔达诺对虚数的认识是如何的肤浅，但他毕竟是世界上第一个记述了虚数的人，也可以说是他“发明”了“虚数”。

到了 16 世纪末，法国数学家 F. Viete 和他的学生 T. Harriot 可以说是首先“承认”复数的数学家。虽然他们也认为应该把虚数排斥在数系以外，但在碰到解方程一类问题时，可以“开通一点”, 把它当数来对待。

几乎是在同时，意大利数学家邦别利登上了虚数的舞台。1572 年，邦别利在解三次方程 $x^3=7x+6$ 时也碰到了虚数的问题，但与前人不同的是，他认为，为了使方程存在的这种根得到统一，必须承认这样的数也为该方程的根，而且类似的数都应该得到承认，让它们进入数的大家庭，他还创造了符号 $R[Om9]$ 表示虚数 $\sqrt{-9}$ [3]。

虚数就这样在承认与不承认之间一直被拖着，时间很快就进入了 17 世纪，1629 年，荷兰数学家吉拉尔（A. Girard, 1595-1632 年）在他的《代数新发明》一书中引入了 $\sqrt{-1}$ 表示虚数（虚单位），而且认为引入虚数不仅对于解方程是有用的，而且能满足一般运算法则。

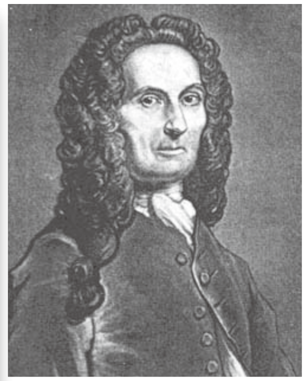
第一个正确认识虚数存在性的数学家当属法国著名

对复数使用和研究做出贡献的数学家

法国人 F. Viete (1540-1603)

荷兰人 Albert Girard (1595-1632)

法国人笛卡儿 (1596-1650)



法国人 De Movire (1667-1754)

哲学家、数学家笛卡儿。虽然他在开始时也认为负数开平方是不可思议的的事情，但后来他认识了虚数的意义与作用，开始公开为虚数辩护，并第一次把方程“虚构的根”之名称改为“虚数”，以与“实数”相对应。他也称类似于 $a+bi$ 这样的数为“复数”，这两个名称一直使用到今天。特别是，他用法文 imaginaires 的第一个字母 i 表示虚数 $\sqrt{-1}$。于是虚单位诞生了。

到了 18 世纪，虽然对于复数是不是数还存在很大的争议，但它却已经进入了数学的运算之中。微积分发明人之一的德国数学家莱布尼茨就应用复数进行有理函数的积分运算，尽管他并没有明确承认复数。特别是在这一阶段发现了许多漂亮的复数公式，使得人们对它充满了好奇，吸引人们更多地去研究它。如下就是一些著名的公式：

1722 年，法国数学家棣模佛（De Moivre）发现了著名的棣模佛公式：

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx\ .$$

1743 年，瑞士数学家欧拉发现了著名的欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\ .$$

由欧拉公式，我们立即可得

$$e^{i\pi}+1=0\ .$$

这一公式真是太神奇了！它把自然数 e，圆周率 π，虚单位 i，实单位 1 以及数 0 联系在一起。这是自然界的奇妙，还是数学的奇妙，我们无从而知。但这一公式确是造化弄人，妙不可言。

1777 年 5 月 5 日，欧拉在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中，公开支持 1637 年笛卡儿用字母 i 表示虚数 $\sqrt{-1}$ 的思想 [1]。可惜的是，这一思想同样没有引起人们的注意。

与此同时，许多数学家希望找到虚数的几何表示，特别是像实数那样在数轴上找到点与之对应。第一个作出这种努力的数学家是牛津大学的数学家沃利斯（J.Wallis, 1616-1703）。虽然他并没有解决这一问题，但他确实在这方面付出了努力。

真正解决了虚数几何表示的数学家首先应是丹麦业余数学家、测绘员韦塞尔（C. Wessel），他在 1797 年向丹麦科学院递交了题为《关于方向的分析表示：一个尝试》的论文，在坐标平面上引进了实轴与虚轴，从而建立了复数的几何表示。韦塞尔发现，所有复数 $a+bi$ 都可以用平面上的点来表示，而且复数 $a+bi$ 与平面上的点一一对应。这样一来，复数就找到了一个立足之地而且开始在地图测绘学上找到了它应用的价值。但同样地，他的思想也没有引起注意。

与此同时，爱尔兰数学家哈密尔顿（W. R. Hamilton, 1805-1965）发展了一个复数的代数解释，每个复数都用一对通常的数来表示：(a,b)，其中 a,b 为实数。哈米尔顿所关心的是复数的算术逻辑，而并不满足于几何直观。他指出：复数 $a+bi$ 不是像 1+2 那样意义上的一个加法或求和，加号在这里仅仅是一个记号，不表示运算，bi 不是加到数 a 上去的。复数 $a+bi$ 只不过是实数的有序数对 (a,b)，并给出了有序数对的四则运算：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$$

同时，这些运算满足结合律、交换率和分配率。由此，复数被逻辑地建立在实数的基础上，而且事实上已经是实