理性文明两千年
——概述与重访（上）

项武义

>> 本文将以简朴平实的表述，概括其精要；并且再以简洁易懂的途径和数理分析重访前述三个重大突破。我觉得唯有如此才能让有智而且有志的中华儿女，踏着巨人的脚印，迈步奋进，投身于承先启后，继往开来的理性文明之长河。

§1. 引言

理性文明 (Civilization of Rational Mind) 的启蒙，至少可以追溯到纪元前六、五世纪的毕达哥拉斯学派 (Pythagoreans)；世代相承，逐步演进，一直到四百年前开普勒 (Kepler) 的《新天文学》(Astronomia Nova) 和 1687 年牛顿 (Newton) 的《自然哲学的数学原理》(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)，才奠定了现代科学蓬勃进展的基础。纵观这两千多年理性文明的发展史，其主轴与重大进展主要在几何学、天文学与物理学；古希腊的几何基础论，开普勒的《新天文学》和牛顿的《原理》乃是在上述三者的重大突破，是理性文明史上三个光芒万丈的伟大里程碑！再者，太阳系永恒之舞的研究则又是一个贯串几何、天文、物理两千年的核心议题和主角。

我们所在的地球和其它行星 (planets) 如金、木、水、火、土等星绕日运行，如今已是众所周知的常识。但是，此事一直到四百年前开普勒行星定律的伟大发现才真相大白！各个行星漫游于星际的行踪奇特各异，其理何在？此乃古天文学的核心议题，也是希腊几何学之量天巨梦，堪称“千古之谜”！开普勒的伟大发现不但使得困惑理性文明两千多年的“千古之谜”真相大白，也圆了希腊几何学的量天巨梦。我们所在的地球和地球所在的太阳系的永恒之舞，其实是如此精简完美！大自然的至善、至美、至精、至简，令人叹为观止！再者，由如此简朴精到的实验性定律 (Empirical Laws)，再加以精益求精的数理分析，就不难探本究源顺理成章地认识到行星定律的“数理本质”在于个别行星运行的加速度(acceleration) 指向太阳而且其大小和“日-星距”的平方成反比（参看 §6），此乃天上之理。若将它和伽利略 (Galileo）的重力实验 (人间之理) 相比较，则天上人间合而为一，即得牛顿万有引力定律 (Law of Universal Gravitation)。太阳系永恒之舞的千古之谜，引人入胜，贯串几何、天文、物理两千年的进展，令人神往！发人深思！本文将以简朴平实的表述，概括其精要；并且再以简洁易懂的途径和数理分析重访前述三个重大突破。我觉得唯有如此才能让有智而且有志的中华儿女，踏着巨人的脚印，迈步奋进，投身于承先启后，继往开来的理性文明之长河。

>> 理性文明两千年是一个极大的题目，在目下创刊的期刊中，肯定还会涌现很多这个题材的论著，试写这篇短文，只是一种 砖引玉。为我们相互切磋，返璞归真地研讨这个大题目起个头绪。

本文有很多素材取自张海潮、姚珩和本文作者合写的小册子《千古之谜与几何、天文、物理两千年》（高教出版社）2010 年出版。可以说本文实乃它的摘要和另一侧面，而上述小册子则是本文的主要参考文献。理性文明两千年是一个极大的题目，在今后出版的刊物中，肯定还会涌现很多这个题材的论著，试写这篇短文，只是一种抛砖引玉之举。为我们相互切磋，返璞归真地研讨这个大题目起个头绪。

毕达哥拉斯 (Pythagoras) 所创导的哲理：宇宙的和谐与精要在于数、比值和完美的几何形体之妥善配合。若改用现代的说法和后见之明，毕达哥拉斯当年的灼见就是：数理分析乃是认知大自然的不二法门，而大自然的至精至简则是以数学形式表现者 (written in mathematics)。总之，一方面，基础数学在文明中扮演着核心的角色；而另一方面，基础数学教育与学习，当然要从它和理性文明的水乳交融中才能平实近人，引人入胜。

§2. 古希腊几何学与天文学——概述其要

古希腊文明是在继承古埃及和古巴比伦文明的基础之上，特别在天文学和几何学方面力求精进更上一层楼。早在纪元前六、五世纪，毕达哥拉斯本人创导宇宙具有和谐的内在结构的宏伟哲理；并且提出数、比值和简朴完美的几何形体是研究自然的主要途径。这个含义深远的卓见，不但启发其门人 (世称 Pythagoreans) 致力于数与几何的研究，也启示着两千多年世世代代的文明继承者，定量的数理分析乃是探索自然内在结构的不二法门。

2. 1 定量平面几何基础（初）论

古希腊几何学是在继承古埃及和古巴比伦的几何知识的基础之上再更上层楼逐步精进发展而成的。在其启蒙阶段先行研讨定性平面几何 (qualitative plane geometry)，主要是对于三角形的几个叠合条件 (congruence conditions) 如边角边、角边角、边边边的等价性，等腰三角形定理和基本作图的讨论；所得者可以说乃是平面对于轴对称的诸多反映。

及至纪元前六、五世纪，特别是毕达哥拉斯学派开始致力于定量平面几何基础论的建立，从古埃及和巴比伦文明的考古发现，可以推想定量平面几何的好些基本公式，如矩形面积等于长乘宽，三角形面积等于二分之一底乘高，甚至于直角三角形的边长平方和关系式（亦即勾股定理）在当年业已是常用的通识，但是并没有给以严格论证；而当年古希腊几何学家们所致力者就是给这些基本公式给出系统的严格论证。当他们着手研讨定量平面几何基本公式的论证的起步时刻，很自然地认识到下述两点，即

其一：长度是一切几何量中的最基本者，所以长度度量的概念当然得先行严格定义。在此他们引进可公度性 (commensurability) 这一概念，即 a , b 同为另一公尺度 (common yardstick) c 的整数倍，亦即 $a=m\cdot c$， $b=n\cdot c$，则 a , b 长度之比值定义为 $a:b=m/n$ 。再者他们还判定任何两个线段总是可公度的，并以此判定 (即 universality of commensurability) 作为基础论的头号公设（或公理）。

其二：他们认识到基于平行性的平行分割乃是论证这些基本公式的必经之途，所以在进而研讨定量几何基础论之起步，引入现在称之谓第五公设 (fifth postulate) 者，作为论证之依据，即如图 - 1 所示之同傍内角 ∠1, ∠2 之和，若小于一个平角，则 l_1 和 l_2 必相交于 l 之该侧。

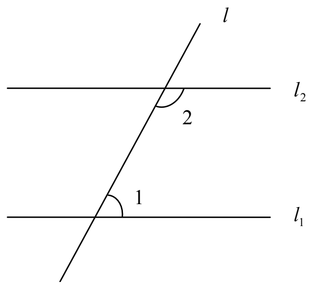

图 - 1

历史的注记

(i) 众所周知，易证上述第五公设和三角形内角和恒等于一个平角是逻辑相等的。

(ii) 当年的定性平面几何并没有发现下述不难证明的两个定理，即（参看图 -1）

定理 1：*三角形内角和恒小于或等于平角。*

定理 2：*若有一个三角形 ABC 的内角和等于平角，则所有三角形的内角和皆恒等于平角。*

(iii) 由此可见，当我们由定性平面几何向定量平面几何推进时，在三角形内角和上有唯二的两种选项，即恒等于 π 或恒小于 π；前者是当年选用的欧氏几何，而后者则是一直到十九世纪才发现的非欧几何 (Non-Euclidean Geometry)。

2. 2 石破天惊，几何巨震——希帕索斯

发现不可公度比：

上述古希腊的基础论的两个基石之中，“平行公设”是使得定量平面几何的基本公式如面积公式等等都既精且简的必要选项，但是可公度性的普遍成立这个头号公设却根本是谬误的！这就是下述希帕索斯 (Hippasus）在纪元前五世纪的伟大发现：不可公度线段的存在！如图 - 2 所示，设 a 和 b 分别是一个正五边形的边长和对角线长，则 $\lambda_1=(b-a)$ 和 a 又是一个小一号的正五边形的边长

>> 早在纪元前六、五世纪，毕达哥拉斯本人创导宇宙具有和谐的内在结构的宏伟哲理；并且提出数、比值和简朴完美的几何形体是研究自然的主要途径。这个含义深远的卓见，不但启发其门人致力于数与几何的研究，也启示着两千多年世世代代的文明继承者，定量的数理分析乃是探索自然内在结构的不二法门。

和对角线长。由此可见，a 和 b 的辗转丈量在长度上的表式如下：

$$b=a+\lambda_1,\quad a=\lambda_1+\lambda_2,\quad \cdots\quad,\quad \lambda_{k-1}=\lambda_k+\lambda_{k+1},\quad \cdots$$

其中 $\{\lambda_k,\lambda_{k+1}\}$ 总是一个愈来愈小的正五边形的对角线长和边长，永无止休！所以是不可公度的！

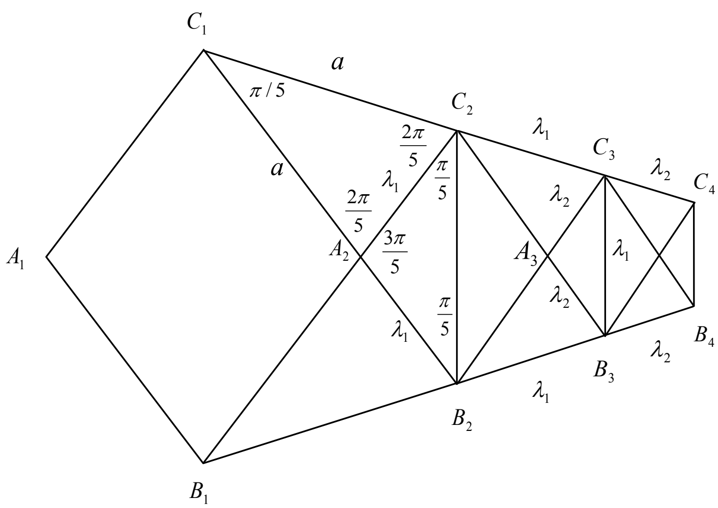

图 - 2

2. 3 几何基础论的震后重建——脱胎换骨，得见精深：欧多克索斯逼近论的伟大创见

话说当年，希帕索斯的伟大发现，雄辩地指出当年希腊文明引以自豪的几何基础论乃是建立在一个根本错误的头号公设之上者。这个石破天惊的几何巨震 (geoquake) 使得当代的几何基础论摇摇欲坠，整个希腊几何学界无比难堪！

其实，不可公度量的发现，并非全面否定初论的成就，此事只不过明示原先认为完整无缺的论证乃是仅仅对可公度这种特殊情形的证明，而一般不可公度的情形，则尚有待补证，这就是当年希腊几何学亟待补救的震后重建之任务。大约经历了大半世纪的努力，此事终于促使欧多克索斯 (Eudoxus, 408-355 BC) 创建逼近论 (Theory of Approximation) 而完满达成。它不但使得几何学脱胎换骨，浴火重生，而且使得理性文明得以连续世界之精深，奠定了分析学的重要基石，是理性文明发展上第一个光芒万丈的里程碑。兹概述其要如下：

>> 希帕索斯的伟大发现，指出当年希腊文明引以自豪的几何基础论乃是建立在一个根本错误的头号公设之上者。这个石破天惊的几何巨震 使得当代的几何基础论摇摇欲坠，整个希腊几何学界无比难堪！

相信当年很可能是下述“相似三角形定理如何补证”这个问题，促使欧多克索斯创建其逼近论：

相似三角形定理：

设 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 的对应角分别相等，则其对应边成比例，亦即

$$\angle A=\angle A',\quad \angle B=\angle B',\quad \angle C=\angle C'$$

$$\Rightarrow\quad a:a'=b:b'=c:c'$$

〔分析〕：当上述三角形有一对对应边的比值是分数 m/n 时 (亦即可公度)，当年业已用平行分割法证明其余两对对应边的比值也等于 m/n。由此可见，所需要加以补证的情形乃是三对对应边皆为不可公度的情形，如何证明它们的“比值”依然相等？

首先，欧多克索斯认识到两对不可公度的线段的“比值”，例如 $a:a'$ 和 $b:b'$，其相应的概念尚有待明确。因为它们不再是分数，在本质上还是一种有待理解的“新东西”。上述情况可以概括成：可公度比是“已知”的分数；而不可公度比则是有待理解的“未知”。两者不相等但是其大小关系的实质内涵却又其义甚明，这就是下面叙述的欧多克索斯逼近论的起点：

比较原则：设 a 和 a' 不可公度，则

$$a:a'\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}\frac{m}{n}\quad\Leftrightarrow\quad a\begin{Bmatrix}\text{长于}\\\text{短于}\end{Bmatrix}\frac{m}{n}a'$$

$$\Leftrightarrow\quad n\cdot a\begin{Bmatrix}\text{长于}\\\text{短于}\end{Bmatrix}m\cdot a'$$

由此顺理成章，使得他认识到不可公度比之间的大小和相等的定义如下：

(i) 若有分数使得

$$a:b\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}\frac{m}{n}\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}c:d$$

则有 $a:b\begin{Bmatrix}>\\<\end{Bmatrix}c:d$，反之亦然。

(ii) 若对于任给正分数 m/n，它和 $a:a'$ 和 $b:b'$ 的大小关系总是同步的，则定义

$a:a' = b:b'$，亦即

$$na\begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix}ma' \quad 和 \quad nb\begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix}mb'。$$

对于任给 m， n 皆为同步，则定义 $a:a' = b:b'$。再者，为了使得上述简朴、精到的定义更有说服力，他还论证了下述逼近定理：

逼近定理：

对于一个给定的不可公度比 $a:b$ 和一个任意大的正整数 N，恒有另一正整数 m 使得 $\frac{m}{N}<a:b<\frac{m+1}{N}$。

有鉴于证明是不可能无中生有的，所以上述定理的证明当然也要有所本。为此，他提出现今误称为阿基米德（Archimedes）公理者，作为上述论证之依据，即

Eudoxus 公设：任给两个线段 l 和 s，不论 l 有多长，s 有多短，恒有足够大的整数 n 使得 $n\cdot s$ 比 l 长。

〔逼近定理的证明〕：取 $l=a$，$s=\frac{1}{N}b$。令 $m+1$ 为使 $n\cdot s>l$ 的最小正整数，则有

$$m\cdot\frac{1}{N}b<a<(m+1)\cdot\frac{1}{N}b，亦即 \frac{m}{N}<a:b<\frac{m+1}{N}。$$

这样就证明了逼近定理。□

推论 1：设 $a:b$ 和 $c:d$ 是两个不相等的不可公度比，即

$$a:b\begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix}c:d，$$

则存在有分数 m/n，使得

$$a:b\begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix}\frac{m}{n}\begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix}c:d。$$

〔证〕：两种情形的证法完全一样，只证 $a:b<c:d$ 的情形。取 N 足够大，使得 $1/N$ 小于其差 $(c:d-a:b)$。则前述 $(m+1)/N$ 必然满足

$$a:b<\frac{m+1}{N}<c:d。假若不然，则有$$

$$\frac{m}{N}<a:b<c:d<\frac{m+1}{N} \Rightarrow (c:d-a:b)<\frac{1}{N}$$

和所取 $1/N$ 小于 $(c:d-a:b)$ 矛盾。□

推论 2：设 $a:a'$ 和 $b:b'$ 对于任给分数的大小关系相同，则 $a:a' = b:b'$。由上述逼近定理，$a:a'$ 和 $b:b'$ 之间的差别要比任给 $1/N$ 还要小，它只能是零！

欧多克索斯对于相似三角形定理之补证：

对于任意大的 N，取 m 使得

$$\frac{m}{N}<a:a'<\frac{m+1}{N}$$

如图 -3 所示，取 C_N 和 C_N^* 使得

$$\overline{BC_N}=\frac{m}{N}a'，\quad \overline{BC_N^*}=\frac{m+1}{N}a'$$

而且 $\overline{A_NC_N} \mathbin{//} \overline{AC} \mathbin{//} \overline{A_N^*C_N^*}$。

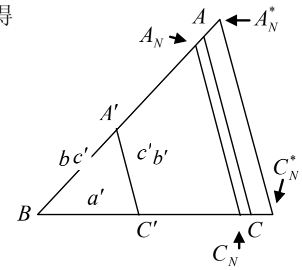

图 - 3

由可公度比的相似三角形定理，即有

$$\frac{m}{N}=\overline{BA_N}:\overline{BA'}<c:c'<\overline{BA_N^*}:\overline{BA'}=\frac{m+1}{N}，$$

$$\frac{m}{N}=\overline{A_NC_N}:\overline{A'C'}<b:b'<\overline{A_N^*C_N^*}:\overline{A'C'}=\frac{m+1}{N}。$$

所以 $b:b'$ 和 $a:a'$（以及 $c:c'$ 和 $a:a'$）之间的差别必须是零，因为它们都要比可以小到任意小的 $1/N$ 还要小！□

历史的注记

（i）当年欧多克索斯就是用同样的逼近论证，简朴精到地把原先只是在可公度比的特殊情形下具有证明的基本公式逐一补证，使得它们在不可公度比的一般情形也都普遍得证。重建几何基础论的丰功伟业，得以简洁完美地达成。

（ii）如今回顾反思，在定性平面几何中，我们基本上只用对称性，但是到了定量平面几何，平直性（亦即平行性或三角形内角和恒为平角）和连续性就自然而然地展现其重要性；前者是可公度比的情形的论证之所基，而后者则是进而推广到不可公度比的一般情形的论证之所本。

逼近与极限，连续性的认知与拓展：

希帕索斯的不可公度比的发现，深刻地触及空间连续性的本质；而欧多克索斯的逼近论则开拓了理解连续世界的简洁途径；前者为理性文明发现了连续世界，而后者则教导我们如何去认知天衣无缝的连续世界。改用现代常用的术语，就是妥用比较原则和上、下夹逼数列，以“已知之简”去逼近“未知（亦即待知事物）”；其实就是通常“以简御繁”，以已知理解未知这种简朴的哲理的量化和精确化。回顾当年欧多克索斯在重建几何基础论中，他所一再运用者乃是被夹逼于妥加构造的一对夹逼数列之间的数 α 之唯一性，即若有

α 和 α' 满足

$$a_n \to \left\{\begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix}\right\} \leftarrow b_n,\ (b_n - a_n) \to 0,\ 则\ \alpha = \alpha'。$$

$$因为 |\alpha - \alpha'| \le (b_n - a_n) \to 0 \Rightarrow |\alpha - \alpha'| = 0。$$

在此，当然还会想到被夹逼于一对上、下夹逼数列之间的 α 的存在性问题，即

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别是递增和递减数列，而且 $b_n \ge a_n$，$(b_n - a_n) \to 0$，是否恒有一个实数 α 被它们夹逼于其间？亦即 $a_n \le \alpha \le b_n, \forall n$。

在此不妨设想当年几何大师欧多克索斯在讲述逼近论时，曾有一位听者有此一问，大师的回答又将如何？我觉得不论他自己是否业已想过上述存在性问题，他都会先说：这倒是一个好问题！然后在稍加思考后，用下述图解说明其答案是肯定的。

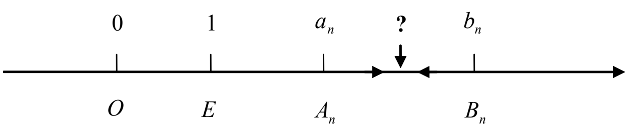

图 - 4

因为假若不存在，则直线岂不是在那里缺了一点！此事和直线连续不断但是一剪就断的直观本质相矛盾！换言之，上述存在性其实就是上述直观本质的解析描述。直线连续不断，但是一剪就断乃是空间连续性直观简朴的刻画，通过逼近法把它转化成夹逼数列的存在性这种解析描述（又是几何直观的量化和精确化！），它就可以用来论证分析学、几何学、代数学中各种各样的存在性定理之所基，洋洋大观，多彩多姿令人叹为观止！连续世界之美妙，有如无缝天衣；欧多克索斯的逼近思想，简朴精到，大智若愚，大巧若拙。大师风范高山仰止，令人神往心仪，自当学而时思之！在此不禁赞叹：无缝天衣尚须匠心裁！

2.4 古希腊天文学简介

天文学是古希腊文明世代相承用力最多、最深的学科。量天巨梦直接促进了古希腊几何学的发展；天文与几何，相辅相成齐头并进，乃是古文明中最为辉煌的两大支柱，此事至少可以追溯到希腊文明所继承的古埃及与古巴比伦文明。对于日、月、星象周而复始的运行的长期观察与详细纪录，其中最令人难以理解者是有五颗明亮的行星，即中国古代称之谓金星、木星、水星、火星和土星而西文称之谓 Venus，Jupiter，Mercury，Mars 和 Saturn 者，它们漫游于黄道十二宫 (zodiac zones) 的星座之间，行踪独特怪异（例如各有其逆行现象），其理何在？令古天文学家们困惑难解，堪称“千古之谜”！它也就自然而然地成为古希腊天文学的核心议题。世代相承想方设法以妥加组合的几何模型来解说行星的视运动（亦即行星漫游星际的独特行踪）。在这方面历经六、七个世纪所得的成果，在托勒密 (Ptolemy) 的巨著《至大论》(Almagest) 中集其大成。如今回顾它所达成者，乃是对于日、月、行星的视运动具有相当不错的可预测性的一套几何模型，但是在本质上却是一种和实况不符的地心论 (geocentric theory)。我们在此仅简略的介绍其梗概，给下一节所要讨论的天文学文艺复兴提供一个参照的历史背景。

在长达六、七个世纪世代相承对于行星之谜的探讨之中，古希腊两位最杰出的几何大师欧多克索斯和阿波罗尼斯 (Apollonius, 262-190 BC) 先后提出当代最有影响的几何模型，即前者的同心球天体模型和后者的本轮一均轮天体模型：

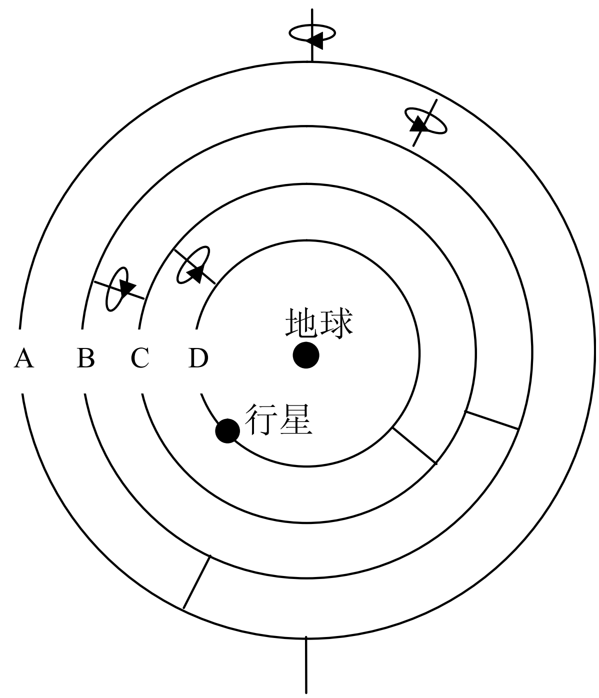

图 - 5