虚数的意义

阮一峰

有人在问答网站 Stack Exchange 提问：

“我一直觉得虚数(imaginary number)很难懂。中学老师说，虚数就是-1的平方根。

$$i=\sqrt{-1}$$

可是，什么数的平方等于-1呢？对-1求平方根，计算器直接显示出错！

直到今天，我也没有搞懂。谁能解释，虚数到底是什么？它有什么用？”

很多人在问题下面给出了自己的解释，还推荐了微软公司工程师 Kalid Azad 写的一篇非常棒的文章《虚数的图解》[1]。我读后恍然大悟，发现虚数原来这么简单，一点也不奇怪和难懂！

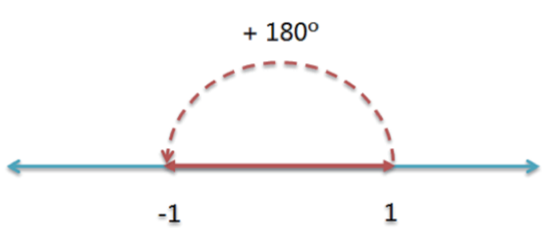
下面，我在 Azad 文章的基础上，用自己的语言解释虚数的含义。

[1] Kalid Azad, A Visual, Intuitive Guide to Imaginary Numbers, http://betterexplained.com/articles/a-visual-intuitive-guide-to-imaginary-numbers/, 2007.

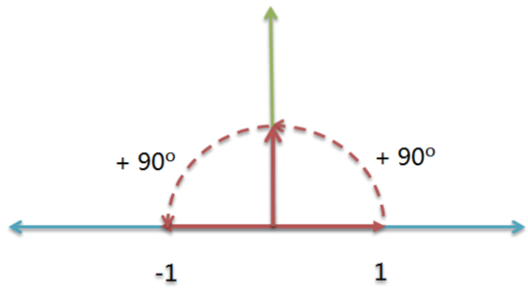
1 什么是虚数?

首先，假设有一根数轴，上面有两个反向的点：$+1$和-1。

这根数轴的正向部分，可以绕原点旋转。显然，逆时针旋转 180 度，$+1$就会变成-1。



这相当于两次逆时针旋转 90 度。



因此，我们可以得到下面的关系式：

$$(+1)\times(\text{逆时针旋转 90 度})\times(\text{逆时针旋转 90 度})=-1$$

有人可能会问，为什么这里要用乘法？其实，这里的乘法运算符只是代表连续进行的某种操作。

接下来，把＋ 1 消去，这个式子就变为：

$$(\text{逆时针旋转 90 度})^2=-1$$

将“逆时针旋转 90 度”记为 i：

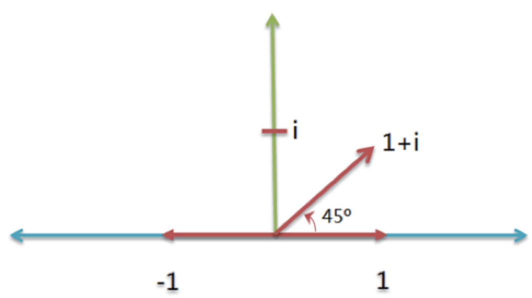
$$i^2=-1$$

这个式子很眼熟，它就是虚数的定义公式。

所以，我们知道了，虚数 i 就是逆时针旋转 90 度，i 不是一个数，而是一个旋转量。

2 复数的定义

既然 i 表示旋转量，我们就可以用 i 表示任何实数的旋转状态。



将实数轴看作横轴，虚数轴看作纵轴，就构成了一个二维平面。旋转到某一个角度的任何正实数，必然唯一对应这个平面中的某个点。

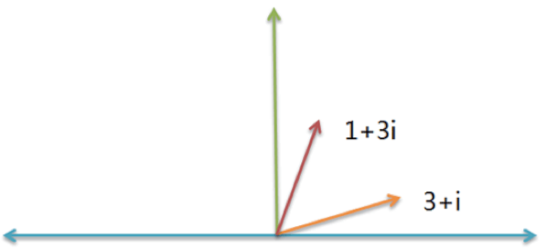
只要确定横坐标和纵坐标，比如 $(1, i)$，就可以确定某个实数的旋转量（45 度）。

数学家用一种特殊的方法，表示这个二维坐标：用 ＋ 号把横坐标和纵坐标连接起来。比如，把 $(1, i)$ 表示成 $1+i$。这种表示方法就叫做复数（complex number），其中 1 称为实部，i 称为虚数部。

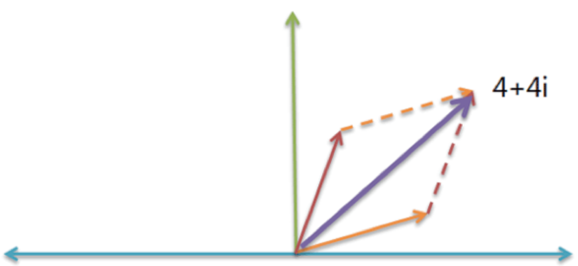
为什么要把二维坐标表示成这样呢？下一节告诉你原因。

3 虚数的作用：加法

虚数的引入，大大方便了涉及到旋转的计算。



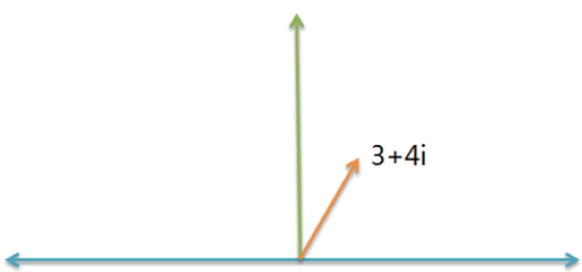
比如，物理学需要计算“力的合成”。假定一个力是 $3+i$，另一个力是 $1+3i$，请问它们的合成力是多少？



根据“平行四边形法则”，你马上得到，合成力就是 $(3+i)+(1+3i)=4+4i$。这就是虚数加法的物理意义。

4 虚数的作用：乘法

如果涉及到旋转角度的改变，处理起来更方便。



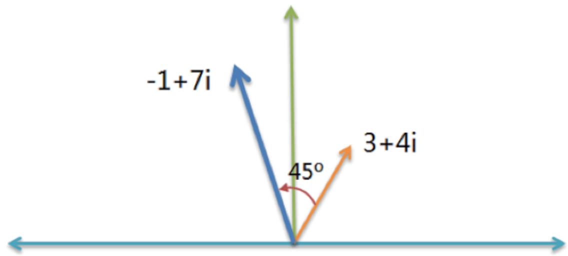
比如，一条船的航向是 $3+4i$。

如果该船的航向，逆时针增加 45 度，请问新航向是多少？

45 度的航向就是 $1+i$。计算新航向，只要把这两个航向 $3+4i$ 与 $1+i$ 相乘就可以了（原因在下一节解释）：

$$(3+4i)\times(1+i)=-1+7i$$

所以，该船的新航向是 $-1+7i$。



如果航向逆时针增加 90 度，就更简单了。因为 90 度的航向就是 i，所以新航向等于：

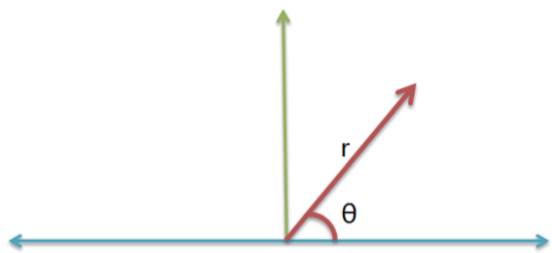
$$(3+4i)\times i=-4+3i$$

这就是虚数乘法的物理意义：改变旋转角度。

5 虚数乘法的数学证明

为什么一个复数改变旋转角度，只要做乘法就可以了？

下面就是它的数学证明，实际上很简单。



任何复数 $a+bi$，都可以改写成旋转半径 r 与横轴夹角 θ 的形式。

假定现有两个复数 $a+bi$ 和 $c+di$，可以将它们改写如下：

$$a+bi=r_1(\cos\alpha+i\sin\alpha)$$
$$c+di=r_2(\cos\beta+i\sin\beta)$$

这两个复数相乘，$(a+bi)(c+di)$ 就相当于

$$r_1r_2(\cos\alpha+i\sin\alpha)(\cos\beta+i\sin\beta)$$

展开后面的乘式，得到

$$\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta+i(\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta)$$

根据三角函数公式，上面的式子就等于

$$\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta)$$

所以，

$$(a+bi)(c+di)=r_1r_2(\cos(\alpha+\beta)+i\sin(\alpha+\beta))$$

这就证明了，两个复数相乘，就等于旋转半径相乘、旋转角度相加。

作者简介：阮一峰，70 年代生，上海财经大学经济学博士，现在上海某高校任教。