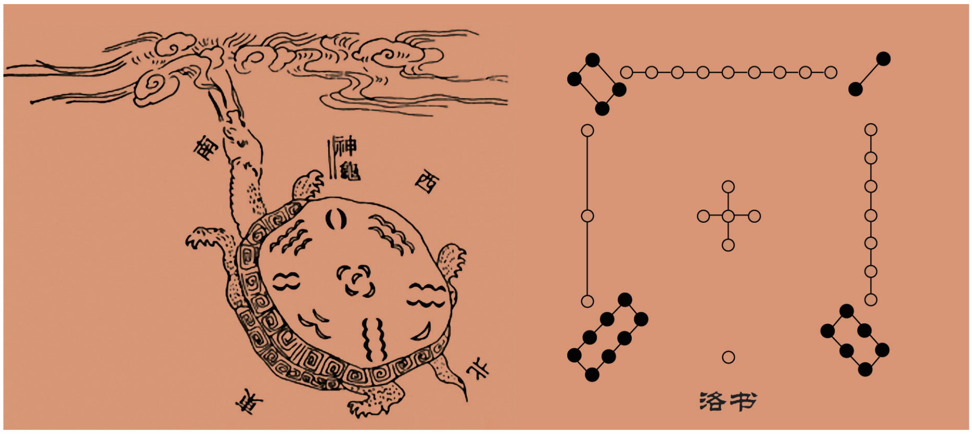
数学与文化交融的奇迹｜幻方

方开泰　郑妍珣



幻方（magic square）也称为纵横图，就是一个 $n\times n$ 的方阵，按照一定的排列布局，填入 1 到 n^2 的连续正整数，使得方阵各行、各列、两条对角线上的数字之和均相等。这个和数被称之为“幻方常数”（magic constant）或“幻和”（magic sum）。对于任意一个 n 阶幻方，其幻方常数 S 和阶数 n 的关系式是 $S=n(n^2+1)/2$。以一个 3 阶幻方为例，见图 1。

4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 1　3 阶幻方

对于这个 3 阶幻方，各行、各列、两条对角线上 3 个数字之和都等于 15。更一般地，将 n^2 不同的数排成 n 行 n 列并符合行和、列和、对角线和相等的方阵也称为幻方。

“幻方”，对于很多人来说看似陌生，殊不知它早已和我们悄悄地接触过了。

小时候，我们常常沉浸在中国神话故事里，一读到“大禹治水”，就会幻想着自己以后也能成为像大禹一样的治水英雄。传说在公元前 2200 年左右，江河泛滥，洪水滔天，给远古的先民们带来了巨大的灾难。就在此时，灵龟呈洛书，大禹借助“洛书”完成了治水大业，造福了千千万万的华夏子孙。而这“洛书”也就是人类发现的世界上第一个幻方。“洛书”图案，用数字符号翻译出来，就是在 3×3 的方阵中填入了从 1 到 9 这 9 个连续整数，且每行、每列、两条对角线上的 3 个数字之和都等于 15。它不仅产生了深

图 2　灵龟呈洛书

图 3 射雕英雄传之黑沼隐女

刻的易理思想，而且推动了组合数学的发展。静静地看着这个名为“洛书”的幻方，那承载在龟背上的数学，隐隐透着一股神秘感，散发着奇异的美丽。

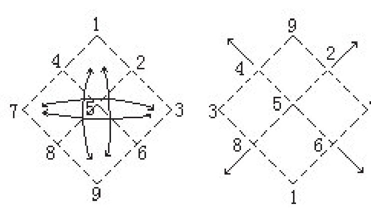
源自幻方的神秘色彩，有着经久不衰的美丽。中国古代南宋杰出数学家杨辉，最早编造出了各式纵横图，从此世界数学史上多了一串串属于幻方的足迹。随着近代组合数学的发展，纵横图一次又一次地展示着它强大的生命力。十八世纪美国最伟大的科学家和发明家富兰克林，创造出一个变化多端的 8 阶幻方，被誉为世界最著名幻方之一，其特殊的性质至今仍有待发现及研究。之后，幻方更是成为全世界瞩目的用以与外星人沟通信息的搭载物，随同旅行者 1 号和 2 号宇宙飞船，开始了人类赋予它寻找外星人的使命。幻方不管走过多久、走到哪里，古代或是现代，东方或是西方，地球上或是宇宙外，总能让人眼前一亮，为这样一个数学与文化交融的奇迹所折服。

金庸先生的武侠小说《射雕英雄传》对幻方更是情有独钟。书中的黄蓉聪明绝顶，曾经在黑沼的小屋中，以寥寥几句话道破了难倒瑛姑十几年的算术题。瑛姑问道：“将一至九这九个数字排成三列，不论纵横斜角，每三字相加都是十五，如何排法？”黄蓉给出了答案:“九宫之义，法以灵龟，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。”紧接着，她又说道:“不但九宫，即使四四图，五五图，以至百子图，亦不足为奇。”举手之间，黄蓉又将七十二数的九宫八卦图在沙上画了出来。其实“九宫图”就是一个最小的 3 阶幻方，“四四图”、“五五图”以至“百子图”分别指的就是 4 阶、5 阶以至 10 阶的幻方，而“九宫八卦图”是幻方的一种变形。它们变化万千，像谜一样，暗藏规律、却不全为人所知晓。

“幻方”的背后，藏着一个等待人类去探索的世界。于是，全球东西方各行各业的人不知不觉地聚到了一起，研究幻方，经历着无数次“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”的感觉，试图揭开幻方神秘的面纱。

1. 幻方的魅力

在我们中国，这个有着“幻方故乡”之誉的大地上，哺育着一群“幻方迷”。著名的南宋数学家杨辉是从数学角度对幻方进行研究的第一人。他在《续古摘奇算法》中记录了 3 阶幻方洛书的构造方法：“九子斜排，上下对易，左右相更，思维挺出；戴九履一，左三右七，二四为肩，六八为足”（如图 4）。另外，他列出了“四四图”到“百子图”（杨辉所认为的“百子图”并非 10 阶幻方，后被清初的张潮发现并加以修正，得到真正的 10 阶幻方，称为“更定百子图”)，并且对其中 4 阶至 8 阶幻方分别给出阴、阳两图。如何区分幻方的阴和阳，至今尚是一个谜，他如何构造出这些幻方，后人还在猜测。宋代丁易东提出了把 3 阶幻方洛书变化为 6 阶幻圆太衍五十图的方法。明朝的王文素专门研究数字排列组合的纵横图，在他所著的中国



4	9	2
3	5	7
8	1	6

图 4 3 阶幻方构造

第一部珠算书《算学宝鉴》中记载了多种较为复杂的纵横图，除洛书均数图、花十六图是源于杨辉所造的图外，其他均是创新，如连环图、璎珞图、三同六变图等。杨辉、王文素二人的贡献对后来幻方在电子科学上的应用影响非常大。之后的程大位及清朝的保其寿、方中通、张潮分别在他们的著作《算法统宗》、《碧奈山房集》、《数度衍》、《心斋杂俎》中增补了若干种纵横图、研究幻方及其变形，甚至提到了立体幻方。

1956 年，我国古代数学史专家李俨曾对西安元代安西王府旧址掘出的铸有阳文阿拉伯数码幻方的铁板进行了考证，确认其为 6 阶“阿拉伯幻方”，是阿拉伯数字传入我国最早的物证。1996 年上海新博物馆开放，馆中陈列着一块在陆家嘴出土的明代宝玉。玉挂的正面写着：“万物非主，惟有真宰，默罕默德，为其使者。”另一面就是一个四阶幻方（如图 5）。古人认为，奇妙的幻方蕴含着宇宙的法则。一直以来，我国许多学者抱着“探知宇宙法则”的坚定信心，为幻方的研究、发展贡献自己一份力量，1998 年 5 月 5 日中国幻方研究者协会成立。专家、学者们围绕幻方进行研究，不断地攀登一个又一个的幻方高峰。2006 年我国广东汕头大学陈钦梧、陈沐天二人解决了关于幻方的百年历史难题，前后分别成功构造出 13、14、15 阶平方幻方（参图 8（d）及其说明）。紧接着，潘凤雏、高源等中国幻方研究工作者相继攻克了其他阶平方幻方。福州苏茂挺突破性地构造出世界上首个完美平方幻方，向世界宣告了完美平方幻方的存在。

神秘的幻方，也吸引了国外学者们，像著名的数学家费马（Pierre de Fermat）、欧拉（Leonhard Euler）、汉密尔顿（William Hamilton）、霍纳（William Horner）、富兰克林（Benjamin Franklin）、计算机先驱查尔斯•巴贝奇（Charles Babbage）等。第一个 4 阶平方数幻方在大数学家欧拉的手中诞生；霍纳创造出了 8 阶、9 阶的双重幻方（参图 9 及其说明），即幻方各线和、平方和、积都相等；富兰克林创建了一个除具有一般幻方的基本性质外还另有其他特性的 8 阶幻方，被誉为开天辟地的杰作。一个叫费夫曼（G. Pfeffermann）的法国人最早构造出第一个 9 阶平方幻方，随后法国数学家加斯顿•塔里（Gaston Tarry）构造出第一个 16 阶平方幻方，美国幻方专家亨特（J. A. H. Hunter）编出了一个 128 阶三次幻方（参图 10 及其说明），十几年后，加拿大多伦多大学考克斯特（Harold Scott MacDonald Coxeter）教授知晓了一个 64 阶三次幻方。就这样，西方也刮起了一股构造幻方的风暴。一时间出现了由德国人（H. C. Agrippa）阿古利巴（Heinrich Cornelius Agrippa）发明并以太阳系七大行星命名的 3 至 9 阶幻方，由法国人卢贝尔（De La Loubere）所写的欧洲最早论及幻方的著作出版了，更有德国画家杜勒（Albrecht Dürer）把幻方融入了他所创造的版画作品《忧郁》，（如图 6）而刻在十一世纪印度卡杰拉霍（Khajuraho）耆那教神庙石碑上的四阶幻方则被当地人奉为神明的启示，常出现护身符上用于辟邪。

图 5　明代幻方宝玉

图 6　杜勒作品《忧郁》

在中国，有着“幻方大世界”的幻方学术交流网站。同样的，在英国、德国、日本等国家也有着围绕着幻方而成立的学术交流网站。一群来自东西方的幻方迷们，从不同的研究角度出发，有的凭借着电脑强大的计算能力构造出更奇特的幻方，有的试着用线性代数等数学理论去钻研幻方性质，有的埋头苦干、千方百计实现幻方的广泛应用。

2. 多种神奇幻方

旅行者到达一个目的地，可以选择不同路线、不同交通工具。而这一路欣赏到的风景也会有所不同。对于幻方的研究也一样，幻方迷们从不同的点出发，在头脑风暴中，探索、发掘出幻方方方面面的风采。首先让我们来感受一下幻方迷们为幻方奋斗的热情，看看他们如何在没有路的情况下走出了通向幻方的条条大路吧。

(1)定阶幻方的个数

天文数字 人们从最小的一般 3 阶幻方入手，不断挑战更高阶幻方的构造。

弗兰尼克尔（Bernard Frenicle de Bessy）【1】在 1693 年得出结论，认为 4 阶幻方总共有 880 个基本形式，通过旋转与镜面反射，总共有 7040 个幻方。而对于 5 阶幻方总数的估计，理查德•许洛泼尔（Richard Schroeppel）利用计算机编程运算得出结论，认为 5 阶幻方的基本形式有 275305224 个，即 2 亿 7 千 5 百多万个。对 6 阶幻方，皮恩(K. Pinn) 和维茨考夫斯基（C. Wieczerkowski）利用蒙特卡洛模拟和统计学方法，得出一个大概的数值估计，其数量在 1.774310×10^{19} 至 1.776610×10^{19} 之间。由此可见，其他阶幻方的多少将是一个多么难以置信的庞大数字。

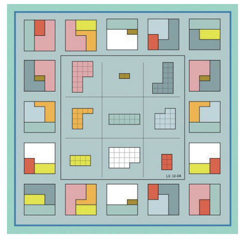
(2)幻方万花筒

推陈出新 幻方迷们通过改变幻方的构成因素，构造出新的形象。

他们第一眼就瞄准了幻方中的数字，想着如果这些数字不再是从 1 到 n^2 的连续正整数，幻方会是个什么样子？图 7（a）则是一个由 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22 的 9 个不连续的正整数构成的幻方。随后，素数幻方、

18	2	16
10	12	14
8	22	6

（a）



（b）

图 7　几何幻方

带有负数的幻方、带有分数的幻方也产生了。甚至有时，当数字由几何图案代替，几何幻方也出现了(如图 7(b))。它由九块积木组成。这些积木所含的小方格数恰好分别是 2, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 22，每行每列和两对角线上的方格总数都是 36，而且每条线上的三块积木正好也都能拼成一个 6×6 的矩形。

人们并不满足于幻方这点小小的改变，他们又提出了另外的想法：如果幻方常数不再单指幻和，而是幻积、幻差、幻商等，又会是怎样的呢？所谓的幻积，也就是幻方中各行、各列、两条对角线的数字乘积。而幻差、幻商的定义相对复杂一点，直接举例说明会容易些（如图 8）。图（a）是一个幻积为 216 的 3 阶幻方，而图（b）、（c）分别是幻差为 5，和幻商为 6 的两个 3 阶幻方。图（b）的

12	1	18
9	6	4
2	36	3

（a）

2	1	4
3	5	7
6	9	8

（b）

3	1	2
9	6	4
18	36	12

（c）

147	1	2562
2982	1533	1886
2426	2058	2163

（d）

图 8　幻积、幻差、幻商、二次幻方

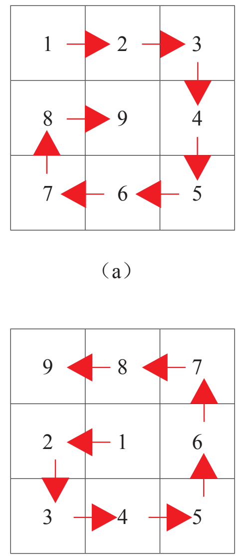
幻方满足每行、每列、两条对角线上，先求出第二个数减去第一个数的差，再用第三个数减去已求得的前两个数的差，均得到相等的常数 5。类似地，图（c）的幻方满足每行、每列、两条对角线上，先求出第二个数除以第一个数的商，再用第三个数除以已求得的前两个数的商，均得到相等的常数 6。

之后，人们又提出了平方幻和（或二次方幻和）等更为刁难人的概念。图 8（d）中的三阶幻方满足各行、各列、两条对角线的数字平方后再相加均相等，等于 147994009，这个数也就是它的平方幻和。更为奇妙的还有双重幻方，同时具有相等的幻和、相等的幻积。图 9 就是霍纳当时构造的八阶双重幻方，幻和为 840，幻积为 2058068231856000。最让人震惊的要属由中国学者高志源和潘凤雏创造的 12 阶三次幻方，见图 10，这个幻方同时具有幻和 870，平方幻和 83810，立方幻和 9082800。

精益求精 幻方迷们构造一个又一个美轮美奂、独具魅力的幻方让我们叹为观止。

将 1 至 9 的九个自然数填入 3×3 的方阵中，使其每行、每列、两条对角线上的 3 个数字之和都不相等，并且相邻的两个数在方阵中的位置也相邻，并把这个方阵被称为反幻方。美国当代科普作家加德纳发现了符合条件的唯一两个反幻方（如图 11），仔细看还会发现它们的数字排列酷似螺旋，一个由外向内转，另一个由内向外转。这种自外向内再自内向外的螺旋美感，不禁让我们联想起一首宋代文学家苏轼的回文诗《题织锦图回文》：“春晚落花余碧草，夜凉低月半梧桐。人随雁远边城暮，雨映疏帘绣阁空。”倒读之后是“空阁绣帘疏映雨，暮城边远雁随人。桐梧半月低凉夜，草碧余花落晚春。”这样的回环往复，别有一番风味。

还有其他别出心裁的幻方，如同心幻方、复合幻方、部分重叠幻方。图 12 呈现的就是由弗兰尼克尔创造的一个 9 阶的同心幻方，幻和是 369。在这个 9 阶的同心幻方中，套着另外 3 个幻方，分别是 7 阶、5 阶、3 阶的，且幻方中心位置上的数字皆是 41。图 13 是一个 9 阶的复合幻方，即这个 9 阶幻方中 9 个 3×3 的小方阵也是幻方。图 14 是一个 9 阶的部分重叠幻方，其中包括 2 个 4 阶的幻方，2 个部分重叠的 5 阶幻方。



（a）

（b）

图 11　反幻方

162	207	51	26	133	120	116	25
105	152	100	29	138	243	39	34
92	27	91	136	45	38	150	261
57	30	174	225	108	23	119	104
58	75	171	90	17	52	216	161
13	68	184	189	50	87	135	114
200	203	15	76	117	102	46	81
153	78	54	69	232	175	19	60

图 9

18	6	34	65	105	53	92	40	80	111	139	127
117	20	63	94	31	120	25	114	51	82	125	128
79	41	22	144	33	83	62	112	1	123	104	66
19	86	76	23	142	78	67	3	122	69	59	126
46	91	117	13	68	134	11	77	132	28	54	99
102	49	8	71	106	133	12	39	74	137	96	43
129	116	98	87	84	7	138	61	58	47	29	16
52	115	119	136	45	38	107	100	9	26	30	93
131	48	141	70	35	88	57	110	75	4	97	14
113	121	64	72	2	36	109	143	73	81	24	32
108	42	101	5	124	85	60	21	140	44	103	37
56	135	27	90	95	15	130	50	55	118	10	89

图 10

23	81	79	78	77	13	12	11	2
76	28	65	62	61	26	27	18	6
75	23	36	53	51	35	30	59	7
74	24	50	40	45	38	32	58	8
9	25	33	39	41	43	49	57	73
10	60	34	44	37	42	48	22	72
14	63	52	29	31	47	46	19	68
15	64	17	20	21	56	55	54	67
80	1	3	4	5	69	70	71	66

图 12　同心幻方

71	64	69	8	1	6	53	46	51
66	68	70	3	5	7	48	50	52
67	72	65	4	9	2	49	54	47
26	19	24	44	37	42	62	55	60
21	23	25	39	41	43	57	59	61
22	27	20	40	45	38	58	63	56
35	28	33	80	73	78	17	10	15
30	32	34	75	77	79	12	14	16
31	36	29	76	81	74	13	18	11

图 13　复合幻方

75	53	11	25	14	65	48	42	36
10	26	74	54	49	43	32	15	66
71	57	7	29	33	16	67	50	39
8	28	72	56	68	46	40	34	17
52	69	13	30	41	35	18	64	47
12	27	38	51	77	80	20	3	61
37	59	76	9	24	4	60	81	19
73	6	23	45	58	79	21	2	62
31	44	55	70	5	1	63	78	22

图 14　部分重叠幻方

幻方群组　人们将有机联系的几个幻方放在一起研究，于是，镜子幻方、勾股幻方等脱颖而出。图 15 就是一个镜子幻方，这对幻方上的数字刚好是个位数和十位数的互换，幻和都是等于 242，看起来就像“我”和镜子中的我。图 16 是一个勾股幻方，由三个幻方 A、B、C 组成，且这三 个幻方的对应位置上

96	64	37	45
39	43	98	62
84	76	25	57
23	59	82	78

（a）

69	46	73	54
93	34	89	26
48	67	52	75
32	95	28	87

（b）

图 15　镜子幻方

24	3	18
9	15	21
12	27	6

A

32	4	24
12	20	2
16	36	8

B

40	5	30
15	25	35
20	45	10

C

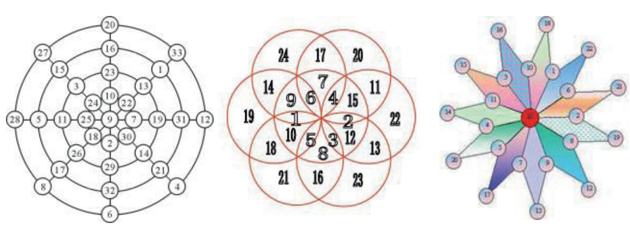
图 16　勾股幻方（$a^2+b^2=c^2$）

的数字组成勾股数，比如 $15^2+20^2=25^2$，$12^2+16^2=20^2$。

幻方变形　善于打破框框条条的幻方迷们在幻方变形上下功夫，创造出其他形状的幻方，如幻圆、幻环、幻星、蜂窝幻方等等。

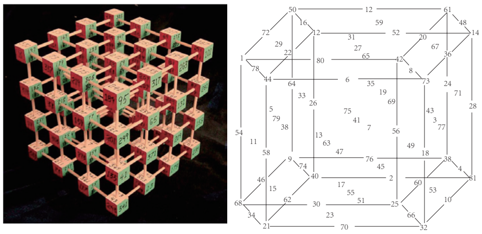
幻圆是将自然数排列在多个同心圆或多个连环图上，使各圆周上数字之和相等，几条直径上的数字之和也相等（如图 17（a））。

幻环是指若干圆以某种方式相交，在其分割出的空间中分布自然数，使其各个圆中的若干数之和相等（如图 17（b））。



（a）　（b）　（c）

图 17　幻圆、菊花幻环、幻星



（a）　　　　（b）

图 18　多维幻方

幻星是在星形几何图案的顶点和交点处填入数字，使其每条边上的若干数字之和相等（如图 17（c））。

多维幻方　勇于探索的幻方迷们还在多维空间上构造幻方，表现出很强的立体感和对称性，如图 18（a）所示。图 18（b）是浑天幻方投影到 2 维平面上的示意图，这个 3 阶 4 维幻方是数学家约翰 • 亨德利克斯（John Robert Hendricks）创造的，由 8 个 3×3×3 的小立方体组成，幻和为 123。

（3）幻方构造百花齐放

人们已发现了许多构造幻方的方法，从最初摸索幻方中数字填写的步骤，到在原有幻方的基本形式上进行旋转、镜面反射得到该幻方的其他可能形式，再到借助电脑高效率的编程运算产生幻方、研究幻方。其实，构造任意阶的一般幻方，并非难事，小学生也可以学会。但是有更多的幻方至今为止人们还没能构造出来，像 100 阶以内的平方幻方还有 14 项空白记录：67、69、71、73、74、79、82、83、86、87、89、93、94、97 阶的平方幻方还无人构造出来。

一般情况下，幻方的构造方法会按照奇数阶、双偶数（n 可为 4 整除）阶、单偶数（n 可为 2 整除，但不能为 4 整除）阶幻方来划分归类。适用于奇数阶幻方构造的方法有连续摆数法及其推广改进、阶梯法、奇偶数分开菱形法等，适用于双偶数阶幻方构造的方法有对称法、对角线法、比例放大法等，而适用于单偶数阶幻方构造的方法有拉伊尔法、斯特雷奇法、LUX 法等【1】。有没有一种统一的方法可以构造任意阶的幻方呢？ 17 世纪法国数学家弗兰尼克尔发明了镶边法，先构成 $n-2$ 阶的幻方，把每个方格中的数加上一个整数，再给它四周镶上一条边，填入余下的数字则可以得到幻方。还有其他一些幻方构造方法如相乘法、相加法，利用两个低阶幻方来产生一个高阶幻方。通过对得到的幻方进行旋转或者镜面反射的变换，还可以得到有着不同数字排列组合的同阶幻方。

除了以上构造幻方方法，通过拉丁方构造幻方也颇为人注意。拉丁方在试验设计上的应用非常广泛，因此与拉丁方有着千丝万缕联系的幻方自然而然地也被人们所关注，大家都在想着怎么把有着优越平衡性的幻方应用到实际生活中。所谓的 n 阶拉丁方（ Latin square）是指一个 $n \times n$ 的方阵，恰有 n 种不同的元素，且每一种不同的元素在每一行或每一列中只出现一次。如果构成 n 阶拉丁方中的元素取的是 n 进制数中的 n 个数，那么它很容易可以转换为 n 阶幻方。假设将 4 个拉丁字母 A、B、C、D 排列成 4 行 4 列，使这 4 个字母在其每行每列有且只有一次出现，这个方阵就是一个 4 阶拉丁方（如图 19（a）。如果把这个 4 阶拉丁方顺时针旋转 90°，就得到另一个 4 阶拉丁方（如图 19（b））。

B	D	A	C
C	A	D	B
D	B	C	A
A	C	B	D

（a）

A	D	C	B
C	B	A	D
B	C	D	A
D	A	B	C

（b）

BA	DD	AC	CB
CC	AB	DA	BD
DB	BC	CD	AA
AD	CA	BB	DC

（c）

10	33	02	21
22	01	30	13
31	12	23	00
03	20	11	32

（d）

4	15	2	9
10	1	12	7
13	6	11	0
3	8	5	14

（e）

5	16	3	10
11	2	13	8
14	7	12	1
4	9	6	15

（f）

图 19　用拉丁方构造幻方

再把这两个拉丁方叠放在一起，则得到下面这个可以用来构造幻方的方阵（如图 19（c））。首先把 A、B、C、D 相应换成 0,1,2,3，得到一个数字方阵（如图 19（d））。然后，把数字方阵中的每个数字看作 4 进制数，将它们转换为 10 进制数（如图 19（e）），最后将这个 10 进制数方阵里的每个数字都加上 1，可得一个 4 阶幻方（如图 19（f））。

（4）幻方，美的化身

幻方有着很好的性质：均衡对称，给人一种无限接近完美的感觉。“九宫图”，就是一个有着很好对称性的幻方（如图 20）。

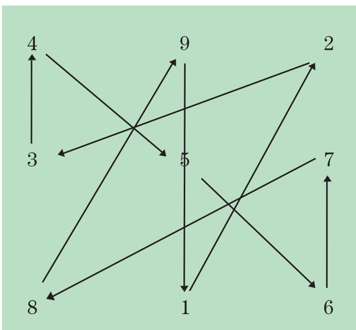


图 20 “九宫图”的连线图

如何衡量幻方的均衡对称性？这个问题十分值得研究。如果我们可以知道对幻方均衡对称性起到决定性作用的因素，那么我们就可以确定哪个幻方性质最优，在应用中发挥的作用最显著，而不必在数不清数目的幻方中挣扎不休。互补数字对连线图可以帮助我们从外在图形上判断幻方平衡对称性的好坏。另一方面，从线性代数的角度出发，特征值、特征向量也是研究幻方内在性质的重要反映。

杜德尼（H. E. Dudeney）曾经详细地研究了 4 阶幻方的分类和每类幻方可能有的数量。根据互补数字对（互补的两数字之和等于幻和的一半）的分布情况，他最终把 4 阶幻方细分成 12 类（如图 21）。其中，第一种类型的 4 阶幻方无论是上下，还是左右，都具有对称性（如图 22）。

而幻方的特征值和特征向量也呈现出特殊的规律。就以杨辉在他所著的《续古摘奇

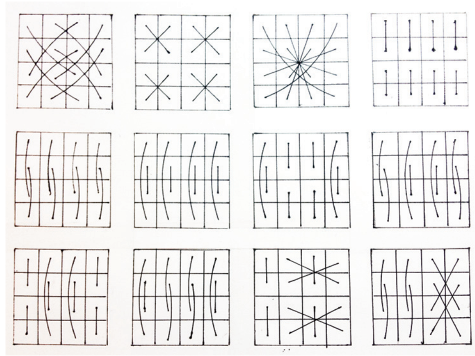


图 21 4 阶幻方根据互补数字对的分类

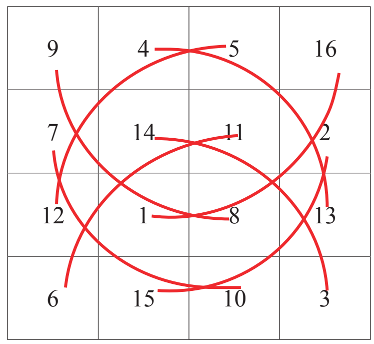


图 22 第一类 4 阶幻方互补数字对分布图

算法》中给出的 4 阶的幻方阴、阳图为例，不难求出这两个阴、阳图的特征值和特征向量（如图 23）。这两个幻方有两个特征值是相同的，即 34（幻和）和 0。阴图有两个虚

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

（a）阴图

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

（b）阳图

图 23 杨辉构造的 4 阶幻方阴阳图

数特征值，而阳图有两个实数特征值。有关特征值在幻方分类中的作用仍是一个未解决的问题。

3. 幻方的神奇应用

幻方，在冷兵器时代，早就被应用在排兵布阵上。据史书记载，三国时期，诸葛

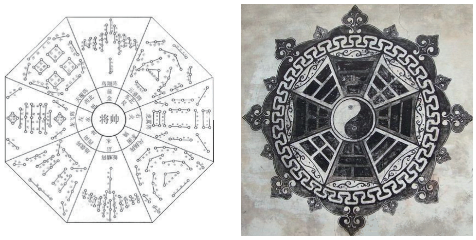


图 24　八卦阵

亮曾经垒石做八卦阵，对抗魏国军队。在中国四大文学著作之一的《三国演义》中，这个八卦阵被描述成一种进入之后就会飞沙走石、天地变色的神奇阵法。其实，这个对蜀国至关重要的八卦阵是诸葛亮按照五行相生相克原理和九宫八卦方位布成的作战阵图（如图 24）。而我们所熟知的三阶幻方“洛书”，便是这九宫八卦图的起源。

有着“万园之园”称号的圆明园与幻方有着某种关联。在清朝内务府满文文档中曾记载：雍正二年，山东德平县知县张钟子等勘察圆明园风水。张钟子曾著有《论圆明园》

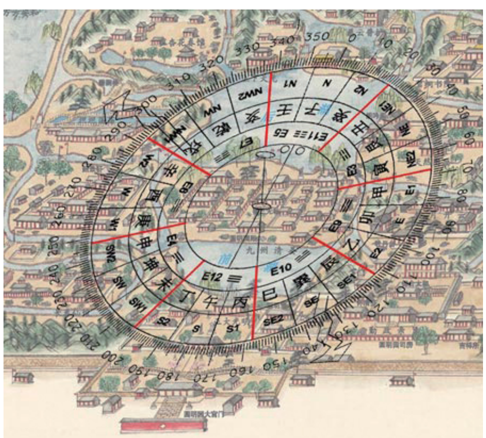


图 25　圆明园布局图

图 26　澳门回归百子图

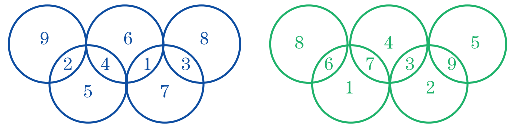


图 27　奥运徽章幻五环

图 28　包中祥设计的“完美幻方”

一文，提到：圆明园的布局师从“洛书”。原来，在圆明园后湖区，有一片由九组建筑组成的园林建筑群叫“九州清晏”，与“洛书”有着异曲同工之妙（如图 25）。

1999 年 12 月 20 日，中国政府恢复对澳门行使主权，澳门回到了祖国的怀抱。由中国幻方研究者协会会员沈文基先生设计的“澳门回归百子图”在珠海市板障山立碑，该百子图将澳门回归的日期放在幻方中央，就连登山的台阶也是精心设计为 1999 个台阶（如图 26）。

2001 年 7 月 13 日，北京申奥成功，举国欢腾。昆明理工大学的杨高石教授为此设计了奥运徽章幻五环（如图 27）。为了纪念 2008 年 8 月 8 日的北京奥运，包中祥老人花了 3 年时间编制了一个独一无二的立体六

面的“完美幻方”(如图 28)。这个“完美幻方”由 96 个数字组成，每个幻方的四行四列的和是 2008，每行的个位数字和为 8，每列的个位数字的和是 8，这样组成了一个十分奇妙的数字方阵，到处呈现出一个 2008.8.8 的数字系列。而它的每个田字格中的四个数的和是 2008，每个等腰梯形、长方形、菱形上四个格中的四个数的和是 2008，8 条对角线和 8 条直线的四个数的和是 2008，这里也告诉人们一个数字系列：2008.8.8。

20 世纪 70 年代左右，美国的一本益智杂志 *Math Puzzles and Logic Problems* 上出现了一个填数字游戏，这类游戏后来传到日本后便起了“数独”这个名字。数独是根据 9×9 盘面上已知数字，推理填出剩余空格的数字，要求每行、每列、每个 3×3 的九宫格内的数字均包含 1 至 9，且不重复。但喜欢玩数独的人可能不知道数独其实是幻方在近代以来的一个分支，也就是说，幻方推动了数独的发展。

有一个曾经风靡欧美大陆的游戏也与幻方息息相关。1878 年，美国科学魔术大师萨姆•洛伊德（Sam Loyd）设计出了著名的“14-15”智力玩具（boss puzzle），它在法国还有着另外一个名字“Jeu de Taquin”，译为给人类带来灾难的根源。这个玩具的原始布局如图 29(a) 所示，谁能通过滑动其中的数字片，使错位的 14 和 15 两个数字回复正常次序，将获得 1000 美元的奖励。实际上，这是一个没有赢家的游戏，无人能获得这 1000 美元奖金，因为洛伊德所要求的终局根本不可能达到。但却有一个有趣的发现，就是从原始初局出发，可以得到“畸形”幻方终局（图 29（b））。图 29(c) 的幻方终局需要移动的步数为 50：12, 8, 4, 3, 2, 6, 10, 9, 13, 15, 14, 2, 8, 4, 7, 10, 9, 14, 12, 8, 4, 7, 10, 9, 6, 2, 3, 10, 9, 6, 5, 1, 2, 3, 6, 5, 3, 2,1, 13, 14, 3, 2, 1, 13, 14, 3, 12, 15, 3。

各种奇思妙想的幻方还有很多很多，如 21 世纪幻方钟，九九太极完美幻方等等（如图 30）。值得一提的是，1997 年，幻方随同美国先后发射的旅行者 1 号和 2 号宇宙飞船奔向宇宙，作为人类的使者去寻找外星人。当时，美国宇航局向全世界公开征集将随同旅行者 1 号和 2 号飞船出发、用以尝试与外星人交流的搭载物。这些千挑万选的搭载物都是绘有代表人类文明图案的金属片。其中，代表人类在数学上取得的成就的搭载物有两件，一个是勾股数，另一个便是 4 阶幻方。

（a）

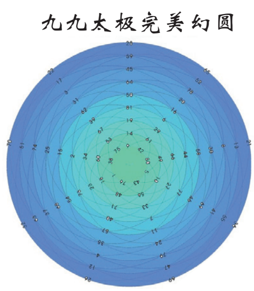
1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	15	14	

（b）

13	1	6	10
14	2	5	9
	12	11	7
3	15	8	4

（c）

图 29 “14-15” 智力玩具



21 世纪钟幻方

27	29	72	44	21	49	54	53	20
33	50	77	73	12	45	25	39	15
22	76	14	11	78	1	18	79	70
47	51	10	48	61	65	2	26	59
42	9	38	58	41	69	75	3	34
80	63	8	17	67	24	4	74	32
37	35	64	7	60	5	68	36	57
19	43	46	56	6	81	71	31	16
62	13	40	55	23	30	52	28	66

图 30

著名数学家王梓坤先生在所著的《科学发现纵横谈》中指出，目前幻方在程式设计、组合分析、实验设计、人工智慧、图论、博弈论等方面受到了重视。其实不仅如此，幻方还被应用在工艺美术、海上漂浮建筑设计、电子回路原理、位置解析学、算法的改进、密码设计、图像安全处理等方面。很多幻方研究工作者都对幻方的应用有着一份期待，相信当幻方的性质得到充分的挖掘时，幻方

应用将取得革命性发展。

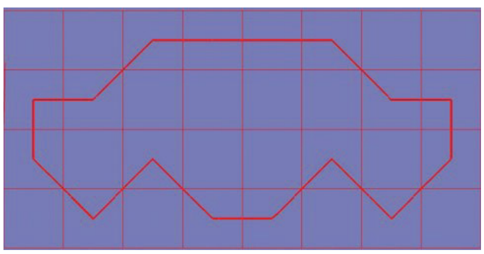
借助幻方，人们还设计出美丽的工艺装饰品，如“幻方吉形”、“魔法花砖”。

“幻方吉形”由梁海声设计，曾获 2005 中国国际品牌与设计大奖赛优秀创意入围奖。它的灵感就来自于最有视觉美感的 4 阶幻方。它在 2 个 4 阶幻方的基础上，沿着从 1 至 16 的走向，勾勒出一个循环、对称的图形，其形状既像中国传统的长命锁，又像元宝，又像飞碟，很容易被想象成为 UFO。它对称、平衡、和谐、顺通，具有循环的价值观，与保护自然环境的可持续发展思想吻合，现在与“幻方吉形”相关的产品已在日本销售。“幻方吉形”及其具体设计流程如图 31。

“魔法花砖”是由戴夫•哈珀（Dave Harper）结合二进制数转换和映射，对幻方进行变化而得到的平铺图案（如图 32（a））。有一个 4 阶的泛对角线幻方，即满足各行、各列、2 条对角线、8 条泛对角线上数字之和

1	2	15	16	1	2	15	16
13	14	3	4	13	14	3	4
12	7	10	5	12	7	10	5
8	11	6	9	8	11	6	9

		15	16	1	2		
13	14					3	4
12		10			7		5
	11		9	8		6	



（a）“幻方吉形”设计流程图

（b）工艺产品“幻方吉形”

图 31　幻方吉形

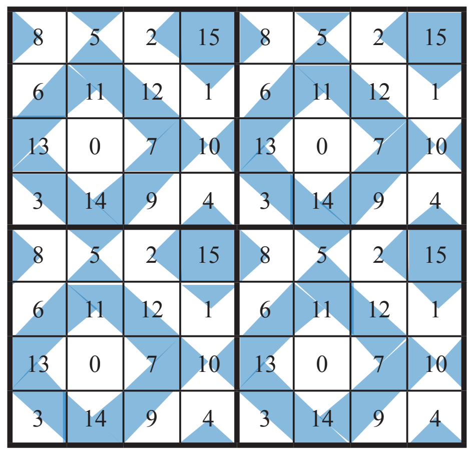


图 32（a）魔法花砖

8	5	2	15
6	11	12	1
13	0	7	10
3	14	9	4

图 32（b）4 阶泛对角线幻方

00	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10	11	12	13	14	15
0000	0001	0010	0011	0100	0101	0110	0111	1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111

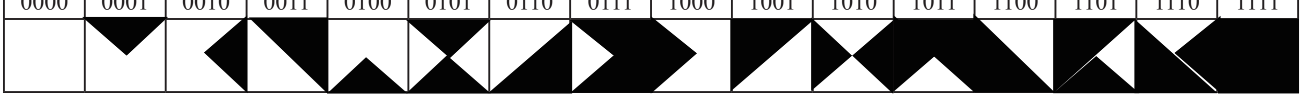
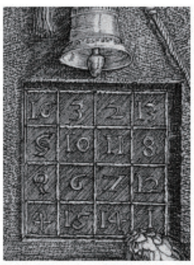


图 32（c）戴夫哈珀映射方案

均等于幻和 30（如图 32（b））。戴夫哈珀设计了一个映射方案，方案中写明 0 至 15 这 16 个数对应的二进制数和映射图案（如图 32（c）），白色部分代表 0，黑色部分代表 1。

幻方，可用于密码编辑、图像加密。

让我们一起来了解杜勒的作品《忧郁》中的 4 阶幻方和富兰克林 8 阶幻方如何应用于密码编辑。德国画家杜勒的经典作品《忧郁》（如图 6）构图元素十分丰富。其中，屋墙上刻着的四阶幻方是数学史上著名的“杜勒幻方”（如图 33（a）），最下一行中间两格标着 1514，是杜勒母亲去世的年份。如何用“杜勒幻方”解密呢？有这样一张密码表（如图 33（b））和一幅需要破解的密码图（如图 33（c）），首先按照密码表将相应的字母代入，得到一个英文字母方阵（如图 33（d）），将方阵中的英文字母和“杜勒幻方”中的数字相互匹配，按照 1 至 16 的顺序依次写成一行，可得到密码译文 JeovaSanctusUnus，翻译成英文是 IssacusNeutonuus，即 Issac Newton（艾塞克 • 牛顿）。



16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

图 33（a）“杜勒幻方”

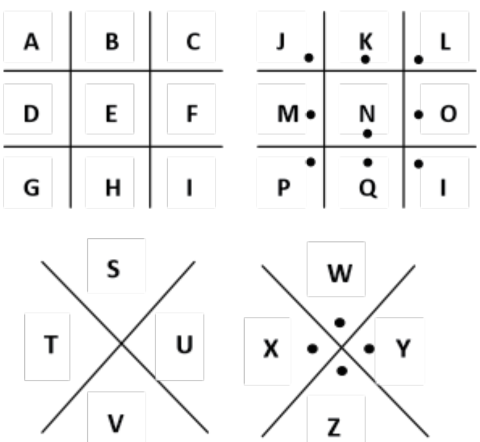


图 33（b）密码表

图 33（c）密码图

S	O	E	U
A	T	U	N
C	S	A	S
V	U	N	J

图 33（d）英文字母方阵

富兰克林八阶幻方（如图 34）在密码应用上也发挥着作用。在这个八阶幻方中，幻和是 260，64 个数字是从 1 顺序增加至 64；每半行、半列上各数和为 130；幻方角上的四个数与最中心四个数和等于幻和 260 ＝ 52 ＋ 45 ＋ 16 ＋ 17 ＋ 54 ＋ 43 ＋ 10 ＋ 23；另外，从 16 到 10，再从 23 到 17 所成折线“∧”上八个数字之和也为 260；且平行这种折线的诸折线“∧”上的八个数字和也为 260。

富兰克林八阶幻方可用于密码编辑。在丹布朗的《失落的秘符》中，幻方的用途就是变混沌为秩序，即把字填在格子里，然后根据幻方里从 1-64 的数字顺序重新排列，将无序的字符变为有序连贯的句子从而破解。如图 34 所示（左图为书中的乱序密码，中图为富兰克林八阶幻方，右图为顺序排列后的密码）。

网络的诞生，拉近了人们的距离。随时随地我们都可以与异地的家人朋友分享自己近期的生活状况，写写博客、配上几张照片，图文并茂。因此，每天都有着海量的数字图像在拥挤的网络之中来回传送。为了保护图像所有者的合法权益，防止信息泄露，我们会对图像进行加密。幻方排列，具有周期性，便于编码解码，成为数字图像加密的经典方法之一。

图像置乱法是隐藏图像信息较为理想的

52	61	4	13	20	29	36	45
14	3	62	51	46	35	30	19
53	60	5	12	21	28	37	44
11	6	59	54	43	38	27	22
55	58	7	10	23	26	39	42
9	8	57	56	41	40	25	24
50	63	2	15	18	31	34	47
16	1	64	49	48	33	32	17

图 34 富兰克林八阶幻方的密码应用

加密方法，它根据幻方中的自然数序号元素对图像像素位置进行相应移动的变换。首先，我们对需要加密的图像划分成一个 $n\times n$ 矩阵，把这个矩阵上的 n^2 个像素块（灰度值）与选定的 n 阶幻方 M 中自然数序号元素一一对应。然后，对选定的 n 阶幻方 M 进行变换。将 M 中序号元素 k 移至序号元素为 $k+1$ 的位置，$k\in\{1,2,\cdots,n-1\}$，再将 M 中序号元素 n 移至序号元素为 1 的位置，形成一个新的 $n\times n$ 矩阵 M。随着 M 中序号元素位置的移动，与之对应的图像像素块也按着相同的路径移动。如果将上述的幻方变换进行多次迭代，就可以得到加密好的图像。当幻方变换迭代达到一个周期，即 n^2 次时，我们则解码成功，重新获得原来的图像。图 35（a）是一个 4 阶幻方变换迭代情况举例。图 35（b）是用一个 128 阶的幻方对某图像加密解密的效果图。

16	2	3	13
5	11	10	8
9	7	6	12
4	14	15	1

（a - 1）

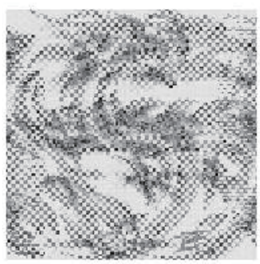
加密前图像

128 阶幻方

15	1	2	12
4	10	9	7
8	6	5	11
3	13	14	16

（a - 2）
1 次迭代后的矩阵

加密后图像



幻方变换迭代 10 次

8	10	11	5
13	3	2	16
1	15	14	4
12	6	7	9

（a - 3）
8 次迭代后的矩阵

解密后图像

幻方变换迭代 128^2 次

（b）

图 35　基于幻方变换的图像加密

类似幻方变换的周期性图像置换方法还有阿诺德（Arnold）变换、FASS 曲线等。除此之外，还有非周期性的图像置换法，如混沌变换、傅立叶变换、卷积变换等。往往，人们还会把好几种图像置换法相结合，像阿诺德变换与幻方变换，幻方变换与数字全息图加密法，使图像加密变得更简单，安全性更高。

4. 幻方未解之谜

目前，幻方还有一些未解之谜。哲学家，希望参悟幻方蕴含的易学思想、宇宙法则；数学家，迷上剖析幻方数字排列组合的奥妙；艺术家，试图融合幻方图案到艺术设计中，创造更加梦幻的作品；科学家，渴望幻方的完美性质能帮助人类实现许许多多不可思议的梦想，“海市蜃楼”、“与外星人同在”成为可能。我们深信，未来的某一天，这个世界会因幻方而精彩。

有关幻方的文献浩如烟海，我们仅仅列举如下的 15 个文献，供读者参考。

参考文献

1. 吴鹤龄 . 2008. 幻方与素数：娱乐数学两大经典名题 . 北京：科学出版社
2. 欧阳录 . 2004. 幻方与幻立方的当代理论 . 湖南：湖南教育出版社
3. 岑湛标 . 2010. 幻方传说 . 广东：中山大学出版社
4. 詹森 . 2012. 你亦可以造幻方 . 北京：科学出版社
5. 舒文中 . 1991. 幻方 . 广州：广东科技出版社
6. 金丕龄 . 2010. 幻方的智慧 . 上海：上海交通大学出版社
7. 万瑾琳 , 杨澜 . 2010. 幻方探秘 . 武汉：中国地质大学出版社
8. 方志，方金生 . 2008. 幻方游戏 . 湖北：湖北科学技术出版社
9. 马丁 • 加德纳（美）. 2012.《科学美国人》趣味数学集锦：迷宫与幻方 . 上海：上海科技教育出版社
10. 西摩 S. 巴洛克（美），圣地亚哥 A. 塔瓦雷斯（美）. 2013. 幻方世界：在数独出现之前 . 北京：现代出版社
11. Clifford A. Pickover (2003), The Zen of Magic Squares, Circles, and Stars. New Jersey: Princeton University Press.
12. W. S. Andrews, Magic Squares and Cubes (2d ed. 1917; reprint, New York: Dover, 1960)
13. 幻方大世界：http://www.zhghf.net/
14. http://mathworld.wolfram.com/MagicSquare.html
15. http://www.grogono.com/magic/

作者简介：

方开泰，著名统计学家，香港浸会大学荣休教授，北京师范大学—香港浸会大学联合国际学院教授，中国科学院应用数学研究所研究员。

作者简介：

郑妍珣，美国乔治城大学生物统计系硕士研究生，2013 年毕业于北京师范大学—香港浸会大学联合国际学院统计系。