谷歌数学涂鸦赏析（下）[1]

欧阳顺湘

25 艾达诞辰 197 周年

图 118 艾达诞辰 197 周年纪念（2012 年 12 月 10 日，全球）

图 119 英国首相府的艾达•洛夫莱斯画像（Margaret Sarah Carpenter 作于 1835 年）

2012 年 12 月 10 日，谷歌以涂鸦纪念艾达•洛夫莱斯（Ada Lovelace, 1815 年 12 月 10 日 -1852 年 11 月 27 日）诞辰 197 周年。艾达又名奥古斯塔 • 艾达 • 金（Augusta Ada King），常被称为洛夫莱斯伯爵夫人（Countess of Lovelace）。她在现代计算机诞生 100 多年前，就为巴贝奇[2]没有造出来实物的分析机设计了程序，因此有“程序之母”的称号。

在纪念艾达的涂鸦中，艾达身着长裙，用鹅毛笔于一张构成“Google”字样的长纸条上伏案书写，纸条旁边还同时显示有从巨型机到个人机和平板电脑等离不开程序的各型计算机。

历史上对科学有贡献的女性不多，且不少人随着时间的流逝而渐被遗忘。谷歌涂鸦对女性人物的纪念数据就在一定程度上表明了这一点。自 2001 年谷歌以涂鸦纪念特殊人物开始，直至 2008 年，谷歌涂鸦上才有女性人物被纪念。至 2012 年底，谷歌共纪念了 318 名男性，45 名女性，其中女性所占比例仅为 12.4%，每年女性出现的比例不超过 12.8%。

艾达是迄今为止，唯一被谷歌涂鸦纪念过的女数学家。谷歌为什么会想到以涂鸦来纪念她呢？在这个涂鸦发布当日，谷歌官方博客讲述了背后的故事。

2011 年，谷歌代表团访问位于伦敦唐宁街十号的英首相府。首相府中墙上有一高达 216 厘米、宽 137 厘米的大幅女士画像。参观过程中，代表团成员被问及这位有着维多利亚时代特征的盛装女士是谁，然而大多数人对她却是一无所

[1] 本文续《谷歌数学涂鸦赏析》之“上”和“中”（分别见 2013 年《数学文化》第 4 卷第 1 期和第 2 期）。

[2] 参附录一。

图 120 艾达•洛夫莱斯

知。在得知她是第一位程序员之后，这些整天与程序打交道的人都大为惊讶。返回美国后，他们开始进一步了解艾达，最终利用谷歌涂鸦和博客文字来纪念她。

艾达是英国伟大的浪漫主义诗人拜伦（乔治•戈登•拜伦[3]，George Gordon Byron, 1788-1824）勋爵的唯一婚生子女。正是艾达父亲的“负面影响”，使得她走上了学习数学与科学的道路。

拜伦出生于一个破落的贵族家庭，父亲是个浪荡子，在拜伦出生后不久即为逃避债务而遗弃家庭。拜伦的母亲带着他从小过着艰辛拮据的生活。只是拜伦十岁时，因继承了家族的爵位以及产业才得以改变。

1811 年，拜伦东方旅行三年归来，带回“四千行诗”。1812 年 2 月，拜伦的长篇叙事诗《恰尔德•哈洛尔德游记》（*Childe Harold's Pilgrimage*）第一、二章问世，引起轰动，就如他在日记中写的“我在一个美好的早晨醒来，发现自己成名了”，立刻成了著名诗人以及社交界的明星。

一方面，拜伦过着“放荡不羁”的生活，不但如他诗歌所写“且来享受醇酒妇人，尽情欢笑；明天再喝苏打水，听人讲道”，还如梁实秋所叙，“和无数的情人缱绻，包括他自己的异母所生的妹妹在内”，另一方面，因为少时的经历以及外出旅行之所见，拜伦和上流社会格格不入。例如，上议院通过法案，要对毁坏机器的工人判处死刑，而拜伦却在议会上为工人们的权益辩护，并写下政治讽刺诗。

艾达的母亲安妮•伊莎贝拉•米尔班奇（Anne Isabella Milbanke, 1792-1860）出生于贵族家庭，自小受到过良好教育。她还酷爱数学，被拜伦戏称为“平行四边形公主”。

1815 年，安妮与拜伦结婚。按查良铮所述，“这是拜伦一生所铸的最大的错误。拜伦夫人是一个见解偏狭的、深为其阶级的伪善所宥的人，完全不能理解拜伦的事业和观点。”

1815 年 12 月，艾达出生；不到一个月，安妮即与拜伦分居，带着艾达回到母亲家中。1816 年 4 月，拜伦不堪政客与上流社会借机发起的各种造谣中伤、攻击谩骂，永别英国，八年后死在希腊军中。

拜伦在第二次，也是最后一次离开英国后，续写了《恰尔德•哈洛尔德游记》第三、四章。他在第三章第一一三节中，以诗明志[4]：

我没有爱过这人世，人世也不爱我；
它的臭恶气息，我从来也不赞美；
没有强颜欢笑去奉承，不随声附和，
也未曾向它的偶像崇拜的教条下跪，
因此世人无法把我当作同类，
我厕身其中，却不是他们中的一人；
要是没有屈辱自己，心灵沾上污秽，
那么我也许至今还在人海中浮沉，
在并非他们的，而算作他们的思想的尸衣下栖身。

图 121 乔治•戈登•拜伦

[3] 参考查良铮（诗人穆旦）译《拜伦诗选》（上海译文出版社，1982 年）前作的《拜伦小传》。

[4] 中译见杨熙龄译《恰尔德•哈洛尔德游记》，上海译文出版社，1990 年。后面引用的此诗第三章另外两小节的译文同样来自该译著。

拜伦深知自己再也见不到女儿了，他在《恰尔德•哈洛尔德游记》第三章第一节中，开篇即与女儿告别：

可爱的孩子，你的脸可像你妈妈？
上次相见，你天真的蓝眼珠含着笑，
我的家庭和心灵的独养女儿，艾达！
然后分手了，——可不像这一遭，
那时还有希望。——猛然间我才惊觉：
周围已是起伏的海浪，风在唏嘘；
我走了；漂泊到哪儿，自己也不知道；
但是那海岸已经在我眼前隐去，
阿尔比温是再也不能使我欢欣，或者使我忧郁。

拜伦在这第三章最后还对女儿念念不忘，他在第一一五节中写道：

我的女儿！这一章诗以你的名字开始，
又以你的名字结束，诗到此写尽；
我看不到你的容貌，听不到你的声息，
但有谁更怀念你；多少年来总有个影
紧紧追随着你，它萦绕着你而不离分。
虽然你是永远再看不到我的脸颜，
但我的诗篇终会映射进你的眼睛，
渗入你的心坎，虽然那时我心已朽烂，
这是出自你父亲的手笔，他留下的声音和纪念。

拜伦追求自由、民主，讴歌各国的民族运动，但在安妮眼中，拜伦是“疯狂、邪恶且危险的”，因而不希望艾达受到其父亲那样不良品德的伤害，设法阻止艾达任何与她父亲相似的倾向。为此，艾达很小就开始接受科学与数学方面的教育。艾达的科学与数学老师有后来成为她丈夫的威廉•金（William King）以及著名数学家奥古斯都•德•摩根（Augusta De Morgan, 1806-1871）。安妮的精心培养使艾达获得了很强的数学素养，但并没能阻止她对父亲的同情。

艾达在 17 岁时与查尔斯•巴贝奇成了密友。艾达对巴贝奇建造分析机的想法极其着迷，而巴贝奇则对艾达的智力和写作能力非常佩服，赞她为“数字女巫（Enchantress of Numbers）”。

1842 年，意大利将军、政治家和数学家路易吉•梅纳布雷亚（Luigi Menabrea, 1809-1896）出版了介绍巴贝奇分析机的书《巴贝奇的分析机简要》（*Sketch of the Analytical Engine Invented by Charles Babbage*）。1843 年，艾达将这本书翻译成了英文。据巴贝奇在他晚年所撰自传《一个哲学家的生命历程》（*Passages From the Life of a Philosopher*, 1864 年）中的回忆，巴贝奇在得知艾达翻译了梅纳布雷亚的书后，问她既然自己对分析机这么熟悉，为何不自己写一篇原创文章？艾达回说，当初没想到这样做。然后巴贝奇即建议艾达针对梅纳布雷亚的书写一些注释。于是艾达在译文后连写了七篇后记，加起来是正文的三倍多[5]。

艾达在译注中给出了用分析机计算贝努利数[6]等问题的计算程序。因为巴贝奇对数字最感兴趣，所以只想到分析机可能成为强大的计算器。而艾达则预见到这样一台机器可以有更加广阔的用途。它不但可以用来表示数字，还可以表示单词与音乐，正如我们今日所实现的。

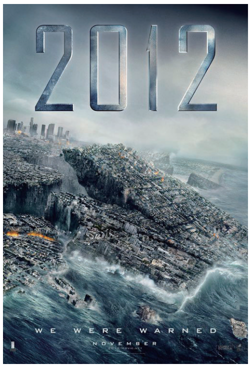
艾达年仅 36 岁即去世，与她父亲拜伦去世时年龄相同。根据她的遗愿，被葬于诺丁汉郡其父亲身边。为了纪念艾达，美国军方一个应用广泛的编程语言被命名为 Ada，这个语言是对另一个很有影响、同样以著名数学家的名字命名的编程语言 Pascal 的扩展。为了提高女性在科技和数学等方面的影响，每年的 10 月中的某一天被定为艾达•洛夫莱斯日（Ada Lovelace Day）。

26 玛雅历法纪念

图 122 玛雅历法纪念（2012 年 12 月 21 日，巴西、土耳其、意大利等共 40 余国）

[5] 参考 http://www.fourmilab.ch/babbage/sketch.html。

[6] 伯努利数是如下一常数列 $\{B_n\}$（取 $B_1=-\frac{1}{2}$）: $B_0=1, B_1=-\frac{1}{2}$, $B_2=\frac{1}{6}, B_3=0, B_4=-\frac{1}{30}, B_5=0, B_6=\frac{1}{42}, B_7=0, B_8=-\frac{1}{30}$ ……。这是雅各布•伯努利为了解决所谓的“等幂和”问题，即为计算自然数序列的整数次幂部分和 $\sum_{k=0}^{m-1} k^n = 0^n + 1^n + 2^n + 3^n + \cdots + (m-1)^n$ 而引入的（这里 n 为正整数）。这个和为一个 n+1 次多项式，系数与贝努利数密切相关：$\sum_{k=0}^{m-1} k^n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}B_k m^{n+1-k}$。例如，$0+1+2+3+\cdots+(m-1)=\frac{1}{2}(B_0m^2+2B_1m)=\frac{1}{2}(m^2-m)$, $0^2+1^2+2^2+3^2+\cdots+(m-1)^2=\frac{1}{3}(B_0m^3+3B_1m^2+3B_2m)=\frac{1}{6}m(2m-1)(m-1)$。贝努利数的一个简单定义是利用级数展开 $(|x|<2\pi)$: $\frac{x}{\exp(x)-1}=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{x^n}{n!}$。



(a) 海报

(b) 剧照

图 123 美国电影《2012》海报与剧照

地球和人类已平安度过 2012 年 12 月 21 日，然而，在此之前，民间盛传这一天是“玛雅历法预言”的世界末日。2009 年开始播映的科幻灾难片《2012》更以玛雅预言为背景，“呈现”了大地断裂、湖水干涸、埃菲尔铁塔倒塌、梵蒂冈崩溃、洪水来临等灾难场面。虽然许多人并不相信或以娱乐的心态对待此事，但也有不少人有疑虑乃至恐慌。

事实上，如我们后面将要解释，2012 年 12 月 21 日只是玛雅历法中的一个标志：一个计算周期即将结束，一个新的周期就要开始而已。谷歌涂鸦在这个特殊日期，用玛雅象形文字为元素，在形成谷歌徽标“Google”的同时，表示确切的日期“12 月 21 日”。谷歌设计涂鸦来纪念，是如往常对科技与数学的兴趣一样，关注玛雅人所创造的历法及其背后的数学和天文知识，祝福世界在下一个伯克盾里繁荣昌盛。

玛雅文明的历法、天文和数学知识为什么值得纪念呢？我们先来简单了解一下什么是玛雅文明。

玛雅文明出现在今中美洲的墨西哥南部、危地马拉、巴西、伯利兹以及洪都拉斯和萨尔瓦多西部等地区的热带丛林中，兴起于公元前 10 世纪，盛于 4-9 世纪。玛雅文明不可思议地高度发达：不知使用铁器，也不使用轮子，但却有着高超的建筑技术，建造了一座座布局严密、结构恢弘的巨型金字塔；玛雅人生产力低下，却观测到了非常精确的天文现象并制定了完整、复杂的历法系统。

在 8 世纪左右，玛雅人如谜一样地终止了建造自己的家园，大举迁移，放弃了已经高度发展的文明。有研究者认为，玛雅文明衰落的主要原因是以外部环境变化为导火索的内部相互残杀。在梅尔 • 吉布森（Mel Gibson）导演的关于玛雅人的电影《启示录》(*Apocalypto*, 2006 年）中，就展现了小部落被袭击，并以俘虏作活人献祭的血腥场面：玛雅祭司在金字塔顶端的神庙里主持祭祀，俘虏被剖开胸膛、活挖心脏进行烧烤，砍下的头颅沿着金字塔阶梯滚下。

《启示录》的末尾，两位追杀者和被追杀的主人公终于停止战斗，惊恐地看着海面上驶来的西班牙舰队。正是 16 世纪西班牙殖民者的入侵彻底毁灭了玛雅文明。西班牙人不但烧毁玛雅文献，还悉数杀害玛雅人中本来就为数不多的多通晓玛雅文者。于是，解读玛雅文明，只有依靠散落


图 124 玛雅文明的雕刻艺术

图 125 电影《启示录》宣传海报：玛雅金字塔上的祭祀

图 126 电影《启示录》剧照：西班牙人来了

图 127 《德累斯顿刻本》中的四页

在丛林中的玛雅遗迹和幸存下来的四本玛雅刻本了。

第一位对玛雅文明进行破译的是欧洲 19 世纪一位著名的通才：通晓动物学、语言学和考古学等十几门专业的康斯坦丁•拉菲内克（Constantine Rafinesque, 1783-1840）。拉菲内克最先从《德累斯顿刻本》（*Dresden Codex*）解读出玛雅计算系统并于 1832 年宣布了他的发现：玛雅文本中的一点表示 1，一横表示 5。

德累斯顿图书馆的馆员弗斯特曼（Ernst Förstemann, 1822-1906）随后做了进一步研究。他工作的图书馆恰好有《德累斯顿手刻本》，同时他也恰好可以读到 1562 年下令烧毁玛雅文献的主教兰达（Diego de Landa）写的一篇文稿《尤卡坦诸事之关系》（Relación de las Cosas de Yucatán）。弗斯特曼喜好数学，利用他的数学逻辑，解读出玛雅人用来决定何时进行决战的天文表以及历法循环（Calendar Round）。

原来玛雅人是用二十进制来进行计算的。正如我们通常使用的十进制可能受启发于一双手的十个手指头一样，玛雅人使用二十进制可能是因为一双手的十个手指和一双脚的十个脚趾之和。而玛雅人用一点来表示 1 可能和他们习惯用一个可可豆作为“货币单位”有关。

在二十进制中，首先需要知道如何表达从 0 到 19 这二十个数字。玛雅人在公元前 36 年就已经开始用贝壳形状的符号来表示 0，这比印度和阿拉伯人使用 0 都要早很多，而西方直到 12 世纪才用到 0。不过玛雅人只是在位值计算中使用 0，并不将 0 单独作为数字使用。首次将 0 用作数字计算是印度人的重要贡献。然后，玛雅人用一点和一横分别表示数字 1 和数字 5，以及四点表示数字 4，两横表示数字 10，两横上加四点表示数字 14 等。

二十进制的规则与十进制类似：处于第二位的数字表示这位数字的 20 倍；处于第三位的数字表示这位数字的 $400 = 20^2$ 倍，依此类推。所以，若要表达十进制的 17 469，则可将其表为 2.3.13.9，因为：

$$17\,469 = 2\times 20^3 + 3\times 20^2 + 13\times 20 + 9.$$

就如我们对十进制中的 10、100、1000 和 10 000 有专门的称呼（十、百、千和万）类似，在玛雅语中，20、400、8000、160 000、3 200 000 和 64 000 000 分别叫做 kal, bak, pic, calab, kinchil 和 alau。

作为比较，玛雅人简单地用一点、一横和贝壳符号这

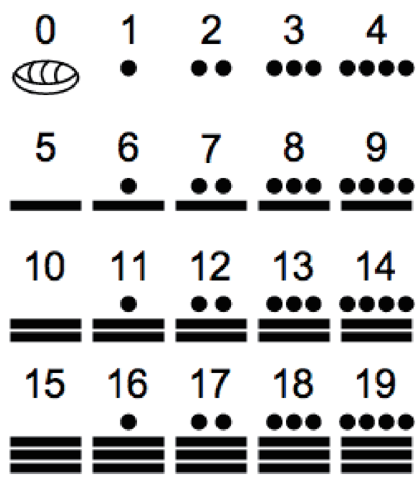


图 128 玛雅数字表示

三个符号的组合来表示数字，而罗马数字则需要用到七个符号，即 I（1）、V（5）、X（10）、L（50）、C（100）、D（500）和 M（1000），在表示数字时要用到如重复数次、右加左减等规则。例如，罗马数字 I、II、III、IV、V、VI、VII、VIII、IX、XI、XII、XIII、XIV、XV、XVI、XVII、XVIII、XIX、XX、XX1 分别表示从 1 到 21 这些数字。

玛雅人使用纯粹的二十进制来计数和进行加减法运算，但在表示时间时，对二十进制做了适当修改：第三位不是以 20 为底，而是采用 18。也就是说，在修正了的二十进制中，从低到高的位值分别为：1、20、360 = 18

$\times 20$、$7\ 200 = 20\times 18\times 20$ 和 $144\ 000 = 20^{20}\times 18\times 20$ 等。

玛雅人的二十进制很明显地反映在他们的历法中（如一个月总是 20 天），特别是玛雅人对二十进制的修订使得他们可以更为精确地计时。

玛雅历法是一个主要由三种历法（三个年）组成的系统：卓尔金历（Tzolkin 或 Tzolk'in）或宗教年，哈布历或太阳年，长计历或官方年。

卓尔金历用于宗教目的，13 个月，每月 20 天，全年共 260 日。

哈布历全年共 365 天，这与现行公历类似。只是哈布历中有 18 个月，每月 20 天，另外 5 天是禁忌日，让人们反思过去，考虑今天和未来。类似于中国传统用天干和地支结合起来纪年一样，玛雅人也将卓尔金历和哈布历结合起来形成历法循环：某一天既用卓尔金历也用哈布历表示。这一循环要经过 18 980（260 和 365 的最小公倍数）天或说 52（= 18 980/365）个太阳年、73（= 18 980/260）个宗教年。

玛雅人用的“长计历（Long Count）”，希望表示自玛雅元年开始的每一天。 在长计历中，

- 1 天（Kin）为最小的单位；
- 20 天为一月（乌纳，Uinal）；
- 18 个月为一年（盾，Tun，360 天）；
- 20 盾为一卡盾（Katun，20 年）；
- 20 卡盾为伯克盾（Baktun，400 年）；
- 20 伯克盾为一皮克盾（Pictun，8000 年）；
- 伯克盾之后依次还有卡拉盾（Calabtun）、金奇盾（Kinchiltun），直至阿托盾（Alautun，18×20^7 天）。

由此可见长计历能纪的时间为 23 040 000 000 天。从

图 129 2013 年 6 月 6 日，在墨西哥访问的习近平主席游览了古玛雅文化遗址奇琴伊察，图为习近平夫妇和墨西哥总统涅托夫妇合影，背景是卡斯蒂略金字塔

玛雅纪元算起，2012 年 12 月 21 日恰好是第 13 个伯克盾结束、一个 5 200 年的创世周期结束的日子。所谓的“世界末日”就如我们都要经历的年年岁岁、岁岁年年一样平常，只是纪年的方式不一样而已。

精确的历法依赖于精确的天文观测。例如，他们精确地计算出一个回归年，即地球绕太阳公转的时间为 365.242 129 天，与我们现在所知的 365.242 198 天相差无几；他们观测得到的金星年（金星绕太阳公转一年）为 584 日，与现代人的测算 583.92 日相差很小。

玛雅人先进的历法知识也反映在他们的建筑中。他们每隔 52 年要建造一座大型建筑物，每一座完成的建筑物都需符合天文上一定的要求。最有代表性的建筑之一是墨西哥尤卡坦半岛的卡斯蒂略金字塔（El Castillo，西班牙语，意为城堡）。 玛雅人崇拜太阳神，认为带羽毛的蛇神，是太阳神的化身，所以这一金字塔又被称为羽蛇神金字塔或库库尔坎（Kukulkan，玛雅神话中羽蛇神的名字）金字塔。卡斯蒂略金字塔建于 11 至 13 世纪之间，高 30 米，总共有 365 阶，每一阶就代表哈布历的一天；在春分与秋分的日出日落时，金字塔的拐角在北面的阶梯上投下羽蛇神状的阴影，并随着太阳的位置在金字塔的北面移动。

27 拉马努金诞辰 125 周年

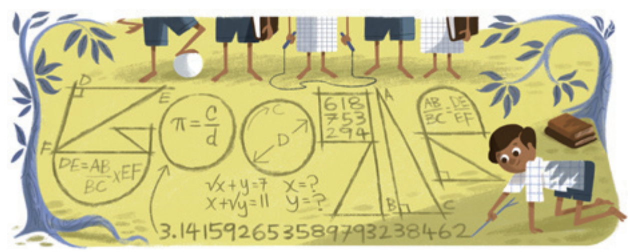


图 130 拉马努金诞辰 125 周年纪念（2012 年 12 月 22 日，印度）

2012 年 12 月 22 日，是印度充满传奇色彩的天才数学家斯里尼瓦瑟 • 拉马努金（Srinivasa Ramanujan, 1887 年 12 月 22 日 -1920 年 4 月 26 日）诞辰 125 周年的纪念日。因为拉马努金，2012 年被印度作为印度数学年纪念，而且从 2012 年开始，每年的 12 月 22 日被定为印度国家数学日。

谷歌印度以象征少年拉马努金在地面学习、书写数学结果的涂鸦来纪念他。涂鸦的内容有平面几何中的相似比、方程求解、幻方以及圆周率（涂鸦中写出 21 位）等内容。在涂鸦中，“Google”这六个字母用三角形、圆、半圆与正方形等几何图形来形成。

因为篇幅的关系，这里我们仅介绍纪念涂鸦中出现的

与拉马努金紧密相关的一些数学内容，即方程组、幻方与圆周率等。

拉马努金少年早慧。他的同学曾讲述的一个故事和涂鸦中的方程组

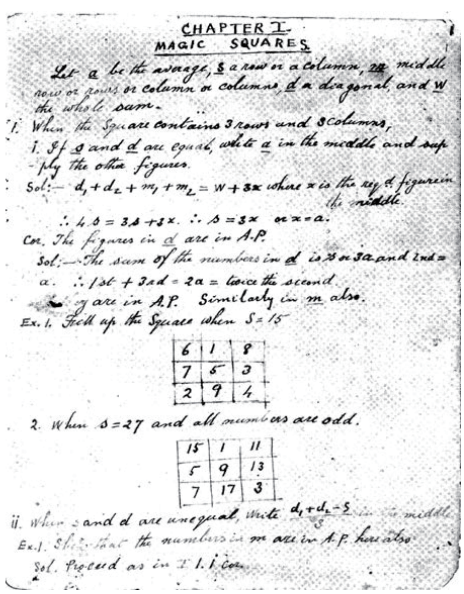
$$\begin{cases} \sqrt{x}+y=7, \\ x+\sqrt{y}=11 \end{cases}$$

有关。拉马努金在中学读书时，一位高年级同学问他如何求解上述方程，这样的问题本是更高年级同学才学习的，但就像答案早就印在脑海中一样，拉马努金不假思索地给出了正确答案：$x=9$，$y=4$。

所谓幻方就是排列成 n 行、n 列的方阵，其中填入 1 到 n^2 这 n^2 个连续自然数，以使得每行、每列以及对角线上的 n 个数字之和均相等。这样的方阵被称为 n 阶幻方。显然，幻方与整数分拆有些联系，这或许是拉马努金对此感兴趣的一个原因。附录中我们将通过金庸小说中相关话题再作更多介绍。

拉马努金在独自研究数学的过程中将自己所得到的结果记录在三本笔记本上。第一本笔记本的第一章即是关于幻方的，有标题《幻方》(*Magic Squares*)，而其它各章都没有标题。

拉马努金纪念涂鸦中出现的三阶幻方即是来自他的笔记本中的第一页上的第一个幻方。这个三阶幻方，将数字 1 到 9 排成三行三列，行和、列和以及对角线之和均为 15。此幻方顺时针旋转 90 度之后，恰为我国古代洛书上的幻方（参考图 162）。


CHAPTER I.
MAGIC SQUARES
Let a be the average, s a row or a column, m middle row or rows or column or columns, d a diagonal and w the whole sum.
I. When the square contains 3 rows and 3 columns,
i. If s and d are equal, write a in the middle and supply the other figures.
Sol:— $d_1+d_2+m_1+m_2 = w+3x$ where x is the no. of figure in the middle
∴ $4.s = 3.s+3x$. ∴ $s=3x$ or $x=a$.
Cor. The figures in d are in A.P.
Sol:— The sum of the numbers in d is 3a or 3a and 1st + 3rd = 2a = twice the second.
∴ ... are in A.P. Similarly in m also.
Ex. 1. Fill up the square when S = 15

6	1	8
7	5	3
2	9	4

2. When s = 27 and all numbers are odd.

15	1	11
5	9	13
7	17	3

ii. When s and d are unequal, write d_1+d_2-S in the middle
Ex. 1. Show that the numbers in m are in A.P. here also.
Sol. Proceed as in I. i. Cor.

图 131 拉马努金笔记本中的一页（来自 http://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/notebookindex.htm），其中一个幻方被用于涂鸦中。

(a) 原雕刻

7	12	1	14
2	13	8	11
16	3	10	5
9	6	15	4

(b) 数字表示

图 132 印度耆那幻方

在拉马努金之前，印度历史上也出现过幻方。有世界文化遗产之称的印度中央邦北部的卡杰拉霍（Khajuraho）神庙建筑群中有一座耆那教（Jainism）的帕尔斯瓦纳特（Parshvanath）神庙，庙里有一个四阶幻方，距今已有约一千余年的历史。

拉马努金在圆周率 π 方面有不少贡献，发现了很多相关的公式。

下面与 π 有关的常数被称为拉马努金常数：

$$e^{\pi\sqrt{163}} = 262537412640768743.99999999999925\ldots$$

它的特点是与整数非常地接近，而且联系了数学中常用的常数 e 和 π。

拉马努金在一篇名为《模方程与 π 的逼近》(*Modular Equations and Approximations to Pi*) 的文章中提出了如下关于圆周率的著名公式：

$$\frac{1}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{9801}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}}.$$

这个级数收敛相当快速。例如，只取一项（$n=0$），就可以得到圆周率前 8 位十进制精度：

$$\pi \approx \frac{9801}{2\cdot 1103\cdot\sqrt{2}} \approx 3.14159273001.$$

1985 年比尔 • 高斯珀（Bill Gosper）将这个公式改写成连分数的形式，得到了圆周率的一千七百万位。其特点是不需连续计算圆周率。楚德诺夫斯基兄弟（David 与 Gregory Chudnovsky）改进了拉马努金的公式，不但计算可以间断，还可以用不同计算机计算，再将结果组合。他们的算法创造过几次圆周率计算的世界纪录，如 2.7 万亿（2009 年）、5 万亿（2010 年）、10 万亿（2011 年）位。

28 托里斯诞辰 160 周年

图 133 托里斯诞辰 160 周年纪念（2012 年 12 月 28 日，西班牙）

2012 年 12 月 28 日谷歌西班牙以涂鸦纪念该国工程师和数学家莱昂纳多 • 托里斯 • 克维多（Leonardo Torres y Quevedo, 1852 年 12 月 28 日 -1936 年 12 月 18 日）诞辰 160 周年。

1870 年，十八岁的托里斯随父亲迁到马德里，同时进入马德里技术大学的土木工程系读书。1873 年，在第三次卡洛斯战争期间，他曾休学志愿参加毕尔巴鄂（Bilbao）的保卫战。托里斯于 1876 年以优异的成绩毕业，并到他父亲任职工程师的铁路公司工作。但同年，他即开始了一次在欧洲大陆的长途旅行，考察欧洲先进的科学技术，特别是当时电的早期应用。后来他继承了一些遗产，便从铁路公司辞职，专心从事机械发明。

托里斯是一位天才的工程师。他是空中缆车设计先驱，世界上第二个演示了无线电控制的力量，他设计的飞艇在第一次世界大战中为英法所用，在自动化领域也取得了很大的成绩，是现代计算机和机器人的先驱。我们下面仅介绍与纪念涂鸦有关的一些内容：空中缆车、下棋机器和模拟计算器。

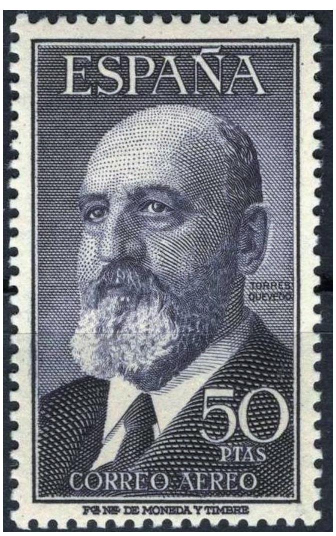


图 134 西班牙 1955 年发行的纪念托里斯的邮票，面值 50 比塞塔

美加边境的尼亚加拉河上有著名的尼亚加拉大瀑布。瀑布冲出的峡谷中水流奔腾不息，于下游 4 千多米处突然一转，激流形成了一个大漩涡。要仔细观赏大漩涡并一览其上下游的壮观景色，可以乘坐大漩涡上的空中缆车（Niagara Whirlpool Aero Car）。缆车属于加拿大，设计精巧，已经有很长的历史了：它在 1914 年到 1916 年间建造，1916 年正式对外开放，安全运行至今。今天，大瀑布，大漩涡和缆车都是非常吸引人的景点。

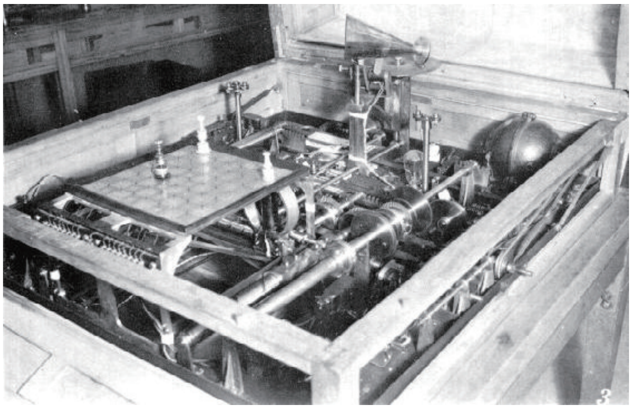
纪念托里斯的涂鸦上的缆车原型即为这个大漩涡上的空中缆车。该缆车是迄今唯一还存在的托里斯设计的缆车作品。这个缆车又名西班牙缆车，不仅是因为它系西班牙人设计，也是因为它是由西班牙人投资建造的。

历史上最早的“人机对弈”出现在 18 世纪晚期。奥地利的沃尔夫冈 • 冯 • 肯佩伦在 1770 年为取悦玛丽娅 • 特蕾西娅女大公而建造并展出了土耳其行棋傀儡。这是一个“自动下棋装置”，还能执行骑士巡逻，将马放在棋盘上，可使它走遍棋盘上每一格。这个装置因为击败了许多人类下棋高手而名声大噪。但后来被证明这其实是一场骗局：有一名棋界高手藏在机器里面进行操作。

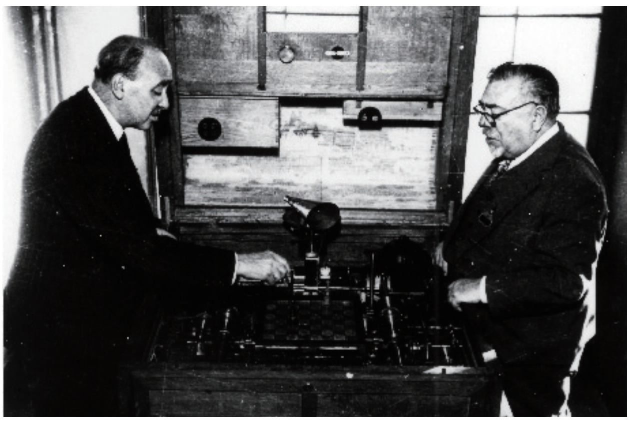
世界上第一个真实会下国际象棋的机器是托里斯设计并制造的 El Ajedrecista（下棋者，西班牙语）。El Ajedrecista 由托里斯从 1910 年开始建造，1914 年在巴黎首次公开展出。它能自动地指挥王和车与另一方的王进行残局对决。这也是为何在纪念涂鸦中的缆车里面，不但有托里斯，一头牛，还有两个象棋棋子——王和车——的原因。

受巴贝奇的差分机和分析机的启发，托里斯设计并制造了一台可以计算多项式的值与代数方程的根的机器（托里斯将之称为“代数机”），精度达到千分之一。 他设计了一个模拟机械装置用来计算。因为使用的是模拟方法，可以计算多项式的任意值。而巴贝奇使用的是差分法，计算的是对应于等间距数值的数表。

图 135 西班牙 1983 年发行纪念托里斯的邮票，面值 50 比塞塔，图中有尼亚加拉漩涡空中缆车



(a) 1920 年托里斯的儿子(Gonzalo Torres Quevedo)改造的下棋机器：用电磁控制代替机械臂



（b）1951 年，托里斯的儿子向维纳（右）演示下棋机

图 136

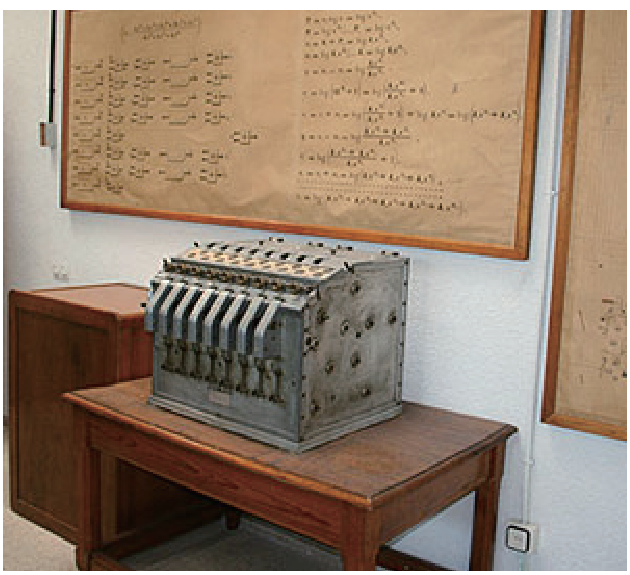


图 137 托里斯的代数机

29 数学教育相关涂鸦

图 138 开学第一天纪念（2008 年 9 月 1 日，乌克兰、吉尔吉斯斯坦、白俄罗斯、波兰、立陶宛、法国、拉脱维亚、哈萨克斯坦、俄罗斯）

图 139 教师节纪念（2011 年 9 月 10 日，土耳其、中国、台湾、香港、波兰）

图 140 教师节纪念（2013 年 1 月 16 日，泰国）

谷歌涂鸦中有不少以教育为背景的纪念涂鸦，其中一些有数学内容。

自 2005 年至本文完稿，除了 2007 年外，在一些地区或国家出现过纪念教师节的涂鸦（2005 年有两个涂鸦）；自 2007 年到 2011 年，每年也都出现有纪念开学第一天的涂鸦。这些纪念涂鸦中，有几个涂鸦中出现了直尺、圆等数学相关元素。

女孩节和妇女节也是谷歌涂鸦常常出现的主题。例如日本传统的女儿节就有谷歌涂鸦纪念。有意思的是有着现代涵义的德国女孩节。

2008 年 4 月 23 日，谷歌德国以涂鸦纪念德国女孩节（“Mädchen-Zukunftstag”，字面意义为女孩 - 未来日），主图为一位扎着马尾辫小女孩在一面白板上用蓝色笔演算数学，有积分公式等数学内容。2009 年 4 月 23 日的德国谷歌也纪

念了同一个节日，只是这一次采用了机器人元素。

德国的女孩节自 2001 年开始成为德国全国性的年度节日，一般为 4 月的第四个星期四。它由德国联邦教育部、德国工会联合会和一些私营公司发起。其目的，一方面是为呼唤社会及企业负责人关注青年女工的学习、就业及生存状况，尽可能地为她们提供合适的工作岗位；另一方面也是为了培养女孩对多种职业的兴趣，特别是那些由男性占主导的科学、技术等领域，而不是理发师、花匠或秘书等传统的女性职业，以促进工作上的性别平等。“女孩节”这一概念来自于美国“带子女上班日（Take Our Daughters and Sons to Work Day）活动”，这一天中子女可以观摩父母的工作情形。

德国女孩节在德国很受重视，现任总理默克尔每逢女孩节都会发表演讲，参与女孩节活动等。一些公司、大学实验室也都会组织相应活动，学校积极组织学生参与，电视台等媒体都会报道。

有意思的是，德国女孩节的同一天也是德国的男生节。其目的也是促进男生对传统上为女性占多数的职业产生兴趣。

德国女孩节、男生节有专门的主页，分别为：http://www.girls-day.de、http://www.boys-day.de。

图 141 日本女孩节纪念（2010 年 3 月 3 日，日本）

图 142 德国女孩节纪念（2008 年 4 月 23 日，德国）

图 143 德国女孩节纪念（2009 年 4 月 23 日，德国）

图 144 2012 年 4 月 25 日德国总理默克尔在女孩节前夕邀请 25 位女孩到总理府作客并共同参与活动

30 附录一：查尔斯·巴贝奇简介

图 145 查尔斯·巴贝奇

前面介绍艾达以及托里斯时，我们都提到了巴贝奇（Charles Babbage, 1791-1871）设计的差分机和分析机；同时，本系列“中”部分里介绍的，图灵的图灵机也与巴贝奇的分析机有关。这里，巴贝奇都是以“计算机之父”的身份出现的。实际上，巴贝奇是一位达·芬奇式的人，才华横溢，在计算机领域之外，他的成就还涉及数学、保险、政治经济学、哲学、密码学与机械工程等等；而他的发明，大至分析机，小到格林威治时间信号（整点报时的六声哔哔声）。然而他生前及死后很长时间却被大多数人看做是一个怪人，妄想造出用于计算的机器。他的经历丰富而又传奇，很值得我们去了解。

查尔斯·巴贝奇在 1791 年 12 月 6 日出生于英国伦敦

的沃尔沃思(Walworth)。他的父亲本杰明 • 巴贝奇(Benjamin Babbage)是一位银行家，在伦敦工作。100 多年后另一位也常被称为“计算机之父”的冯 • 诺依曼同样有着一位作银行家的父亲。富有的家境不但使巴贝奇获得了良好的教育，也使他后来得以继承丰厚的遗产用于支持自己的研究。

巴贝奇在 8、9 岁的时候曾发高烧。已经失去两个儿子的父母将他送到德文郡（Devon）乡下修养，并在爱范顿(Alphington)选择了一个学校供他读书。这所学校“教英语、拉丁语和希腊语以及商业和海事服务方面的必要技能”。他在爱范顿时,从其它男孩那里听到各种“魔鬼”出没的传闻。他通过相当系统的实验对此进行了否定。这体现了巴贝奇从小就具有强烈的怀疑精神以及用科学方法进行探索的能力。

当身体恢复得差不多时，巴贝奇搬到伦敦北部的恩菲尔德（Entfield）一个有三十名学生的小学校学习。这个学校的图书馆有三百多卷从各个学科精选的图书，巴贝奇很喜欢。他在其自传《一个哲学家的生命历程》[7] 中写道：

“我从这个图书馆获益极大。我提到它是因为我认为每个学校有这样一个图书馆是很重要的。”

这个图书馆也激发了巴贝奇对数学的兴趣。特别，巴贝奇还认真学习了约翰 • 瓦德（John Ward）的《年轻数学家导引》(*The Young Mathematician's Guide*: *Being a Plain and Easy Introduction to the Mathematicks ...With an Appendix of Practical Gauging*, 1771 年)，巴贝奇描述道：

“(学校图书馆的）书中有一本代数学著作，是瓦德的年轻数学家导引。我偏爱数学课程，因此这本书书吸引了我特别的注意。在这个学校学习 12 个月之后，我向一位好学的同学提出，我们每天早上三点起床，在教室中点火，工作到五点或五点半。我们不间断地花了几个月一起完成了这件事情。”

巴贝奇对发明与创造的浓厚兴趣在其幼年时期也有体现。他从小就喜欢探索事物背后的原因。巴贝奇在其自传中回忆过一些细节。得到新的玩具时，巴贝奇总会问：“妈妈，这里面是什么东西？”如果妈妈的回答不满意，他就拆卸玩具看个究竟。巴贝奇小时还曾绑两木板在脚底，试图发明可以在水面行走的工具，因而差点淹死！他的这种“童心”，对未知的好奇在他的一生中都有体现。例如，到剧院后，当别人沉醉于莫扎特的音乐时，他则绕到后台了解舞台相关的机械设备是如何运作的。

巴贝奇在恩菲尔德学习了几年之后曾到剑桥附近接受过几年私人指导。期间他学习了许多著作。巴贝奇在其自传中列举了一些他读过的书，其中有意大利女数学家玛利亚 • 阿涅西（Maria Gaetana Agnesi, 1718-1799）的分析教程，英

图 146 1991 年英国发行纪念巴贝奇的邮票

国曾任卢卡斯讲席教授（这是牛顿及其老师巴罗曾经担任过的职位）的数学家罗伯特 • 伍德豪斯（Robert Woodhouse, 1773-1827）的《分析学原理》(*Principles of Analytical Calculation*）以及法国数学家拉格朗日（Joseph Lagrange, 1736-1813）的《解析函数论》(*Théorie des Fonctions Analytiques*）等。特别是，他还以高价购买了法国数学家席维斯 • 拉克鲁克斯（Sylvestre François Lacroix）的《微分学与积分学》(*Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Chez Courcier, Paris, 1797-1798)。当时因为拿破仑的战争而使得法国书籍贵且不易得到。

在 1810 年，19 岁的巴贝奇进入剑桥三一学院学习。他期待剑桥有胜任的教师能给他学习过程中碰到的问题加以指导。但不久，他就对剑桥的数学教学异常失望。巴贝奇已经熟稔牛顿的点，莱布尼兹的 d 以及拉格朗日的撇 [8]。因此他对剑桥的单调教学不满足。他曾以数学难点向教师请教，有的教师以考试不考为由拒绝回答，转而建议巴贝奇考虑更基础的问题；还有的教师不但对巴贝奇所问的问题不懂，还试图隐瞒自己的无知。

这也难怪这些教师。在巴贝奇所处时代，英国的数学已经开始衰落：牛顿、斯特林和棣莫弗等名家都已分别去世、退休和离职。而欧洲大陆的数学则群雄并起，有着拉格朗日、勒让德、拉普拉斯、欧拉、伯努利和高斯等大家。然而，由

[7] 即前文提到的 *Passages From the Life of a Philosopher*，1864 年。后文提到巴贝奇的自传均指此书。

[8] 例如，函数 $y=f(x)$ 关于 x 的一、二阶导数，牛顿的记号为 $\dot{y}, \ddot{y}$；莱布尼兹的记号为 $\frac{dy}{dx}$，$\frac{d^2y}{dx^2}$；拉格朗日的记号为 f', f''。

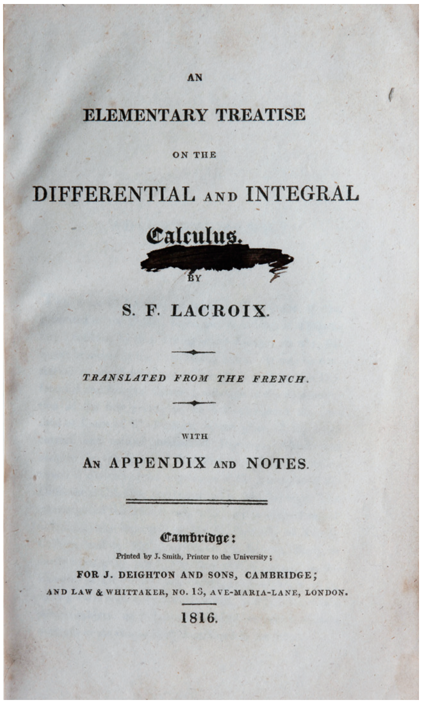


图 147 巴贝奇等 1816 年翻译出版的拉克鲁克斯微积分著作

于牛顿 - 莱布尼兹优先权之争引起的分裂，英国数学囿于牛顿的影响，固步自封，并不向欧洲大陆的数学学习以跟上发展。

没有教师的指导，巴贝奇便转向图书馆，阅读圣彼得堡、柏林与巴黎等地科学院的论文。巴贝奇还在剑桥结识了许多志同道合的朋友。1812 年，巴贝奇与乔治 • 皮科克（George Peacock, 1791-1858）和约翰 • 赫歇尔（John Herschel, 1792-1871）成立“分析学会（Analytical Society）”，其目的是推广莱布尼兹的微积分（分析学）来对抗牛顿的微积分体系。巴贝奇的前辈伍德豪斯在其著作中实际上已经开始向大陆学习，但没有产生大的影响。

这个学会的成立，标志着英国数学和科学变革的开始。这场变革延续至英国数学家哈代对分析学的坚持。分析学会的一个主要动作是在 1816 年从法文翻译出版拉克鲁克斯的《微分学与积分学》（英文译著的书名为 *An Elementary Treatise on the Differential and Integral Calculus*）。这本书是当时最好的阐述微积分的教材。他们还在剑桥著名的数学考试（Tripos，世界大学考试之母）中，引入欧洲大陆的数学，规定要使用莱布尼兹的记号，否则即判不及格。

[9] 阿道夫 • 凯特勒（Adolphe Quetelet, 1796-1874）。凯特勒对人类性状使用正态曲线，也用分析的角度来讨论犯罪。因此他的工作是统计思想在社会学上的早期使用。

这场变革激起了英国许多数学家对符号运算和代数的热情。他们中有布尔代数的发明人乔治 • 布尔（George Boole, 1815-1864），得到过形式逻辑中著名的德 • 摩根定理的也有前述艾达的老师德 • 摩根。德 • 摩根还受此影响，学习法国数学，于 1838 年写了一本概率论方面的著作（*An Essay on Probabilities*）。

18 世纪，不但数学，英国的科学也整体衰落。1830 年，巴贝奇出版《科学衰落及其原因的反思》（*Reflections on the Decline of Science and some of its Causes*）。书中，他对英国科学的衰落进行了讨论，涉及英国院士选举等现实问题，希望改革英国皇家协会，促进科学的进步。正是在这本书的影响下，英国在 1831 年成立了英国科学促进会（British Association for the Advancement of Science，简写为 BAAS）。

巴贝奇因为在数学方面的成就在 1816 年被选为皇家学会院士（Fellow of Society，简称为 FRS）。1828 年，巴贝奇的朋友替他申请到了剑桥大学“卢卡斯”数学教授 。起初，身在国外的巴贝奇想写信拒绝，但被说服接受。然而，从任职“卢卡斯”教授开始到 1839 年巴贝奇因希望专心设计差分机而辞职的 11 年间，巴贝奇没在剑桥讲过一次课。

巴贝奇等成立的分析学会后来变成剑桥哲学学会，迄今仍在。巴贝奇还参与创立了几个其它著名的学会，如伦敦统计学会与皇家天文学会。伦敦统计学会原是 BAAS 下设的一个临时部门。1833 年，社会统计学先驱凯特勒[9]来参加 BAAS 的第三次会议。但凯特勒一到，即发现 BAAS 下没有统计学组。于是巴贝奇建议设立一个临时的统计学组。在此基础上，1834 年，他宣布成立伦敦统计学会（现伦敦皇家统计学会）。

巴贝奇喜欢搜集、整理数据，他认为一切数据都是有用的。他的一个计划就是制作“物理常数”（“自然常数”）表，编辑各学科中可用数字表示的事实成书。例如，他会测量猪的心跳，小牛的呼吸频率，并将之归于哺乳动物类常数。巴贝奇对数字的偏爱有时显得特别奇怪，他不但感兴趣于动物一天的食量，还记录牛或骆驼一天能犁多少地。

但恰是因为巴贝奇对数据的认真分析，使得他成为运筹学的先驱。他在政治经济学以及邮政改革方面的成就是两个著名的例子。

1832 年，巴贝奇出版《论机器和制造业的经济》（*On the Economy of Machinery and Manufactures*）。这是一本马克思常引用的政治经济学著作。在这本书中，他对专业分工、劳资关系、科学分析等作了系统的论述。例如，他发现专业分工可使生产率提高，这个事实现在被称为巴贝奇原理。作为例子，巴贝奇用他的方法分析了印刷行业，揭露了行业利润是如何产生的（但这却得罪了出版商，导致出版商拒绝出版他的著作）。

图 148 印有维多利亚女王头像的“黑便士”邮票（1840 年 5 月 1 日在英国正式发行，6 日投入使用）

图 149 19 世纪用数学表（图片来自美国山景城计算机博物馆）

巴贝奇还分析了英国的邮政业，是“均一邮资制”的创始人。1840 年以前，有邮政业务的国家一般实行“递进邮资制”，按照邮件递送的距离以及信纸张数由收件人支付高昂的费用。巴贝奇经过分析，发现邮件的收集、盖戳、分拣、投递费用远大于邮件的运送费。于是建议不论邮件寄递远近，均采用相同邮资，并由寄件人付费。

基于巴贝奇的论述，英国人罗兰 • 希尔（Rowland Hill, 1795-1879）力倡改革，促使英国议会通过了著名的“一便士邮资法”，并从 1840 年月 1 月 10 日在英国实行“均一邮资制”：不论远近，信函每盎斯均收费一便士，由寄件人付费，并贴上预付费标签。这就导致了英国邮局在 1840 年发布了世界上第一枚邮票——著名的“黑便士”邮票，这是“均一邮资制”以邮票面值形式的首次表现。

巴贝奇所处时代已有如对数表等各种数表被广泛用于天文计算、航海等各种目的。计算能力是一些人的谋生手段，现在我们用来指计算机的英文词汇“computer”最早是指这样一些人，只是到后来才逐渐变为进行计算以及完成更多任务的机器。但人工计算、抄写、校对、排版和印刷等不但任务艰巨，同时不可避免地存在各种失误。有失误就有代价，航海表中的错误，对于海员是生死攸关的事情。巴贝奇对数字严格要求，见到数表中的种种错误后，还写信给出版商进行严厉的批评。后来他想到数表制作应该由机器来完成，从计算到结果输出，全部都自动化，这样人工失误就可以得到避免。这样的思想，与现在谷歌研发自动驾驶汽车，避免人的参与来预防交通事故类似。

值得一提的是，巴贝奇还将他的这种用机器来代替人工计算的思想用于他在 1837 年发表的自然神学论著《布里奇沃特论著第九编》（*The Ninth Bridgewater Treatise*）中。粗略地说，在这本书中，巴贝奇将世界比作一台机器，将上帝比作一个程序员，奇迹乃是源于上帝设计的复杂程序，而非即兴创作。

巴贝奇自己就对机械与发明很感兴趣，还亲自设计过火车头前的排障器以及火车动力检测车（Dynamometer car，用于测量牵引力、功率以及最高速度等）。对数字与机械的双重爱好和对它们的掌控，使得巴贝奇有了设计机器用以计算的兴趣和能力。巴贝奇在其自传中说自己大约在 1812-1813 年想到了数表的制作可以用机器来完成。他在其自传中有过生动叙述：

> 我坐在分析学会的房间里，在剑桥，我的头前倾在桌面迷糊着，一部对数表在我面前平躺着。另一位会员进来见我半睡着，叫我，“巴贝奇，你好啊，梦见什么了呢？”我一边指着对数表，一边回答说：“我在想这些数表或许可以用机器来计算。”

巴贝奇在一开始做了一个小的模型，可以进行二次多项式的计算，能精确到六位小数。1823 年，他获得英国政府 1 700 英镑的资助，着手制造差分机一号（Difference Engine No. 1，差分机也常被翻译为差分引擎），这是一台可以进行 20 位数字计算的机器。

差分机是利用有限差分的原理来计算多项式的一系列值。它通过齿轮转动来做加减法，为避免抄写错误还有输出终端将结果打印成书。差分原理使得计算可以循环并避免乘除法运算。

让我们考虑一个简单的例子：计算 $f(x) = x^2 + 3$ 在等间距数值 1、2、3、4、5 等处的值。假设已经知道 f 在 1、2、3、4 处的初始值 4、7、12、19。这几个数值第一次差分（即后一个数值减去前一个数值）为 3、5、7，第二次差分为 2、2（3、5、7 这三个数值的后一个数值减去前一个）。通过所得二次

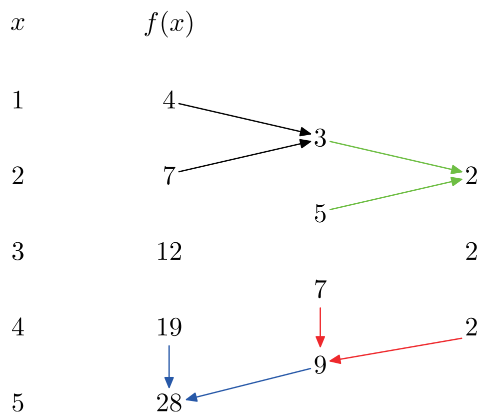


图 150 差分原理

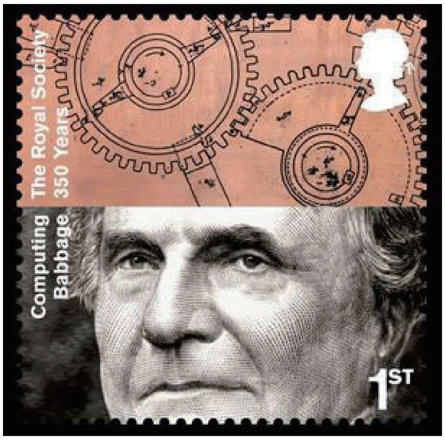


图 153 2010 年英国发行纪念巴贝奇齿轮的邮票

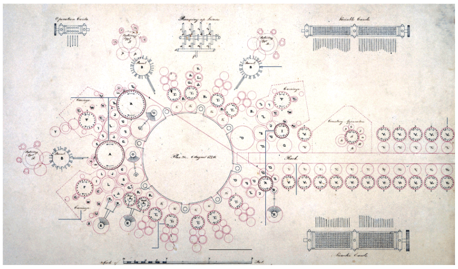


图 154 巴贝奇设计分析机所绘 250 幅图片之一

差分值相同，可以判断不要再继续做差分了（一般地，n 阶多项式的 n 次差分为常数）。反过去做加法，由 $2+7=9$，$9+19=28$ 可以得到 $f(5)=28$。其它数值如 $f(6)$ 可以依次类推。

早在 17 世纪，就出现了采用齿轮传动装置进行工作的计算器。1642 年，法国数学家帕斯卡制造了最早可进行加、减运算的计算器（例如，做加法时，一个转过十位的齿轮会带动相连的另一个齿轮转过一位）；1672 年左右，德国数学家莱布尼兹制成了可进行加、减、乘、除运算的计算器。但巴贝奇处的工业时代，蒸汽机和各种机械装置被广泛运用，人们对于用机械的力量掌握世界充满信心——只要想想英国在巴贝奇去世 40 年后造出了超级巨轮泰坦尼克号就足够了。巴贝奇的设计已经不再是只进行加减乘除计算的小型机器了。

巴贝奇雇佣当时最优秀的天才工匠约瑟夫 • 克莱蒙（Joseph Clement，1779-1844）来帮忙制造那些精细的零件。但差分机一号非常复杂，若完工，需要 25 000 个零件，重

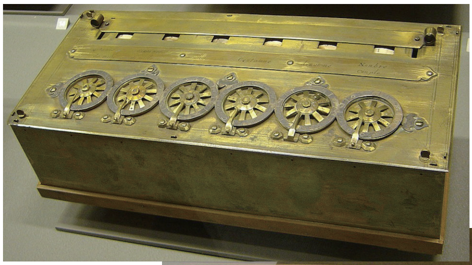


图 151 帕斯卡发明的计算器

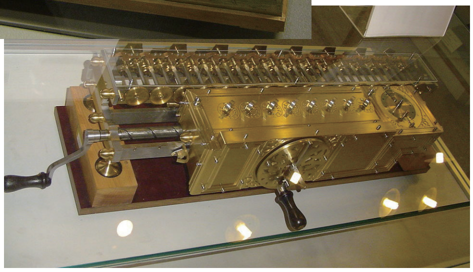


图 152 莱布尼兹发明的计算器

15 吨。到 1833 年，差分机只完成设计的七分之一。精密零件制造起来的困难，加之巴贝奇不断地修改设计方案，导致巴贝奇与克莱蒙关系紧张，最后克莱蒙辞职，雇员被解散，随之，英国政府也停止了资助。

1834 年，巴贝奇在制造差分机一号的基础上产生了更加雄伟的计划：设计一个更加通用的计算机。这就是巴贝奇的“分析机”（Analytical Engine，也翻译为分析引擎）。它由蒸汽驱动，由无数齿轮和杠杆组成，有一台机车那么大。为此，巴贝奇写了数千页的文档，还画了 250 幅图来说明这台机器的构造。

最令我们赞叹的是分析机的核心思想已经和现代计算机的逻辑原则基本无二。

现代计算机由五大部件组成：控制器、运算器、存储器、输入设备和输出设备；控制器、运算器和存储器统称为中央处理器，即常说的 CPU。通过输入设备，指令序列和原始数据先被送进存储器，经过控制器译码后，控制着运算器操作数据运算，运算结果送回存储器，最后由输出设备显示或打印。

分析机的“中央处理器”由三大部件组成：

1.“仓库”（Store）：这是分析机的“寄存器”，由齿轮组成，

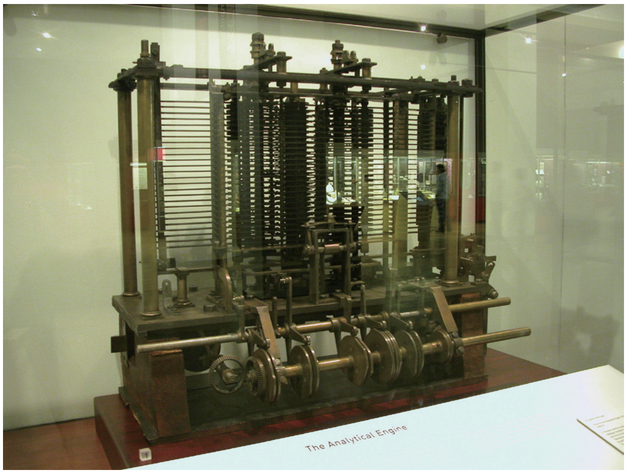


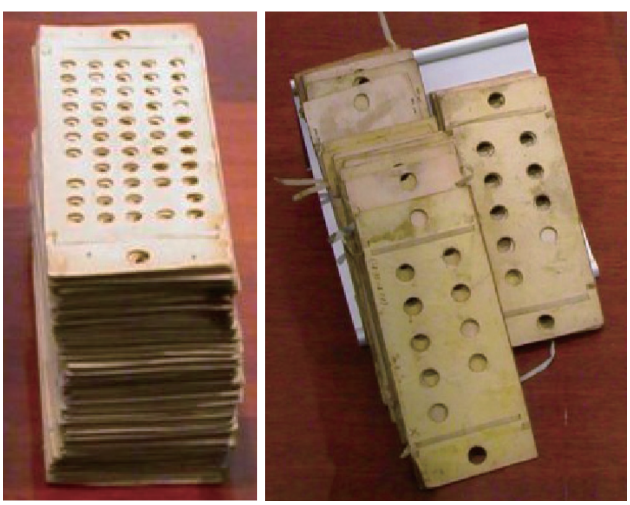
图 155 巴贝奇 1871 年建造的分析机实验模型（伦敦科学博物馆藏）

每个齿轮可贮存 10 个数，齿轮组成的阵列共能够储存 1000 个 50 位数；

2. “作坊”（Mill）：这是分析机的“运算器”，利用齿轮间的啮合、旋转、平移等方式进行各种数字运算。

3. 第三部分是分析机的“控制器”，用穿孔卡（Punch Card）来控制运算操作的顺序。穿孔卡片利用卡片上的“有孔”与“无孔”来存储信息。

这里的一个创新是将穿孔卡片用于计算机，其想法来自于当时广泛运用于生产的杰卡德（Joseph Marie Jacquard, 1752-1834）提花机，这种提花机用穿孔卡片自动控制提花机编制布匹上的图案。类似的思想在很多场合可以看到，比如手摇钢琴中的乐曲信息即存贮在穿孔纸带中。



(a) (b)

图 156 分析机使用的两种穿孔卡

图 157 艺人表演手摇钢琴与其中的穿孔纸带（作者 2013 年 5 月 19 日摄于比勒费尔德）

由此可见，巴贝奇的分析机已是通用机，有了程序控制的初步思想。现在人们已经证明，分析机是图灵完备的，即它具有等同于通用图灵机的能力（可模拟通用图灵机）。什么是通用图灵机呢？先得从图灵机说起。

图灵机是英国数学家阿兰 • 图灵在 1936 年提出，我们之前已经通过谷歌图灵机游戏对它有了直观的认识，因此不难理解它的抽象叙述了。图灵机由以下几个部分组成：

1. 一条纸带（Tape）：它被划分为连续的小方格，可向两端无限延伸。每个方格可以是空白，也可以存储一个来自有限字符表中的任意一个符号；

2. 一个控制器（Table）：它具有有限个状态以及指令序列，可以控制纸带的左右移动以及读写头的操作；

3. 一个读写头（Head）：它与控制器可进行通信，能读出当前所指方格中的符号，接受控制器的指令，使得该读写头按指令相对于纸带做左右移动，并且也可以写入一个符号。

所谓通用图灵机是一台可以模拟任意其它图灵机的图灵机，它能完成人类所能完成的任意复杂程序和计算过程。

图灵关于图灵机的工作以及他和同事在布莱切利庄园建造密码破译机很有可能受到巴贝奇的影响。

在分析机之后，巴贝奇 1847-1849 年间重新设计了差分机，被称为差分机二号，其零件数只有差分机一号的三分之一。差分机二号有八个立轴，每个立轴有 31 个带数字的

齿轮。七个立轴中的每个立轴对应七阶差分中的某一阶，最后一个立轴用于显示最终结果。所以，差分机二号可以处理七阶多项式的值，精度至 31 位数字。

除了部分样品，巴贝奇生前都未能真正制造出来差分机和分析机。虽然如此，但受到巴贝奇的影响，瑞典人舒兹父子（Per Georg Scheutz，1785-1873 与儿子 Edvard Scheutz）在 1837 年发明了舒兹计算引擎。该机器的改进版还在 1859 年、1860 年分别售给英、美政府，用于制作对数表。

巴贝奇未获成功的原因是多方面的，有复杂设计带来的技术挑战，以及缺乏资助等表面原因，也有管理等方面的不足。巴贝奇严格挑剔、不善合作的个性也是他失败的一个原因。

一个一定程度上能说明他的性格的例子是他向当时的桂冠诗人丁尼生男爵（Alfred Tennyson, 1809-1892）写信挑错的故事。

巴贝奇对丁尼生在 1842 年的诗歌《罪恶的幻觉》（The Vision of Sin）中的诗句

> 每一瞬间，一人去世（Every moment dies a man），
> 每一瞬间，一人降生（Every moment one is born）。

批评道："如果这是正确的，则世界人口会保持不变。但事实是，出生率比死亡率稍高。我建议您的诗歌再版时，将它修改为

> 每一瞬间，一人去世（Every moment dies a man），
> 每一瞬间，一又十六分之一的人降生（And one and a sixteenth is born）。

巴贝奇还指出"严格说，精确的数字是 1.167，但我想对于诗歌，考虑到押韵，$1\frac{1}{16}$ 是足够精确了。"

巴贝奇对丁尼生诗句的批评，或许只是丁尼生自己一人不高兴而已。但巴贝奇对公共滋扰的反对却招致了很大的麻烦。其自传第 XXVI 章的标题即是"街头滋扰（Street Nuisances）"。

巴贝奇一向不喜欢街头"暴民"。他曾发挥自己善于统计的特长，到一家玻璃厂计算过破碎玻璃板，发表文章，研究玻璃板破碎起因的相对频率表：464 块破碎的窗玻璃中，有 14 起是醉汉、女人以及男孩导致的。

1864 年，他写了一篇《街头滋扰之观察》（*Observations of Street Nuisances*）的文章，记录了 80 天中发生的 165 起扰民事件。他还发起反滚铁圈运动。他批评滚铁圈的孩子在马腿下面滚铁圈，常导致骑马者摔下马来。巴贝奇不喜欢音乐，尤其讨厌街头音乐，认为这大大降低了自己的工作效率。他在其自传中，仔细列举了各种制造噪声的器具以及主体。

巴贝奇写信给《泰晤士报》抱怨，并且成功让立法者立法禁止街头滋扰，即所谓的"巴贝奇（Babbage's act）"法案。这使得巴贝奇成了被嘲弄的对象。有的邻居故意雇人在他的窗外演奏音乐，每当巴贝奇外出，一大帮小孩子尾随他，诅咒他，而大人也远跟着。巴贝奇的窗户被打碎，房间则被丢入死猫以及其它恶心的东西。然而，历史证明巴贝奇是对的，他被视为研究噪声污染的先驱。

巴贝奇未能亲眼见到自己殚精竭虑的设计的实现，又遭讥笑，很受打击，成了一个孤独厌世的悲苦老人，将他人都看做是笨蛋和窃贼。巴贝奇因此而以"数学泰蒙（mathematical Timon）"闻名。泰蒙是莎士比亚的戏剧《雅典的泰蒙》（*Timon of Athens*）中的主人公，挥霍金钱，嫉恨人类。从泰蒙死后留给自己墓志铭中也能读出巴贝奇的伤心 [10]：

> 这里躺着的是可怜人的尸体一具，
> 莫问我的姓名；瘟疫毁灭你们这些坏东西！
> 我泰蒙睡在这里；生时人人厌恶：
> 走过去，尽你骂；但莫停留你的脚步。

孤独的巴贝奇将自己对差分机和分析机的想法写入其自传中。书中巴贝奇万般无奈地说："如果我有精力和途径来做更好的工作，我是不会来写自传的。"

虽然巴贝奇厌世，但对自己的设计充满信心，他曾说过，如果分析机得以建成，人们会看到它对未来科学进程将产生巨大影响。巴贝奇在给友人的信中曾说，我生活在一个没能力估计这个影响的国度。

但巴贝奇同时代的瑞典人乔治•舒兹（Georg Scheut）追随巴贝奇的思想制造过计算用机器，深知巴贝奇的伟大，他说："他（巴贝奇）的真实价值终将被人们认识到，即他是人类的恩人，最高贵、最具天赋的英格兰之子之一。"

1990 年，美国科幻小说家威廉•吉布森（William Gibson）和布鲁斯•斯特林（Bruce Sterling）在他们开"蒸汽朋克"小说流派之先河的著名科幻小说《差分机》[11] 中假想巴贝奇成功地制造出了用蒸汽机作为动力的差分机之后，历史发生的改变 [12]：拜伦没有死在希腊，而是成了工业激进党的领袖，高居首相之位；济慈不是写诗的，改行当了"影像程式设计师"；工业激进党把持了英国政坛，在他们的操

[10] 英文原文为："Here lies a wretched corpse of wretched soul bereft: Seek not my name: a plague consume you wicked caitiffs left! Here lie I, Timon, who alive, all living men did hate, Pass by, and curse thy fill, but pass and stay not here thy gait."译文来自梁实秋译《雅典的泰蒙》，莎士比亚全集 29，中国广播电视出版社，远东图书公司，2002 年。

[11] *The Difference Engine*，有中译：《差分机》，雒城译，新星出版社，2013 年。

[12] 引自萧星寒为雒城译《差分机》写的序言《科技对历史的反叛》。

控下，美国没有统一，分作四个国家相互鏖战；蒸汽设备入侵到人们生活的每一个角落，污染与反科技的卢德运动也因此来得比真实的历史更为猛烈……。

1861 年，巴贝奇说："我从未过过快乐的一天。若能换取 500 年后的三天，我可以痛快地放弃余生！"其实，不用等待 500 年，不到一个半世纪，我们就见证了计算机给人类生产和生活带来的巨大变革；不到一个世纪，我们就见到了与巴贝奇相似的思想出现了。

1985 年，伦敦科学博物馆根据该馆所存巴贝奇的设计资料着手制造差分机二号。1991 年，巴贝奇诞辰 200 周年之际，差分机的计算部分被制造出来了。在得知此消息后，微软前首席技术官（CTO）内森•麦沃尔德（Nathan Myhrvold）出资支持伦敦科学博物馆制造印刷部分。这样，2002 年第一台完整的差分机二号得以建成。该制造只利用维多利亚时代的材料与技术水平，一方面证明了巴贝奇设计的成功，也平息了多年来关于巴贝奇时代是否有足够的能力真正制造差分机这一争论。

2008 年，在伦敦博物馆的差分机二号被复制。这属于麦沃尔德所有，现在美国加州山景市的"计算机博物馆[13]"展出。

更进一步，一个被称为 Plan 28[14] 的建造计划，正募集资金，希望到巴贝奇逝世 150 周年，也就是 2021 年时，能将分析机实物制造出来。

参考资料：

1. C. Babbage, *Passages from the life of a philosopher* (London, 1864)。
2. A. Hyman, *Charles Babbage : pioneer of the computer* (Oxford, 1982)。
3. http://walden-family.com/pioneers/pdfs/B/Babbage.pdf。

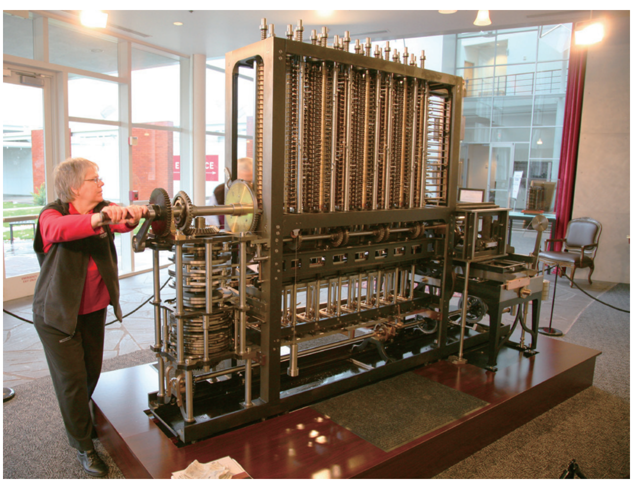


图 158 美国计算机博物馆正在运行的差分机二号

31 附录二：金庸小说中的幻方

介绍纪念拉马努金的涂鸦时，我们谈到了幻方。很多读者应该对幻方并不陌生，既是因为中华传统文化中的著名的洛书与幻方有密切的联系，也是因为金庸武侠小说名著《射雕英雄传》中对幻方有过精彩的描述。笔者最早知道幻方就是通过阅读这部小说。

《射雕英雄传》第二十九回"黑沼隐女"中集中了不少数学（术数）内容，其中金庸着笔最多的是幻方。我们下面主要以"黑沼隐女"一节中的幻方内容为线索来简要介绍幻方（也可看做前文介绍海亚姆时引用金庸小说中历史典故和诗歌的对照）。"黑沼隐女"中一些其它如数列求和、高次方程求解等问题，则与中国元朝数学家朱世杰的著作《四元玉鉴》有密切联系，我们另文叙述。

金庸小说中有关幻方的内容主要出自杨辉在 1275 年编辑的上、下两卷《续古摘奇算法》[15] 之卷上。这是世界上最早系统研究幻方的著作。欧洲最早的幻方出现于德国画家阿尔布莱希特•杜勒（Albrecht Dürer, 1471-1528）在 1514 年所作的铜版画《忧郁 I》（*Melencolia I*）中，其上有一个神秘的四阶幻方。如果将这个幻方的第二、

图 159 《杨辉算法》（为包括《续古摘奇算法》在内杨辉所著的几部数学著作的总称）的书影和《续古摘奇算法》的一页。

[13] 参 http://www.computerhistory.org/babbage/。

[14] 详情可参考其主页 http://plan28.org

[15] 可参考郭熙汉著《<杨辉算法>导读》，1996 年，湖北教育出版社。在线阅读可参考 http://book.xuexi365.com/ebook/detail_11105089.html。

图 160 杜勒名画《忧郁 I》中的四阶幻方(各行中的数字依次为:16, 3, 2, 13；5 ,10, 11, 8; 9, 6, 7, 12；4, 15, 14, 1）

第三列对调，并顺时针旋转 90 度，所得即为杨辉著作中的阴图（参图 166）。

杨辉，字谦光，南宋末年钱塘（今杭州）人。不少读者熟悉的“杨辉三角”就是杨辉在其著作《详解九章算法》中所记录的北宋数学家贾宪的发现。杨辉因“刘碧涧、丘虚谷携诸家算法奇题及旧刊遗忘之文，求成为集”而编辑《续古摘奇算法》。卷上除了论述纵横图(即幻方)，还介绍了剪管术求解著名的“物不知数”题(也出现在“黑沼隐女”一节中)；卷下收集了我们熟知的“鸡兔同笼”等问题。

图 161 1983 年版《射雕英雄传之华山论剑》第 5 集中剧照：黄蓉解答瑛姑的九宫难题

话说郭靖带身负重伤的黄蓉去寻“南帝”段皇爷医治。路遇“神算子”瑛姑。“情痴”瑛姑为入桃花岛拯救老顽童已研习术数十余载。但黄蓉受其父黄药师的影响，耳濡目染，记住了不少。因为黄蓉轻易解答了瑛姑提出的“数学难题”：如计算 55 225 的平方根，34 012 224 的立方根等，瑛姑便出了一道自己的“独创难题”:“将一至九这九个数字排成三列，不论纵横斜角，每三数相加都是十五，如何排法？”

九宫之法是桃花岛阵图的根基，难不倒黄蓉：

“九宫之义，法以灵龟，二四为肩，六八为足，左三右七，戴九履一，五居中央。”

二为肩 4	戴九 9	四为肩 2
左三 3	5 五居中央	7 右七
8 八为足	1 履一	6 六为足

图 162 洛书九宫图（三阶幻方）

黄蓉所述即中国文化史上著名的洛书九宫图。《尚书•洪范》中记载：“天乃锡禹洪范九畴”。汉孔安国注曰：“天与禹洛出书。神龟负文而出，列于背，有数至于九，禹遂因而第之，以成九类，常道所以次序。”也就是说，相传大禹时，有神龟浮于洛水，背驮“洛书”(即洛龟背上的裂纹)，大禹据此得到九种治理天下的方法（九畴），划天下为九州。

与洛书常常并提的是河图。《尚书•顾命》孔安国传：“伏羲王天下，龙马出河，遂则其以画八卦，谓之河图。”这里指的是，传说上古伏羲氏时，黄河中浮出龙马，背负“河图”(即龙马背上有规则的图案)，伏羲依此而演成八卦并发展而为《周易》。

河图洛书分别对应九畴与八卦，所以《易•系辞上》有“河出图，洛出书，圣人则之”之说。两者结合，也有所谓的“九宫八卦图”。河图洛书在数学上也有很大影响，明代程大位（1533-1606）所著《算法统宗》中开篇

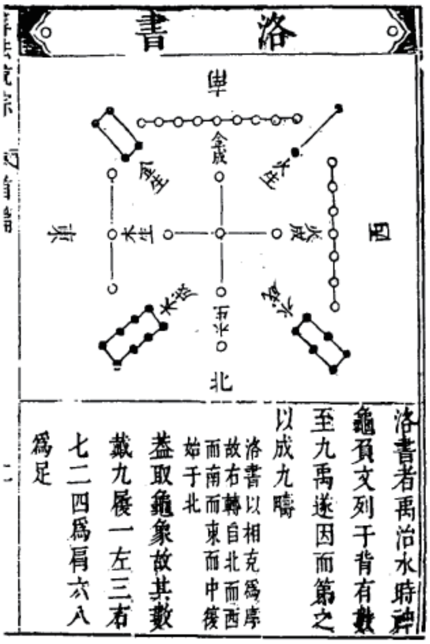


图 163《算法统宗》中的洛书

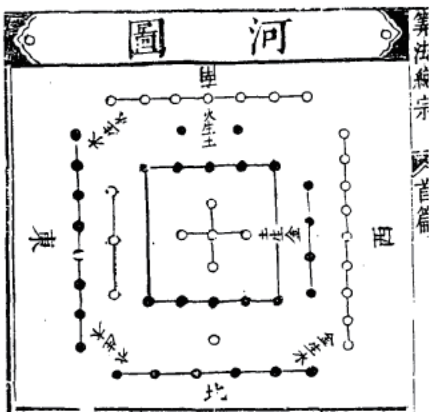


图 164《算法统宗》中的河图

一	二十	二一	四十	四一	六十	六一	八十	八一	一百
九九	八二	七九	六二	五九	四二	三九	二二	十九	二
三	十八	二三	三八	四三	五八	六三	七八	八三	九八
九七	八四	七七	六四	五七	四四	三七	二四	十七	四
五	十六	二五	三六	四五	五六	六五	七六	八五	九六
九五	八六	七五	六六	五五	四六	三五	二六	十五	六
十四	七	三四	二七	五四	四七	七四	六七	九四	八七
八八	九三	六八	七三	四八	五三	二八	三三	八	十三
十二	九	三二	二九	五二	四九	七二	六九	九二	八九
九一	九十	七一	七十	五一	五十	三一	三十	十一	十

图 165 杨辉著《续古摘奇算法》中百子图

即是河图与洛书。

黄蓉口中的“九宫之义，法以灵龟”即指九宫图和洛书的关系。她所叙述的九宫图口诀在北周（第六世纪）数学家甄鸾注东汉徐岳撰《数术记遗》“九宫算五行参数有如循环”一段时有此记载。更早，大约成书于东汉中期（公元前一世纪）的《大戴礼记》中的《明堂第六十七篇》中就记载有：“明堂者，古有之也。凡九室二九四，七五三，六一八。”

黄蓉甚至进一步教瑛姑，还有更高阶的幻方：“不但九宫，即使四四图，五五图，以至百子图，亦不足为奇。”这里提及四四图、五五图和百子图等分别指四阶幻方、五阶幻方和十阶幻方。实际上，杨辉在《续古摘奇算法》中给出了从三阶到十阶幻方的例子。不过《续古摘奇算法》中的百子图横和、列和均为 505，但顺、反对角线之和分别为 470、521，因此不是严格的幻方。清张潮有《更定百子图》，使得横和、列和与对角线之和都为 505。

黄蓉还举例说明如何构造幻方：

> “就说四四图罢，以十六子依次作四行排列，先以四角对换，一换十六，四换十三，后以内四角对换，六换十一，七换十。这般横直上下斜角相加，皆是三十四。”

13	9	5	1
14	10	6	2
15	11	7	3
16	12	8	4

4	9	5	16
14	10	6	2
15	11	7	3
1	12	8	13

4	9	5	16
14	7	11	2
15	6	10	3
1	12	8	13

图 166 金庸小说中所提四阶幻方构造说明（从左到右三图操作分别为 1. 将 1 到 16 共 16 个数字从大到小依次作四行排列；2. 外四角对换，即 1 和 16 对换，4 和 13 对换；3. 内四角对换，即 6 和 11 对换，7 和 10 对换。）

这个幻方构造方法出自杨辉的《续古摘奇算法》，原书称依此所得之四四图为阴图。与之相对应的是我们称之为阳图的另一个四阶幻方。

杨辉书中的连环图也被金庸引入小说中。黄蓉在介绍完四四图的构造，接着道：“那九宫每宫又可化为一个八卦，

2	16	13	3
11	5	8	10
7	9	12	6
14	4	1	15

图 167《续古摘奇算法》中的花十六图（阳图）

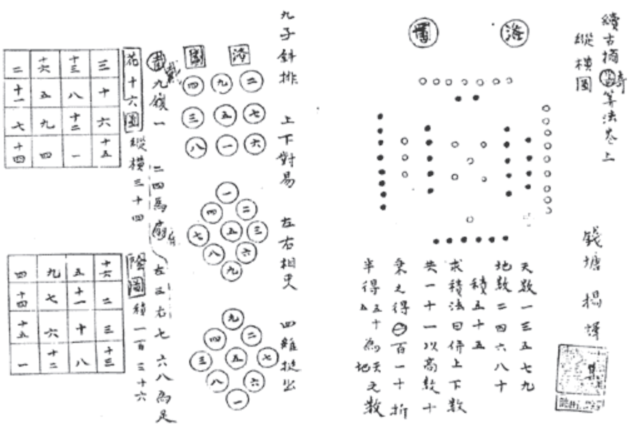


图 168《续古摘奇算法》中有关纵横图的页面

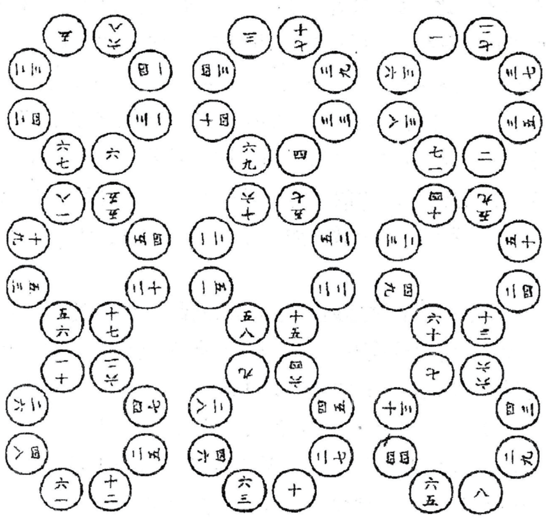


图 168 杨辉著《续古摘奇算法》连环图

八九七十二数，以从一至七十二之数，环绕九宫成圈，每圈八字，交界之处又有四圈，一共一十三圈，每圈数字相加，均为二百九十二。这洛书之图变化神妙如此，谅你也不知晓。”

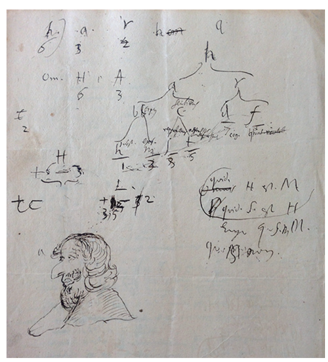
这个连环图确实甚是奇妙。难怪小说中，当黄蓉举手之间，将七十二数的九宫八卦图在沙上画了出来之后，“瑛姑瞧得目瞪口呆，颤巍巍的站起身来，问道：‘姑娘是谁？’”

32 后记

按上部分中的介绍，全文所叙涂鸦只涉及谷歌在2012 年底前发布的涂鸦。2013 年也有不少数学相关涂鸦出现，例如我们见到了纪念哥白尼、欧拉、塞尔维亚数学家米哈伊洛 • 佩特罗维奇 • 阿拉斯（Mihailo Petrović Alas, 1868-1943）以及前文中提到过的穆斯林数学家图西等的涂鸦，这里就不叙述了。

本系列原计只写一篇，后来发现两篇都不够，不得不变为上、中、下三部分。期待读者也如我一样，不但领略了多姿多彩的谷歌涂鸦，也了解到了一些意料之外的故事。

说了那么多谷歌设计的涂鸦，我们就以莱布尼兹与高斯这两位德国最著名的数学家分别在他们笔记本上留下的涂鸦来结束本文吧。



(a) 莱布尼兹画的涂鸦

(b) 高斯画的涂鸦

图 169 数学家笔记中的涂鸦

德国比勒费尔德和知屋

2013 年 8 月 6 日