柳形上

想到来说说 7，或多或少缘于对数字 7 的喜爱。犹记得在数学与人文的课上，问课上的同学“你最喜爱哪个数字”这样略带游戏色彩的问题，有点惊奇的是，喜爱数字 7 的同学不在少数。但若问他们为何喜爱 7，却往往说不出所以然。喜爱就是喜爱，或许这也是一种理由。这一小品文的目的或在于演绎如下的心境：喜爱 7 可以有许多理由……且让我们漫步 7 的七彩世界。

1 人文篇

一个星期有 7 天，这是源自圣经传说，还是古时代的人们对数字 7 的偏爱？

在《圣经 • 创世纪》有这样的故事记载：在天地尚未形成之前，黑暗笼罩虚空；于是上帝用了六天创造了天地万物，而以第七天作为神圣的安息日。

相关的史料表明，“一星期 7 天制”最早起源于古巴比伦，其后被传到古希腊、古罗马等地。而在古代学者的眼里，宇宙间有 7 大行星——金星、木星、水星、火星、土星、太阳、月亮。于是一星期 7 天和其上这 7 大行星间的关联多少让我们有几许心灵的触动。

Sunday	Dies Solis, 太阳（Sun）日
Monday	Dies Lunæ, 月亮（Moon）日
Tuesday	Dies Martis, 战神（Mars, 火星）日
Wednesday	Dies Mercurli, 使神（Mercury, 水星）日
Thursday	Dies Lovis, 主神（Jupiter, 木星）日
Friday	Dies Veneris, 爱神（Venus, 金星）日
Saturday	Dies Saturni, 农神（Saturn, 土星）日

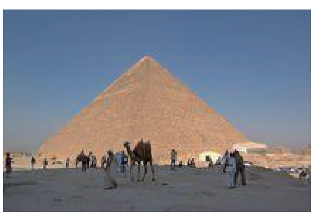
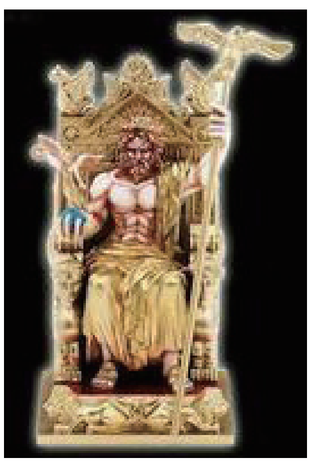
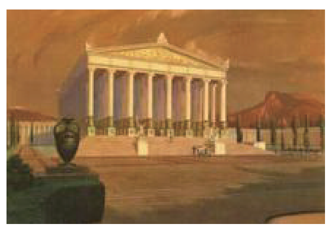
你是否有追逐过雨后彩虹的七色霞光？ 那里收藏有我们童真时代的梦幻时光。

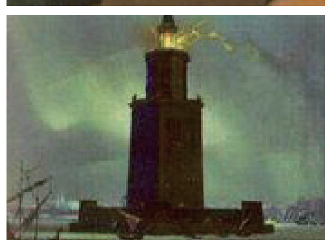
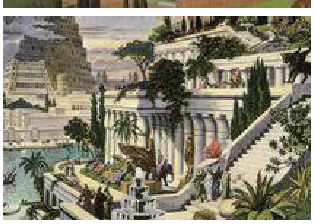

在许多文化中，“ 七 ” 都是一个充满神秘色彩的数字。在西方文化中它或代表着智慧与完美，这样的理念影响深远。在中国文化中有七仙女的神话传说，抑或牛郎织女的七夕之鹊桥相会。在宗教文化里则有七大主教，神的七大礼物，七重天，七大守护神，七美德和七宗罪之说 ……

嗨，在你的记忆空间里，还有多少故事与 7 相约？

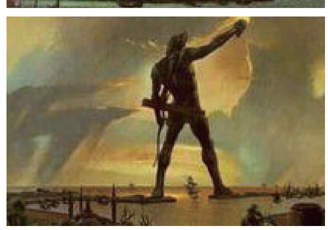
遥想在二千多年前，希腊作家安提佩特（Antipater）笔下的七大奇迹：

1. 埃及胡夫金字塔 2. 奥林匹亚宙斯巨像 3. 阿尔忒弥斯神殿 4. 摩索拉斯基陵墓
5. 亚历山大灯塔 6. 巴比伦空中花园 7. 罗德岛太阳神巨像

1	2	3
4		5
6		7



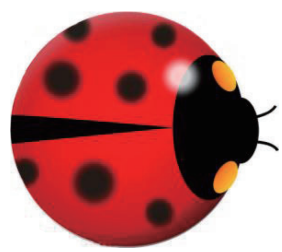
由于上述古代世界的奇迹大多已经毁灭，后人又提出了中古时代的世界七大奇迹：罗马斗兽场，亚历山大的地下陵墓，中国的万里长城，英国的巨石阵，中国报恩寺的琉璃宝塔，意大利的比萨斜塔，土耳其的索菲亚大教堂。在 2001 年，由法国人贝尔纳 • 韦伯创办的“新七大奇迹”基金会发起新七大奇迹的网上评选……下面的画片折射着七的魅力：

（i）在酸碱度测试中，7 代表着中性 —— 这是纯水的 PH 值。
（ii）一些科学研究如是说，7 小时是人类每天最理想的睡眠时间。
（iii）人类的短时记忆容量以复述出 7 位数为正常水平。
（iv）“眼球经济”时代中的“7 秒定律”：消费者往往会在 7 秒内决定其购买意愿。
（v）“7 年之痒”——这或是婚姻要经历危险的那一时段。
（vi）西方有俗话说，如果你打碎镜子将会有 7 年不走运。

这里还有一则人类的悲剧与 7 相关：美国失事的两架航天飞机，“挑战者”号（1986 年）和“哥伦比亚”号（2003 年），都是有 7 名宇航员丧生。

话说在 2007 年到来之际，英国《独立报》曾列举了 77 个与人类有关的数字“7”。





上面的这些七星瓢虫被认为是幸运的象征。其背上有七个点；还有点巧合是它们的寿命比较长，平均有 77 天；这是一种益虫。

在文学的世界里，当有许多的画片连接着七的印象。画说童话中的白雪公主也是得到 7 个小矮人的帮助。《白雪公主》（缘自德国著名童话集《格林童话》）是许多人童年最喜欢听的故事之一。话说一个可爱美丽的公主因为后母嫉妒其美貌而被迫逃到森林，偶遇善良的七个小矮人。最后在他们帮助下，克服了后母的诅咒，找到真爱的王子的故事。

相约 7 的动画片当还有很多很多……

白雪公主与七个小矮人

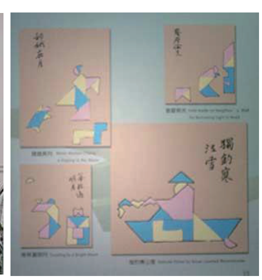
2 七巧板的楼阁

下面的这二组图画中，第一组是由七巧板拼成的各种形态的图；而第二组的画面则是经由七巧板组装的书架。这些图案都折射着七巧板世界非凡的魅力。

多姿多彩的七巧板拼图

经由七巧板组合而成的书架

还记得么？ 在我们的孩提时代，有许多次与七巧板游戏相遇。画片中的“七巧板”由一个正方形分割而得，中有五种不同的形状，共有七块；奇妙的是，这七块看似简单的图案却可以拼排成千变万化的几何图形，形似各种自然万物，“纵横离合，变化无穷”。



七巧板起源于我国宋代，最早被称作“燕几图”，而后演变成明朝的蝶翅儿，最后形成清初到现代的七巧板。在国外被称为“Tangram”意即“中国的图形”……19 世纪初，七巧板流传到西方，引起人们的广泛兴趣，并迅速传播开来，被誉为“东方魔板”。

其虽然只有 7 块，却可以变幻出千变万化的形象图案。

3 种“seven”的七巧板呈现

七巧板与汉字例证

这里还有一幅由 11 副七巧板拼出的“数学”星空——

3 数学篇

在数学的天空，闪烁有众多 7 的星点。

最早的谜题——

> **问题一**
>
> 这里一共有 7 间房子，每个房间有 7 只猫，每只猫可以抓 7 只老鼠，每只老鼠会吃掉 7 穗麦子，每穗小麦能够磨 7 份面粉。问：这些猫总共可以减少多少份面粉的损失？

这个古老的迷题可以追溯到公元前 1850 年，来自由古埃及书记官阿美斯抄写的《莱因德纸草书》。

经由简单的等比数列的知识，我们可知这 7 个房间中的这些猫可以减少 7^5 份面粉。

上面的阿美斯谜题在后来的岁月中影响深远。距离其几千年之后，有一个名曰“圣伊夫之谜”的问题出现在斐波那契的《算盘书》上，这部经典的书出版在 1202 年。与“圣伊

夫之谜”相约的诗呈如下：

> **问题二**
>
> 我赴圣地伊夫斯，路遇一男携七妻；一妻各把七袋负，一袋各装七猫咪。猫咪生仔数又七，几多同去伊夫斯？

这个有趣的问题说的是，某天我在去圣地伊夫斯的路上，遇上一个带着 7 个妻子的男子，他的每个妻子都肩负着 7 个袋子，每个袋子里装着 7 个猫咪，而每个猫咪又生有 7 个小猫，问同去伊夫斯的人物共有多少？ 这个谜题的谜底或是 $1+1+7+7^2+7^3+7^4$。

下面的这个问题也可视为阿美斯谜题的一个变形。

> **问题三**
>
> 话说 7 个老翁去罗马，每人有 7 匹骡子，每匹骡子负 7 个袋子，每只袋子装有 7 块面包，每块面包配有 7 把刀，每把刀配有 7 个鞘。求总数是多少？

在这里还有一个趣之间与 7 相约——我国古代的”浮萍七子“趣题：浮萍夜产 7 子（连同母萍），则一叶浮萍，逐日可得浮萍数，会是一个等比数列：

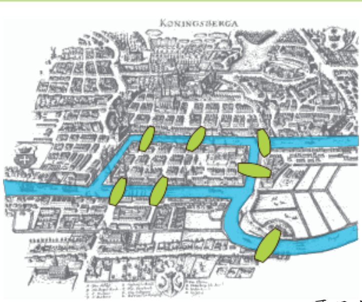
$$1, 7, 7^2, 7^3, \cdots$$

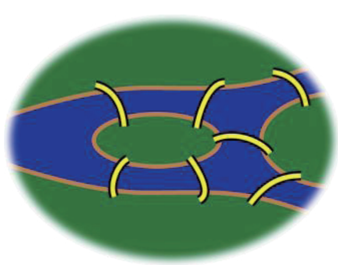
在相隔数世纪的阿美斯纸草书，斐波那契的《算盘书》，还是童谣集《鹅妈妈》中的谜题，都显示着抽象的 7 的力量之谜。

欧拉（Leonhard Euler）的七桥画片

在数学的历史之旅中，欧拉的“七桥问题”占有很独特的地位。这个有趣的问题源自生活的实际，经由数学与故事的相遇，奏响了拓扑学的先声，这个有趣的问题如是说，

> 七桥问题：话说 18 世纪，东普鲁士的首府哥尼斯堡是一座景色迷人的城市，普莱格尔河横贯其境，使这座城市锦上添花，显得更加风光旖旎。在河的中央有一座美丽的小岛。普莱格尔河的两条支流，环绕其间汇成大河，把整个城区分为如下图的几块。著名的哥尼斯堡大学，依偎在一河边——使得这一秀色宜人的城市，又增添了几多古雅与庄重的韵味！这里——河上有七座各具特色的桥把岛和河岸连接起来。这一别致的桥群，古往今来吸引了众多的人们来此漫步！
>
> 可不可能既不重复又不遗漏地走遍这七座桥？——这就是闻名遐迩的“哥尼斯堡七桥问题。”



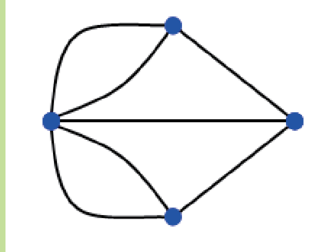


哥尼斯堡的城市画片

话说那里的人们在长时间的实践后，都得不到方法来解得上面的问题。于是最后去请教当时的大数学家欧拉，欧拉在思考后，回答说：“这是不可能的。”

图画中的数学：这其中的秘密在于，他将岛和两岸陆地看作点，而把桥视为线…… 这样，原来的七桥问题就抽象概括成了类左的关系图。

注意到在七桥问题所成之图形中，没有一点含有偶数条数（却有 4 个奇点），因此故事中的上述的任务是不可能实现的。



把岛、半岛和陆地的具体属性舍去，而仅仅留下与问题有关的东西，这就是四个几何上的“点”；他再把桥的具体属性排除，仅留下一条几何上的“线”，然后把“点”与“线”结合起来，这样就实现了从客观事物到图形的转变。这一种经由具体到抽象的思维方式，正是数学的精神所在。

回眸处，142857 是一个奇妙的数：

$$142857\times2=285714$$
$$142857\times3=428571$$
$$142857\times4=571428$$
$$142857\times5=714285$$
$$142857\times6=857142$$

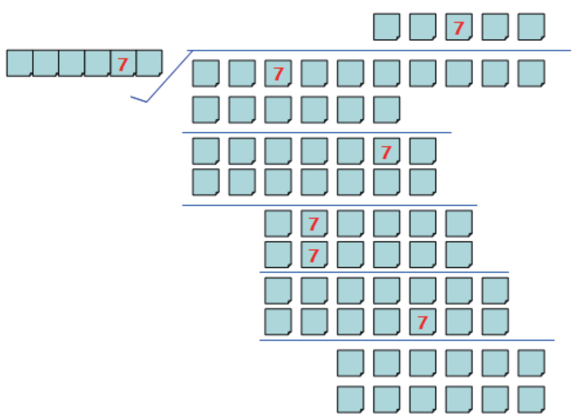
这个数的奇妙却以如下的方式与 7 相约：

$$\frac{1}{7}=0.142857142857142857\cdots$$

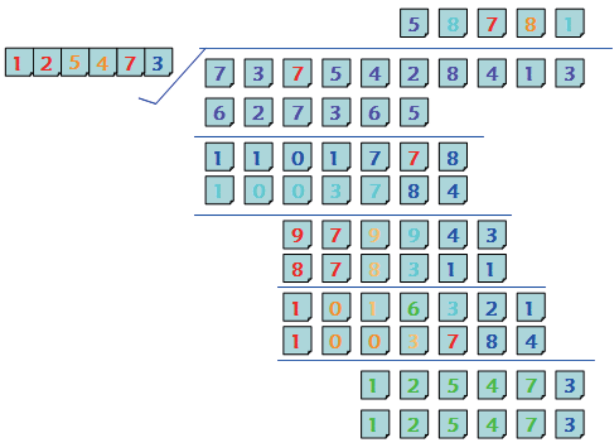
漫步于此，我们将邂逅一个有几许挑战性的问题。

下面的这个其名曰“ 7 枚 7”的问题源出英国数学家贝韦克（E. H. Berwick）之手……他于 1906 年在《学校世界》中发表了这个题目。在海因里希 • 德里（Heinrich Dörrie）的名著《100 个著名数学初等问题》一书中则有其比较详细的问与答。

问题：完形填空——在下面的这个算式中填入适当的数，使得被除数 / 除数 ＝ 商数。



若你在 1 个小时里依然无法收获这个问题完整的解，则不妨来阅读如下的画片：



这里是如上解的一些注释：

在上面的算式中，记除数为 $D:=\overline{d_1d_2d_3d_4 7d_6}$，商 $Q:=\overline{q_1q_2 7q_4q_5}$

（i）$\overline{d_1d_2}=12$：这缘自如下的几点——

$D\times 7=\overline{*7**}\Rightarrow \overline{d_1d_2}\le 13$. 于是可能是 10, 11, 12, 13。

经由 $\overline{11107d_6}\times 9=\overline{9997**}\Rightarrow \overline{d_1d_2}=12$。

（ii）$\overline{d_3d_4}=54$；$q_4=8$：

经由 $\overline{12d_3d_4 7d_6}\times 7=\overline{87*****}$，可知 $d_3=4$ 或者 $d_3=5$。

再注意到 $\overline{124d_4 7d_6}\times 9=\boxed{1116****}$ ……其第二位数不是 0，可知 $q_4=8$。 再由 $\overline{125000}\times 8=1000000$ 可知 $d_3=5$。

注意到 $\overline{125d_4 7d_6}\times 8=\overline{10**7**}$ 可知 d_4 有两则可能：

$d_4=4$ 或者 $d_4=9$；

如若 $d_4=9$ 则 $\overline{12597d_6}\times 7=\overline{8817**}\cdots$ 此与 $D\times 7=\boxed{*7****}$ 矛盾。

因而有 $d_4=4$。

（iii）$d_6=3$；$q_5=1$，$q_2=8$，$q_1=5$：在于如下的表格中的一些信息的综合。

125470 × 9 = 1129230	125470 × 8 = 1003760
125471 × 9 = 1129239	125471 × 8 = 1003768
125472 × 9 = 1129248	125472 × 8 = 1003776
125473 × 9 = 1129257	125473 × 8 = 1003784
125474 × 9 = 1129266	125474 × 8 = 1003792

125470 × 7 = 878290	125470 × 8 = 1003760
125471 × 7 = 878297	125471 × 8 = 1003768
125472 × 7 = 878304	125472 × 8 = 1003776
125473 × 7 = 878311	125473 × 8 = 1003784
125474 × 7 = 878318	125474 × 8 = 1003792

125472 × 7 = 878304	125472 × 8 = 1003776
125473 × 7 = 878311	125473 × 8 = 1003784

在我们系本科生杂志《蚁趣》的第六期中，曾有这样一个问题：如下的数列的极限是多少？

$$\sqrt{7},\sqrt{7-\sqrt{7}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7}}}},\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7-\sqrt{7+\sqrt{7}}}}},\cdots$$

这是一道数学分析题。许多的同学提到，看到这样的形式，很自然地会想到用单调有界定理来证明其收敛性。然而经过观察，发现单纯地使用这条定理是不可行的：因为这一数列不是单调的。这个问题有一些个挑战性。

若记上面的数列为 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$，则对 $k=1,2,3,\cdots$ 我们有

$$\text{(i)}.\quad x_{4k-3}\geq x_{4k-2}\geq x_{4k+1}\geq x_{4k+2},$$
$$\text{(ii)}.\quad x_{4k-1}\leq x_{4k}\leq x_{4k+3}\leq x_{4k+4}.$$

上面不等式证明可借助于 $x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}, n=1,2,3\ldots$ 和归纳法。

由数列的单调有界原理可知上面的两个子数列（i）和（ii）的极限都存在。我们设（i）中的数列的极限为 a，设（ii）中的数列的极限为 b（$a\geq 0; b\geq 0$）。

经由 $x_{n+2}=\sqrt{7-\sqrt{7+x_n}}, n=1,2,3\ldots$，两边取极限得：

$$a=\sqrt{7-\sqrt{7+b}} \quad 和 \quad b=\sqrt{7-\sqrt{7+a}}\ .$$

由此可得 $a=b$。于是数列有极限可设为 a。再由 $a=\sqrt{7-\sqrt{7+a}}$（同时注意到 $0<a<3$）解得 $a=2$.

综上所述，原数列的极限存在且为 2。

作者简介：柳彤上，现任教于华东师范大学数学系，从事几何与 PDE 方面的一些研究；缘于华师大的数学传统而对数学教育和数学普及的文化事业有所兴趣。

画外音：

这里有此题的另一种解法，其折射着不动点定理的力量。

令 $f(x):=\sqrt{7-\sqrt{7+x}}$，则易知 2 是函数 $f(x)$ 的一个不动点，因为我们注意到

$$f(2)=\sqrt{7-\sqrt{7+2}}=2.$$

于是我们有

$$|x_{n+2}-2|=|f(x_n)-f(2)|=|f'(\xi)(x_n-2)|\leq\frac{2012}{2013}\cdot|x_n-2|$$

此处用到了中值定理……进而不难证明原数列的极限存在且等于 2。

回眸处，二千多年前古希腊的学者普洛克洛斯如是说，“哪里有数，哪里就有美”。7 的画阁，隐藏有七彩缤纷的童真与传奇。期待，有一日我们可以经由此演绎出一幕 7 的话剧。