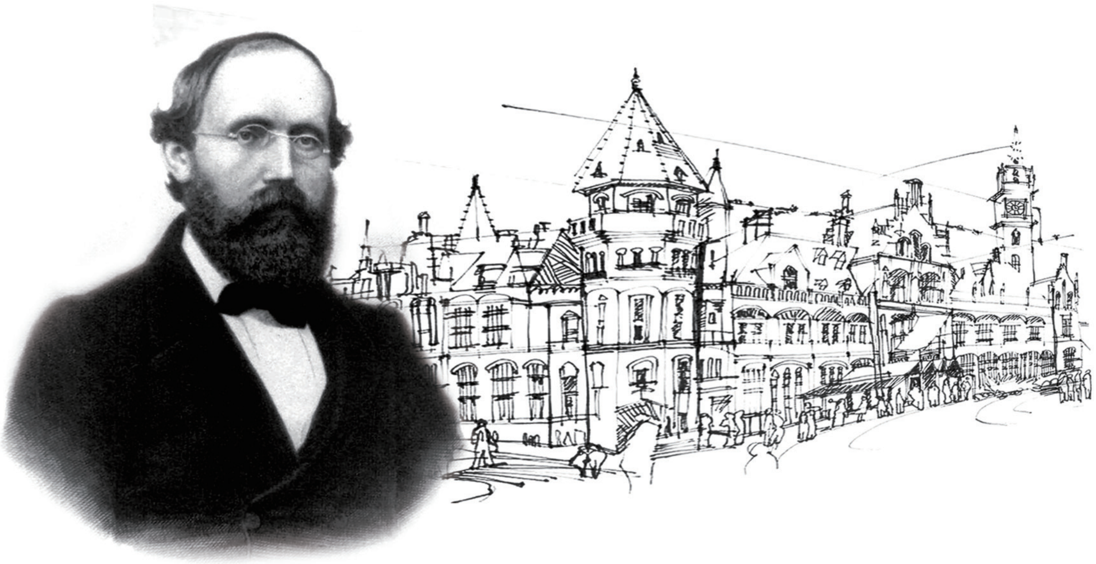


卢昌海《黎曼猜想漫谈》书评

扶 磊

勿容置疑，黎曼猜想是当今数学中最重要的未解决的问题。不同于数论中其它猜想（例如费马大定理、哥德巴赫猜想等），将黎曼猜想和黎曼的思想叙述清楚至少需要用到比较高等的复变函数论的知识，因此已有的关于黎曼猜想的科普读物，要么太肤浅而不能将问题说清楚，要么用了太多的艰深的数学工具而晦涩难懂。但卢昌海的《黎曼猜想漫谈》以轻松愉快的语言清晰地介绍了黎曼猜想、黎曼在数论方面的工作和后人在黎曼的影响下所做的后继工作。一个学过复变函数论的大学生应该能看懂这本书，从而能够欣赏黎曼工作的深度和创造性。

黎曼发表的文章不多，但几乎每篇文章都是划时代的甚至是超越时代的绝世佳作，这些文章开辟的新的数学领域包括：复变函数论、黎曼几何、代数几何、解析数论等等。黎曼在 1859 年发表了他唯一的一篇数论方面的论文《小于给定值的素数的个数》，用复变函数 $\zeta(s)$ 研究了素数的分布。黎曼 ζ- 函数是用无穷级数

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s} \qquad (1)$$

定义的，这个函数欧拉也研究过，并注意到

$$\zeta(s)=\prod_p \frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}, \qquad (2)$$

这里乘积是对所有素数 p 取的。欧拉只考虑当 s 是实数时 $\zeta(s)$ 的性质，而黎曼是历史上第一个将 $\zeta(s)$ 当作复变函数，并将素数的分布与 $\zeta(s)$ 的零点分布联系起来。上面 $\zeta(s)$ 的表达式的无穷级数和无穷乘积只是当复数 s 的实部 $\mathrm{Re}(s)>1$ 时才收敛。黎曼证明了由这个无穷级数 (1) 和无穷乘积 (2) 定义的函数可以解析延拓得到定义在整个复平面上的亚纯函数。这个亚纯函数就是黎曼 ζ- 函数。黎曼证明了 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 处有个单极点，在复平面其它地方解析，并满足函数方程

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s).$$

当 s 是负的偶数时，我们有 $\sin(\pi s/2)=0$，从函数方程可以推出 $\zeta(s)=0$，这些零点称为 $\zeta(s)$ 的平凡零点。$\zeta(s)$ 的其它零点称为非平凡零点。黎曼考虑辅助函数

$$\xi(s)=\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s).$$

函数 $\xi(s)$ 在复平面上处处解析，即是个整函数，满足函数方程

$$\xi(s)=\xi(1-s),$$

最重要的：$\xi(s)$ 的零点正好是 $\zeta(s)$ 的非平凡零点。黎曼指出

$$\xi(s)=\xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right), \tag{3}$$

这里乘积是对 $\xi(s)$ 的所有零点 ρ 取的。如果 $\xi(s)$ 是个多项式，这个乘积公式是明显的，但事实上 $\xi(s)$ 是个有无穷多个零点的整函数。黎曼给出了这个公式成立的一些理由，严格的证明是 1893 年阿达玛（Jacques Hadamard）给出的。比较两个乘积公式 (2) 和 (3) 并巧妙运用傅里叶分析中的反演公式，黎曼将素数 p 的分布和 $\zeta(s)$ 非平凡零点 ρ 的分布联系起来。更确切地，对任何 $x>1$，黎曼得到等式

$$\begin{aligned}J(x)=\mathrm{Li}(x)-&\sum_{\mathrm{Im}(\rho)>0}(\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho}))\\&-\log 2+\int_x^{\infty}\frac{dt}{t(t^2-1)\log t},\end{aligned} \tag{4}$$

这里 $\mathrm{Li}(x)=\int_0^x\frac{dt}{\log t}$，函数 $\mathrm{J}(x)$ 在 $x=0$ 处取值 0，每过一个素数 p 处跳跃 1，每过一个素数平方 p^2 处跳跃 1/2，每过一个素数立方 p^3 处跳跃 1/3，……。记不超过 x 的素数的个数为 $\pi(x)$，则有

$$J(x)=\pi(x)+\frac{1}{2}\pi(x^{\frac{1}{2}})+\frac{1}{3}\pi(x^{\frac{1}{3}})+\cdots+\frac{1}{n}\pi(x^{\frac{1}{n}})+\cdots.$$

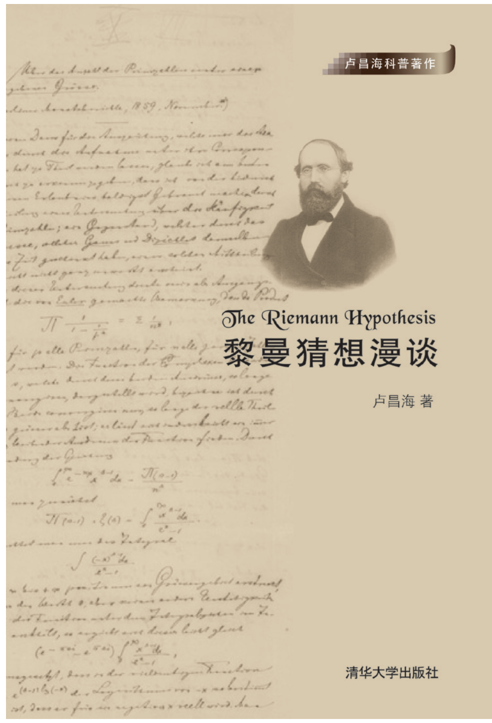
可以证明

$$\pi(x)=J(x)-\frac{1}{2}J(x^{\frac{1}{2}})-\frac{1}{3}J(x^{\frac{1}{3}})+\cdots+\frac{\mu(n)}{n}J(x^{\frac{1}{n}})+\cdots, \tag{5}$$

这里的 $\mu(n)$ 是 Möbius 函数

$$\mu(n)=\begin{cases}0 & \text{如果 } n \text{ 被素数平方整除，}\\ 1 & \text{如果 } n \text{ 是偶数个不同素数乘积，}\\ -1 & \text{如果 } n \text{ 是奇数个不同素数乘积 .}\end{cases}$$

这些公式是黎曼文章的主要结果，严格证明是 1895 年冯•曼戈尔特（Hans von Mangoldt）给出。从上面的公式 (4) 和 (5)，我们可以用 $\zeta(s)$ 的非平凡零点 ρ 去表达 $\pi(x)$:



$$\begin{aligned}&\pi(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}})\\&=-\sum_{n=1}^{N}\sum_{\rho}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{\rho}{n}})+\text{（更小的项）}.\end{aligned} \tag{6}$$

但如果对 $\zeta(s)$ 的非平凡零点的分布没有足够多的信息，还是不能证明

$$\pi(x)\sim\sum_{n=1}^{N}\frac{\mu(n)}{n}\mathrm{Li}(x^{\frac{1}{n}}).$$

特别地，上面的公式 (6) 还不足以说明素数定理成立：

$$\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x).$$

1896 年阿达玛和查尔斯•瓦利•普桑（Charles de La Vallée Poussin）得到了证明素数定理所需要的 $\zeta(s)$ 的非平凡零点分布的信息，他们证明了 $\zeta(s)$ 在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上没有任何零点，并在此基础上结合冯•曼戈尔特的公式证明了素数定理。黎曼的著名猜想说 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点都落在复平面的直线 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 上。如果这个猜想成立，则有

$$\pi(x)-\mathrm{Li}(x)=O(x^{\frac{1}{2}}\log x).$$

在黎曼之后的很长一段时间里，人们怀疑黎曼猜想

只是黎曼的一个凭空猜测，没有任何计算或理论方面的依据。但在1932年，卡尔•路德维希•西格尔（Carl Ludwig Siegel）仔细研究了黎曼未发表的手稿，发现了黎曼计算过 $\zeta(s)$ 的很多非平凡零点，可以说黎曼猜想是黎曼经过大量的数值计算和理论推导后提出的，黎曼所发表只是他研究 $\zeta(s)$ 的一小部分结果。黎曼计算 $\zeta(s)$ 的零点时运用了 1932 年之前大家都不知道的公式，为了纪念西格尔在整理黎曼手稿方面的贡献，这个公式现在称为黎曼 - 西格尔（Riemann-Siegel）公式，这个公式计算 $\zeta(s)$ 零点的能力远远超过当时数学界所使用的方法。目前人们用计算机计算了八千多亿个 $\zeta(s)$ 的非平凡零点，它们全都在直线 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上。

在理论研究方面，1914 年玻尔 - 兰道（Bohr-Laudan）证明了对任何 $\delta > 0$, $\zeta(s)$ 在区域 $\{\mathrm{Re}(s) \geq 1/2 + \delta, 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T\}$ 中的 $\zeta(s)$ 零点个数是 $O(T)$。可以证明在区域 $\{0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1, 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T\}$ 中 $\zeta(s)$ 的零点约为

$$\frac{T}{2\pi}\log\frac{T}{2\pi}-\frac{T}{2\pi}$$

（这是黎曼文章中的一个结论，严格证明是 1905 年冯•曼戈尔特给出的）。所以玻尔 - 兰道定理说明 $\zeta(s)$ 在区域 $\mathrm{Re}(s) \geq 1/2 + \delta$ 中的零点在所有非平凡零点中所占比例为无穷小。也是在 1914 年哈代（G. H. Hardy）证明了 $\zeta(s)$ 有无穷多个零点落在直线 $\mathrm{Re}(s) = 1/2$ 上。1921 年哈代 - 李特尔伍德（Littlewood）证明存在常数 K，使得对任何充分大的 T，$\zeta(s)$ 在线段 $\{\mathrm{Re}(s) = 1/2, 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T\}$ 上零点个数 $\geq KT$。1942 年阿特勒•塞尔贝格（Atle Selberg）将这个这个结果改进为 $\zeta(s)$ 在 $\{\mathrm{Re}(s) = 1/2, 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T\}$ 上零点个数大于或等于 $KT \log T$。记线段 $\{\mathrm{Re}(s) = 1/2, 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T\}$ 上 $\zeta(s)$ 零点个数为 $N_0(T)$，记区域 $\{0 \leq \mathrm{Re}(s) \leq 1, 0 \leq \mathrm{Im}(s) \leq T\}$ 中的 $\zeta(s)$ 零点个数为 $N(T)$，1974 年诺曼•莱文森（Norman Levinson）证明了 $N_0(T) \geq 1/3\mathrm{N}_0(T)$。后来人们对莱文森的方法作了改进，目前这方面的最好结果是 1989 年布莱恩•卡恩瑞（Brian Conrey）得到的

$$N_0(T) \geq 2/5N(T).$$

卢昌海对上面这些结果都作了深入浅出的介绍。很难得的是卢昌海对很多结果给出了富有启发性的数学推理，这些启发性的推理虽然不是严格的数学证明，但可以让读者相信推理和结论的合理性，从而去接受书中的数学结果。这些结果的严格证明和精确的数学描述往往很技术化，很容易让读者迷失方向。卢昌海还介绍了如何用黎曼 - 西格尔公式计算 $\zeta(s)$ 的一个零点，让读者亲身体会黎曼当年是如何对 $\zeta(s)$ 进行计算的。整本书给人的感觉一直是轻松愉快、引人入胜，本来我是打算利用闲暇时间翻翻这本书，事实是我拿到这本书后，放下了当天所有其它工作，一口气把这本书看完，看完后还把一些精彩片段复习了一遍。这部科普读物的数学描述部分是准确的，我自己的研究方向是平展上同调论，这是当年格罗登迪克（Alexandre Grothendieck）和德利涅（Pierre Deligne）为了证明韦伊猜想（Weil conjectures）而发展起来的，韦伊猜想在卢昌海的书中被称为“山寨版”黎曼猜想，应该说这是个很专门的话题，**但我发现卢昌海对韦伊猜想方面的介绍是很准确、专业的，让我难以置信的是卢昌海是个物理学博士。**

我发现的书中的一个漏洞是第 34 节最后一段话“有关自守 L- 函数的许多简单很多的性质，比如它的解析延拓及函数方程，也都还是未被普遍证明的东西”。事实上自守 L- 函数的解析延拓及函数方程已经证明了。算术代数几何中所谓的 motivic L- 函数的这些性质还没有证明。事实上罗伯特•朗兰兹（Robert Langlands）引进自守 L- 函数的目的之一就是为了研究 motivic L- 函数，如果能够建立朗兰兹对应，即证明 motivic L- 函数都是自守 L- 函数，则可以得到 motivic L- 函数的解析延拓及函数方程。例如怀尔斯（Andrew Wiles）证明费马大定理时证明了椭圆曲线的 L- 函数 (这是一类 motivic L- 函数) 是某个模形式的 L- 函数，这样就可以得到椭圆曲线的 L- 函数的解析延拓及函数方程。著名的阿廷猜想说数域的有限伽罗瓦扩张的非平凡不可约伽罗瓦群表示的 L- 函数 (这也是一类 motivic L- 函数) 是解析函数，如果能对这些 L- 函数建立朗兰兹对应，则可以证明阿廷猜想，目前阿廷猜想已解决的情形都是这样证明的。

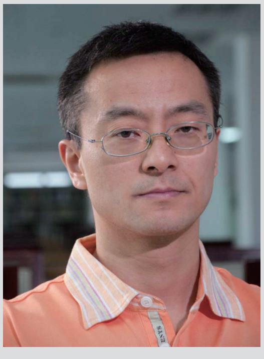
但上面的漏洞相对书中精彩片段实在是微不足道的。我会将该书推荐给每一位想对黎曼猜想有所了解的人。我建议读者在读完卢昌海的书后，看看爱德华兹（H. M. Edwards）的 *Riemann's Zeta Function*。这本书按照历史发展的顺序详细、严格地介绍了黎曼 ζ-函数的性质及其在素数分布的研究中的应用，同时也不乏富有启发性的推理，特别地，卢昌海书中大部分结果的严格数学证明都可以在这本书中找到。

在作者写这个书评前，作者、南开大学张伟平院士和主编有些邮件来往，附在本文后作为注记。

张伟平（2012年10月10日）： 汤涛，也许你想看看一位数论学者对你们期刊上卢昌海的连载文章的读后感。（Dear Tang Tao, I presume you'd like to see a remark from a number theorist on the articles of Lu Changhai published in your journal.）

扶磊（2012年10月9日）： 我读完了《黎曼猜想漫谈》一书。我所付出的代价是读此书期间中午睡不着觉，需要服用安眠药。明天我要把书中最精彩的部分再重读一遍，之后再把书还回图书馆。（I finish reading the book on Riemann hypothesis. One price I paid was that I couldn't fall asleep at noon and had to use sleeping pills. Tomorrow I will re-read the most wonderful part, and then give it to the library.）我在书中发现一个小错误……不过这个小错误完全可以忽略不计。我从书中学到了很多重要事实；这些知识是我很想知道但又找不到足够时间去啃书本得到的。（I spot one error……But this error is absolutely neglectable. I learned many important fact that I wanted to know but couldn't find time to go through those advanced books.）

扶磊（2012年10月8日）： 伟平，你昨天送给图书馆的"黎曼猜想"那本书写得真好，很奇怪的是作者卢昌海是个物理博士，但整本书写得很专业，书中有部分写的是我最熟悉的*Weil*猜想，这是个很专业的内容，但他写得没有任何漏洞，一本科普书能写得这么专业，或一本专业书能写得这么平易近人，真不容易，这本书我可能会推迟很长时间给图书馆，希望你别介意。作者还写了"寻找太阳系的疆界"，"太阳的故事"，这些物理方面的科普他应该写得更好了，你不妨在书店留意他写的其他的书。如果他写本量子物理就更好了。



作者简介：扶磊，1970年生，武汉大学数学系毕业，美国 Rice 大学数学博士。南开大学陈省身数学研究所所长，长江学者特聘教授。