谷歌数学涂鸦赏析（中）[1]

欧阳顺湘

16 费马诞辰 410 周年

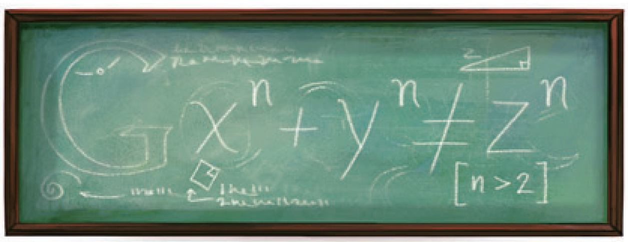


图 66 费马诞辰 410 周年纪念（2011 年 8 月 17 日，全球）

法国数学家皮埃尔 • 德 • 费马（Pierre de Fermat, 1601 年 8 月 17 日-1665 年 1 月 12 日）主职为律师，业余从事数学研究，被称为“业余数学家之王”。他在微积分的早期发展过程中起过重要的作用——研究过求切线和极大极小问题，是概率论和解析几何的开创者之一，还被誉为“近代数论之父”。

纪念费马诞辰 410 周年的谷歌涂鸦很有特色，为很多媒体和读者所留意。涂鸦以黑框灰绿色底的黑板为背景，上书费马大定理的内容：

$$x^n + y^n \neq z^n \ (n > 2).$$

即方程 $x^n + y^n = z^n$ 在 $n > 2$ 时无正整数解。

涂鸦右上角画了一个直角三角形。按勾股定理（即毕达哥拉斯定理），直角三角形两直角边的平方和等于斜边的平方。这提示我们，费马所考虑方程是当 $n = 2$ 时的方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的推广。与费马大定理对 $n > 2$ 情形的论断相反，这时方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 有无穷多个整数解[2]。这等价于说有无穷多个整数组（常被称为勾股数组）可以构成一个直角三角形的三条边。

方程 $x^2 + y^2 = z^2$ 的特殊解的首次发现一般被当作各民族和国家数学水平发展的标志：

1. 公元前 19-前 15 世纪的巴比伦泥板中，就记载了 15 组勾股数，其中有 (119, 120, 169)，(3367, 3456, 4825)，(12709, 13500, 18541) 等。
2. 公元前 11 世纪我国《周髀算经》中记载有商高说的：“若勾三，股四，则弦五。”此说明商高已经知道边

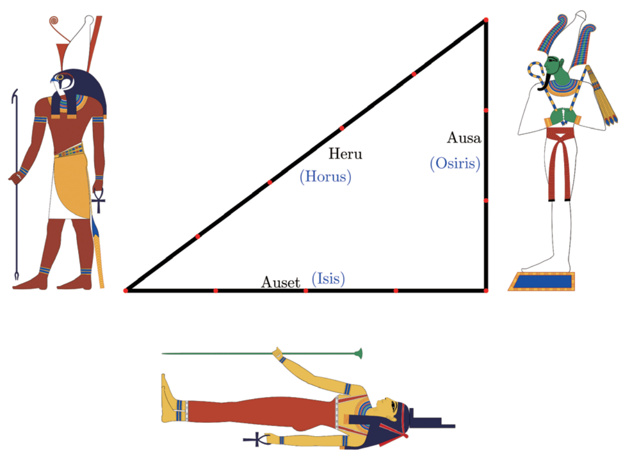


图 67 埃及三角形的象征

[1] 本文续同作者《谷歌数学涂鸦赏析（上）》，《数学文化》第 4 卷第 1 期，页 16-35，2013 年。

[2] 解的通用表达式、丢番图的《算术》以及费马大定理的介绍可参作者《亚历山大城的希帕蒂娅》（《数学文化》第 3 卷第 1 期，页 3–28，2012 年）一文。

图 68 费马

长为 3, 4, 5 的直角三角形。

3. 比例为 3:4:5 的直角三角形在古埃及有着神秘的色彩，常被称为埃及三角形。希腊作家普鲁塔克（Plutarchus，约 46 年-125 年）在他的《道德论集》（*Ethica*，亦作 *Moralia*）第 5 卷中首先描述了这样的三角形：短直角边被称为 Ausa，对应于作为起源的父亲欧西里斯（Osiris）；长直角边被称为 Auset，对应于接受者母亲伊西斯（Isis）；斜边被称为 Heru，对应于前述两者的完满结果：儿子荷鲁斯（Horus）。

费马大定理虽然冠以定理之名，但在 1995 年英国数学家安德鲁 • 怀尔斯（Andrew Wiles, 1953-）给出这个定理的完整证明之前，并无定理之实。在较早期的文献中，它被直接称为费马猜想，后来因为费马的其它猜想或断言均被核实，且只有少数被否定，所以称之为费马最后的定理（Fermat's Last Theorem）。在中文里此定理被称为大定理，是相对于“费马小定理（Fermat's Little Theorem）[3]”而言的。

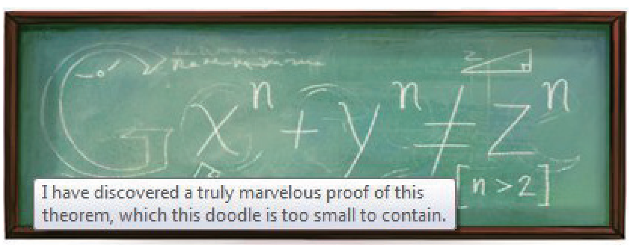


图 69 “费马的名言”

[3] 费马小定理：设 a 为整数，p 为素数，则 p 整除 $a^p - a$。读者可以考虑 $a = 2$，p 分别为 3, 5, 7 的例子：$2^3 - 2 = 2\times3$，$2^5 - 2 = 5\times6$，$2^7\times2 - 2 = 126 = 7\times18$。

费马大定理原是费马在 1637 年左右阅读古希腊数学家丢番图的名著《算术》一书的译本时在页边空白的一个断言，当时他还在页边注释“我发现了一个美妙的证明，可惜由于空白太小而不能写下来”。如果你将鼠标移到这幅谷歌涂鸦上，可以读到这句名言的模仿：“我已发现了这个定理一个美妙的证明，可惜这个涂鸦太小而没法写下来。（I have discovered a truly marvelous proof of this theorem, which this doodle is too small to contain.）”怀尔斯的论文长达 100 多页，这篇论文以及他与其学生理查德 • 泰勒（Richard Taylor）合写的 19 页补充论文，发表在《数学年刊》（*Annals of Mathematics*）1995 年第 3 期整个一期，页边空白和涂鸦空白明显不够！

费马的许多数论结果都像这个论断一样没有给出过证明。不过，费马证明了 $x^4 + y^4 = z^4$ 没有正整数解。这也是现存费马在数论领域给出的仅有的两个证明之一。经过检验，人们发现费马提出的猜想和论断几乎都是对的。但他也“马”失前蹄过。费马知道形如 $2^m + 1$（m 为正整数）的数要为素数，m 必须等于 2 的非负整数幂。接着他检验了 $F_n := 2^{2^n} + 1$（n 为非负整数）的前 5 个数：$F_0 = 2^1 + 1 = 3$，$F_1 = 2^2 + 1 = 5$，$F_2 = 2^4 + 1 = 17$，$F_3 = 2^8 + 1 = 257$，$F_4 = 2^{16} + 1 = 65537$。发现他们都是素数。他猜测所有的 F_n，这些被后人称之为费马数的数，都是素数。但在约 100 年后的 1732 年，计算能力超强的欧拉发现：

$$F_5 = 2^{32} + 1 = 4294967297 = 641\times6700417.$$

这表明第 6 个费马数不是素数，否定了费马的猜测。至今还只知道前面 5 个费马数是素数。

在怀尔斯之前，数学家们已证明了费马猜想的许多特殊情形。在这个过程中催生了许多重要结果。相传希尔伯特不愿意去研究费马大定理的一个原因是不希望杀死这只会生金蛋的鹅。

怀尔斯的证明用到了代数数论中的椭圆曲线理论。陈省身曾在庆祝自然科学基金制设立 15 周年和国家自然科学基金委员会成立 10 周年的讲演《中国的数学——几件数学新闻和对于中国数学的一些看法》中说：“从这个定理我们应认识到：高深的数学是必要的。Fermat 定理的结论虽然简单，但它蕴藏着许多数学的关系，远远超出结论中的数学观念。这些关系日新月异，十分神妙，学问之奥，令人拜赏。”陈省身演讲中的另一段话也是很有借鉴意义的：“我相信，Fermat 定理不能用初等方法证明，这种努力是徒劳的。

数学是一个整体，一定要吸取几千年所有的进步。”

与费马大定理等许多丢番图方程密切相关的是约瑟夫•欧斯特勒（Joseph Oesterlé）及大卫•梅瑟（David Masser）在 1985 年提出的 *abc* 猜想，这个猜想一旦证明，将一举重新证明或解决包括费马大定理在内的许多问题。

abc 猜想的内容如下：设 a, b 为互质的正整数，$c = a + b$，则对任意 $\varepsilon > 0$，存在常数 $C_\varepsilon > 0$，使得

$$C_\varepsilon < \frac{(\mathrm{rad}(abc))^{1+\varepsilon}}{c}.$$

这里 $\mathrm{rad}(n)$ 表示 n 的所有不同素因子的乘积。例如，对 $n = 2^3 \times 5 \times 11^2$，有 $\mathrm{rad}(n) = 2 \times 5 \times 11 = 110$。

2012 年 8 月，日本京都大学数学家望月新一（Shinichi Mochizuki, 1969-）发布总约五百页的 4 篇文章试图提供 *abc* 猜想的证明。这立即引起了很大的关注，《自然》和《科学》杂志都做了报道。望月新一也用到了椭圆曲线理论，但他接着使用了他自创的全新数学理论。

望月新一的证明目前正由其他数学家检查。他曾经证明过艰难的定理。但数学史上不乏严肃的数学家公开宣称解决了大问题，而后发现有错的例子，如 2007 年，法国数学家吕西安•施皮罗（Lucien Szpiro）就曾宣布证明了 *abc* 猜想。

17 哈雷诞辰 355 周年

图 70 哈雷诞辰 355 周年纪念（2011 年 11 月 8 日，英国）

埃德蒙•哈雷（Edmond Halley, 1656 年 11 月 8 日-1742 年 1 月 14 日）是英国历史上一位在天文学、数学、物理学、金融和精算等方面做出过重要贡献的人物。他最出名的成就是我们熟知的：成功预言了现在被命名为哈雷彗星的周期（76 年）和椭圆轨道。谷歌在纪念哈雷诞辰 355 周年的涂鸦中就是用星空中的彗星来纪念哈雷的这一成就。1706 年，在他做出对哈雷彗星的预测之后一年，他学会了阿拉伯语，将阿波罗尼奥斯（Apollonius of Perga, 约前 262- 约前 190）的《圆锥曲线论》的第 5 至第 7 卷从阿拉伯文翻译为拉丁文，而且重建了佚失的第 8 卷。圆锥曲线与天体运行轨道密切相关，从此也可以看出哈雷的努力。

吸引公众的天文现象的出现往往是进行科学教育的重

图 71 哈雷

要契机。古代因为对天文现象的不解而常将彗星视为会带来霉运的“扫把星”。现在因为哈雷等人的贡献，我们可以正确认识彗星了。也因为这样一个相关的原因，哈雷彗星出现的时间成了激励美国进行科学教育的信号。在上一次哈雷彗星访问地球的 1985 年，美国提出 2061 计划，期望通过 76 年的努力，在哈雷彗星再次回来的 2061 年，所有能看见这颗彗星的美国人，都能够适应科学技术和社会生活的发展变化。为此目的，在 1985 年美国就需要着手进行科学、数学和技术教育等方面的改革。美国的 2061 计划也促使了中国在科学教育方面的反思，提出“2049 计划”，即全民科学素质行动计划，希望到 2049 年新中国建国 100 周年时，国民的科学素养有大的提高。

哈雷很早就做出了天文学重要贡献。1673 年，年仅 17 岁的他进入牛津大学王后学院学习。两年后他即开始协助皇家天文学家约翰•佛兰斯蒂德（John Flamsteed, 1646-1719）进行天文观测。一年后他更是放弃学业去南大西洋上的圣赫勒拿岛（St. Helena）工作了两年，编制了第一个南天星表，补充了当时天文学界只有的北天星表。因此工作，哈雷被选入皇家学会，当时他才 22 岁。哈雷在 1720 年还继任佛兰斯蒂德成为第二位英国皇家天文学家

哈雷对引力的兴趣以及天体运行轨道的疑问，使他在 1684 年 8 月到剑桥去访问牛顿，发现牛顿已得到了万有引力定律，哈雷于是说服牛顿发表该结果，并资助牛顿出版了《自然哲学的数学原理》。类似的故事在英国历史上也重现过：达尔文在赖尔的催促下才在 1859 年出版《物种起源》。实际上他的进化论思想早在 1844 年就已基本定型，并写好了初稿。

哈雷与另一位大数学家拉格朗日的“交往”却是时空相隔的。17 岁以前的拉格朗日喜欢文学，对数学并无感觉，很可能会在父亲的安排下成为一名律师。使得拉格朗日迷上数学的原因是他读到了哈雷所写的一篇介绍牛顿微积分思想的文章。

哈雷在人口统计学与保险方面也有影响深远的工作。他参与到这项工作也有一定的偶然性。

1662 年英国人格兰特（John Graunt, 1620-1674）已经发表了著名的人口统计工作《关于死亡表的自然的和政治的观察》。但他所使用的数据中伦敦人口死亡时的年龄没有记录。大约 30 年后，布雷斯劳（Breslau，即波兰的弗罗茨瓦夫 [Wrocław]）的牧师卡斯帕 • 诺依曼（Caspar Neumann, 1648-1715）发表了一份有关布雷斯劳人口的出生、死亡以及死亡时年龄的详细报告 *Reflexionen über Leben und Tod bey denen in Breslau Geborenen und Gestorbenen*。他将此报告寄给了莱布尼兹，而莱布尼兹转告了英国伦敦皇家学会。1691 年，诺依曼按要求将报告寄给了伦敦皇家学会的秘书。哈雷分析了这份报告，在 1693 年发表了一篇关于人寿保险的文章，改进了格兰特的死亡表并引进了死亡率的定义。

1762 年，世界上第一家保险公司——伦敦公平保险社（The Equitable）在英国成立。这家保险公司应用的技术就来源于哈雷的计算方法。现在很受追捧的职业“精算师”即源于这家公司。

18 华罗庚诞辰 101 周年

图 72 华罗庚诞辰 101 周年纪念（2011 年 11 月 12 日，中国大陆、香港）

2011 年 11 月 12 日是我国著名数学家华罗庚（1910 年 11 月 12 日-1985 年 6 月 12 日）诞辰 101 周年，谷歌以涂鸦进行纪念。涂鸦采用卡通形象的华罗庚一边泡茶一边思考“1 + 1 = ?”的漫画方式，突出了他的两项重要的贡献：一是以哥德巴赫猜想“1 + 1 = ？”所指示的数论研究（或说所指导学生的成就），二是用华罗庚提出的“泡壶茶喝”这个经典的时间安排例子来标志他的统筹学研究。更广一些，两者分别表示他在纯数学研究与应用数学推广方面的贡献。

泡茶喝的例子来自于华罗庚 1965 年 6 月 6 日在《人民日报》上发表的《统筹方法平话》。读者对此应该不陌生，因为他的文章经节录、编写后入选了中学《语文》教材。华罗庚在文章的引子中先问：“比如，想泡壶茶喝。当时的情况是：开水没有。开水壶要洗，茶壶茶杯要洗；火已升了，茶叶也有了。怎么办？”然后比较甲、乙、丙三种办法：

图 73 中国科学院数学与系统科学研究院思源楼内的华罗庚雕像（作者摄于 2012 年 11 月 7 日）

> **办法甲**：洗好开水壶，灌上凉水，放在火上；在等待水开的时候，洗茶壶、洗茶杯、拿茶叶；等水开了，泡茶喝。
>
> **办法乙**：先做好一些准备工作，洗开水壶，洗壶杯，拿茶叶；一切就绪，灌水烧水；坐待水开了，泡茶喝。
>
> **办法丙**：洗净开水壶，灌上凉水，放在火上；坐待水开，开了之后急急忙忙找茶叶，洗壶杯，泡茶喝。

“哪一种办法省时间？”就变得很明显：“谁都能一眼看出，第一种办法好，因为后二种办法都‘窝了工’。”

华罗庚就是从人人都熟悉的泡茶的例子开始，以通俗易懂的语言，深入浅出地说明了“统筹方法，是一种为生产建设服务的数学方法。它的应用范围极为广泛，在国防、在工业的生产管理中和复杂的科研项目的组织和管理中，皆可以应用”。

此后，华罗庚还撰写和出版了另一本科普读物《优选法平话及其补充》。“优选法”可用以改进生产工艺和提高质量。华罗庚组织的“双法”（“优选法”和“统筹法”）推广小分队，共去过 26 个省、自治区和直辖市，有很大的经济效益和社会效益。

华罗庚写作《平话》以及推广“双法”得到过毛泽东

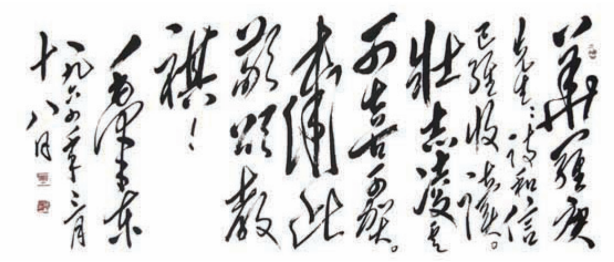


图 74 毛泽东给华罗庚的第一封信

两次亲笔信的鼓励。1964 年初，华罗庚曾给毛泽东致信，表达了自己希望走出书斋，将数学应用于实际工作的愿望。同年 3 月 18 日毛泽东回信：“华罗庚先生：诗和信已经收读，壮志凌云，可喜可贺。肃此。 敬颂教祺！ ” 1965 年，华罗庚再次致信毛泽东，写了赴三线参加生产实践的感受，并将自己关于统筹方法平话的书寄了一本给毛泽东。1965 年 7 月 21 日，毛泽东再次复信：“华罗庚同志：来信及《平话》，早在外地收到。你现在奋发有为，不为个人，而为人民服务，十分欢迎。听说你到西南视察，并讲学，大有收获，极为庆幸。专此奉复。”

纪念华罗庚涂鸦上的“1 ＋ 1 ＝ ?”表示哥德巴赫猜想“1 ＋ 1 ＝ 2”，含义为任意一个大于或等于 6 的偶数都可以表示为两个奇素数之和，就如我们有 6 ＝ 3 ＋ 3，8 ＝ 3 ＋ 5 以及 100 ＝ 41 ＋ 59 等。这里的“1”和“2”分别用来象征奇素数和偶数。涂鸦中的“1 ＋ 1 ＝ ?”与前文中纪念陈景润的谷歌涂鸦上的“1 ＋ 2”相映成趣。“1 ＋ 2”指陈景润的结果，因此这里的“1”还是表示奇素数，“2”表示不超过两个奇素数的乘积。“1 ＋ 2”是目前对于“1 ＋ 1 ＝ ?”的最好的答案。华罗庚的学生群体对“1 ＋ 1 ＝ ?”的研究可以看做华罗庚对数学的一大贡献。

因陈景润刻苦钻研，勇摘科学皇冠上的明珠的故事而使得形象地描述哥德巴赫猜想的“1 ＋ 1 ＝ 2”以及陈氏定理的“1 ＋ 2”广为人知。然而有不少人对此望文生义地来理解，以为数学家闲得没事做或数学是如此高深莫测，简单的算术 1 ＋ 1 ＝ 2，1 ＋ 2 ＝ 3 都要研究。如此疑虑和牵强附会在公众乃至某些名人的言论中并不鲜见。这反映了数学普及的迫切性。

华罗庚自己做了很多数学普及工作，除了上述两本《平话》，还撰写了《从杨辉三角谈起》、《从祖冲之的圆周率谈起》等深受读者喜爱的普及图书。华罗庚作为一位在数学研究领域有国际地位的数学家在数学普及方面做出如此的努力，必定受到人们的尊敬。

关于华罗庚的传记，感兴趣的读者可以阅读王元著《华罗庚》等作品。

19 赫兹诞辰 155 周年

图 75 赫兹诞辰 155 周年纪念（2012 年 2 月 22 日，全球）

2012 年 2 月 22 日的谷歌涂鸦是波形曲线动画，曲线分段使用蓝、红、黄、绿四种谷歌颜色。这是纪念十九世纪最重要的物理学家之一，德国物理学家海因里希 • 赫兹（Heinrich Hertz, 1857 年 2 月 22 日-1894 年 1 月 1 日）诞辰 155 周年。

涂鸦采用波形曲线，是因为赫兹在 1887 年首先用实验证实了电磁波的存在，验证了麦克斯韦的电磁波理论。电磁波的发现使得我们现在使用电视、广播、无线网络和手机等成为可能。为纪念他，频率的国际单位制单位赫兹就是以他的名字命名的。

在慕尼黑大学求学期间，赫兹听从冯 • 约里（P. G. von Jolly）的建议，研读了拉格朗日、拉普拉斯以及泊松的著作，为日后的研究奠定了坚实的数学基础。他关于数学公式有名言：“人无法摆脱这样的感觉 : 这些数学公式是独立存在的，有它们自己的智能，它们比我们更聪明，甚至比它们的发现者聪明，因为我们从它们中得到的多于我们赋予它们的 [4]。”跟随

图 76 1994 年德国发行纪念赫兹逝世 100 周年的邮票

[4] 参考贝尔 (Eric T. Bell) 著《数学精英》（*Men of Mathematics, New York, 1937*）：One cannot escape the feeling that these mathematical formulas have an independent existence and an intelligence of their own, that they are wiser that we are, wiser even than their discoverers, that we get more out of them than was originally put into them。

图 77 现德国卡尔斯鲁尔理工学院赫兹纪念雕像，铭文翻译：1885-1889 年，赫兹在这里发现了电磁波。（An dieser Stätte entdeckte Heinrich Hertz die elektromagnetischen Wellen in den Jahren 1885-1889）

基尔霍夫（Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887）以及亥姆赫兹（Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821-1894）等大家的学习也使得赫兹的能力得到极大的提高。

虽然因败血症，赫兹年仅 36 岁就去世了。但他的成就是多方面的，除了上述电磁波实验，他还发现了光电效应，改写了麦克斯韦方程组等。我们下面介绍他在力学体系建立方面的贡献。

赫兹是既能够从事实验物理学，也能做理论物理的物理学家，富于哲学思想。他坚信物理学应该把自然现象归结为简单的力学定律，因此开始了基础力学研究。在他生命的最后三年，与疾病斗争，与时间赛跑，撰写了《力学原理》[5]。这本书在赫兹去世后不久出版，很受重视，读者可以在《西方数学中的里程碑式作品：1640-1940》[6] 中读到更多介绍。

传统的经典力学和分析力学体系分别以力和能量为核心概念。赫兹只用到时间、空间和质量这三个量，用类似于《几何原本》中的写作体系和严谨的推理，构建了一种“无力的力学”。亥姆霍兹在为《力学原理》写的序言中说：“未来将证明，本书对揭示自然力的新的、普遍特性有着重大启发价值。”事实上，赫兹的观念后来为爱因斯坦等所继承和发扬。在广义相对论中，万有引力这一自然界最基本的力就是用空间的弯曲来表示。

20 吉泽章诞辰 101 周年

图 78 吉泽章诞辰 101 周年纪念（2012 年 3 月 14 日，全球）

2012 年 3 月 14 日的谷歌涂鸦是用折纸作品表现的，这是为了纪念日本折纸艺术大师、现代折纸之父吉泽章（1911 年 3 月 14 日-2005 年 3 月 14 日）诞辰 101 周年（也恰好为逝世 7 周年）。

纸张是中国四大发明之一，折纸也源自中国，且是中国人的传统之一。作为娱乐，不少朋友少时可能都有过用纸张折飞机和小船经历。用折纸作品祭奠故人也是中国一个重要的传统。但折纸在日本得到了更加广泛的发展。因为吉泽章等的努力，折纸已然成为日本艺术，并被日本视为其国粹之一。折纸的英文词汇“Origami”也是由日文的“折り紙”音译而来。从后文可见，有着深厚折纸“群众基础”的日本，对折纸数学的研究也处于领先地位。

吉泽章出生于日本的栃木县，从 1938 年起开始从事折纸的研究与创作，发表了一系列折纸作品。特别是 1955 年，他在荷兰阿姆斯特丹举办了个人折纸展，在西方引起了很大的震动。吉泽章一生创造了 5 万多件富有创

图 79 吉泽章和他的折纸作品

[5] 第一版：*Die Prinzipien der Mechanik in neuem Zusammenhange dargestellt* (ed. P. Lenard), Leipzig: Barth, 1894。英译：*The principles of mechanics presented in a new form* (trans. D. E. Jones and J. J. Walleye), London: Macmillan, 1899。

[6] *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940*, I. Grattan-Guinness 著，Elsevier B. V.，2005。

意与趣味的作品。他不但发明了新的折纸法——湿折法（将纸张变潮后再折），还与美国人山姆•兰德列特（Sam Randlett）发明了图解折纸的术语——吉泽章-兰德列特系统，这使得折纸有了自己统一的语言，因而令折纸艺术能够更好地传播。

现代折纸也已经变为一门科学，并且获得很广泛的应用：从日常生活可用到的可折叠不锈钢袋到太空中人造卫星大型太阳能电池板阵列。如同许多学问一样，数学是使折纸从一门游戏成为科学而获得应用的原理。我们介绍这个涂鸦即是因其背后有趣的折纸数学。

人们很早就已经注意到了折纸与几何的密切联系。最明显的是，通过不断将纸张对折，可以将纸张的一边 2 等分，4 等分，也可以从普通的长方形纸张得到正方形等。进一步利用几何原理，人们可以将正方形的一边等分为 3、5、7、9 等等份；还可以得到正三角形、正五边形、正六边形，甚至黄金矩形和白银矩形（长宽比分别为 $(1+\sqrt{5})/2$ 和 $1+\sqrt{2}$）等。

现已退休的日本生物学家芳贺和夫（Kazuo Haga）就是一位折纸数学方面著名的专家。他曾常在做实验的间隙，琢磨折纸。他得到了被人称为芳贺第一、第二和第三定理的折纸定理：用简单的折叠，给出了各种比例。芳贺和夫还与人合作，于 2008 年出版了一本很适合中学数学教学辅助的书《折纸学——通过折纸的数学探索》（*Origamics: Mathematical Explorations Through Paper Folding*），介绍了这些定理及其他相关结果。这本书没有一个折纸实物图，集中关注于几何对象。

作为例子，我们用图 80 来解释芳贺第二定理：设有正方形纸张 $ABCD$，先将纸张对折，分别得到 AD、BC 的中点 E、F。将三角形△EDC 沿 CE 将 D 点折到正方形内部的 D' 点。再沿 ED' 折，得到 AB 与 ED' 之延长线的交点 H。则 $HB=\frac{1}{3}AB$。这个折纸方法还产生了其它很多有趣的结论，如设 G 为 CD' 与 EF 的交点，则三角形△$ED'G$ 有边长比为 3:4:5。

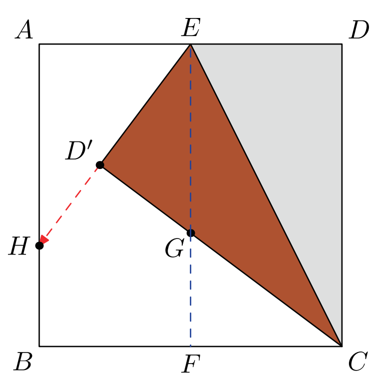


图 80 芳贺第二定理

类似于几何作图规则，折纸有自己的公理系统：

1. 给定两点 p_1 和 p_2，有且仅有一条折痕同时过这两点；
2. 给定两点 p_1 和 p_2，有且仅有一种方法把 p_1 折到 p_2 上；
3. 给定两直线 l_1 和 l_2，可以把 l_1 折到 l_2 上；
4. 给定一点 p 和一条直线 l，有且仅有一种方法过 p 折出 l 的垂线；
5. 给定两点 p_1, p_2 和一条直线 l，可以沿过 p_2 的直线将 p_1 折到 l 上；
6. 给定两点 p_1 和 p_2 以及两直线 l_1 和 l_2，可以一次将 p_1、p_2 分别折到 l_1、l_2 上；
7. 给定一点 p 和两直线 l_1 和 l_2，可以沿着 l_2 的垂线将 p 折到 l_1 上。

这些公理最早由雅克•贾斯汀（Jacques Justin）在 1989 年得到，后来被重新发现：前六条公理由藤田文章（Humiaki Huzita）在 1991 年提出，第七条公理由羽鸟公士郎（Koshiro Hatori）在 2001 年发现。罗伯特•朗（Robert Lang）也发现了第七条公理，并证明这七个公理是完备的。因此这个公理系统被称为：藤田－羽鸟公理或藤田－贾斯汀公理。

折纸公理中的操作很容易直观理解。比如，取一张正方形的纸片（如设为 $ABCD$），沿对角线（BD）将它对折，折成等腰直角三角形的操作就可以用来理解公理 1（过 B 与 D 只有一条折痕 BD）、公理 2（只有一种方法将 A 点折到 C 点）和公理 3（可以将直线 AB 折到 BC 上）等。

折纸公理也可以用数学的语言来解释。比如，公理 2 相当于找由两点 p_1 与 p_2 确定的线段的中垂线。也很自然地可将折纸与尺规作图做比较。前 5 条公理的操作一般最多有两种做法，在数学上相当于最多求解二次方程，与尺规作图的能力相当。例如，在公理 3 中，当两条直线平行时，自然只有一种作法；当两条直线相交，则相当于求角平分线，分别通过两对对顶角做角平分线可以得到两种作法。又如，公理 5 中的做法相当于求一条直线与圆的交点，这需要求解二次方程，一般有两个解。

但公理 6 中的折纸一般有三种方法，比尺规作图要强。它在数学上等价于求一条直线与两抛物线相切，涉及三次方程的求解。这样诸如三等分角、倍立方等本质为三次方程求解的经典尺规作图不能问题就可以用折纸来解决。图 81 所示为如何用折纸解决倍立方问题的例子，从中可以看到公理 6 的应用：设有正方形纸张 $ABCD$，（如通过芳贺第二定理折纸法）先得到 AD、BC 的三等分点 E、G 和 F、H。根据折纸公理 6，可以将点 B、F 分别折到 AD、GH 上成为 B' 和 F' 点。可以证明 $DB'/B'A=\sqrt[3]{2}$。

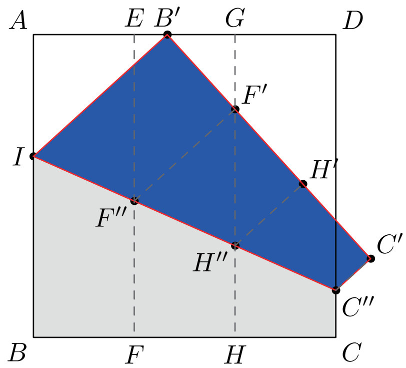


图 81 折纸求解倍立方问题

关于折纸数学，还有其它如折痕的研究等诸多方面，我们就不涉及了。有兴趣的读者可以参考许多著作以及专家罗伯特 • 朗的演讲 http://www.ted.com/talks/robert_lang_folds_way_new_origami.html 及其折纸主题网站 http://www.langorigami.com。实际上，纪念吉泽章的涂鸦折纸就是朗制作的，在涂鸦徽标的说明文档里（http://www.google.com/doodles/akira-yoshizawas-101st-birthday），朗除了介绍吉泽章，还提供了得到相关折纸作品的方法。

21 海亚姆诞辰 964 周年

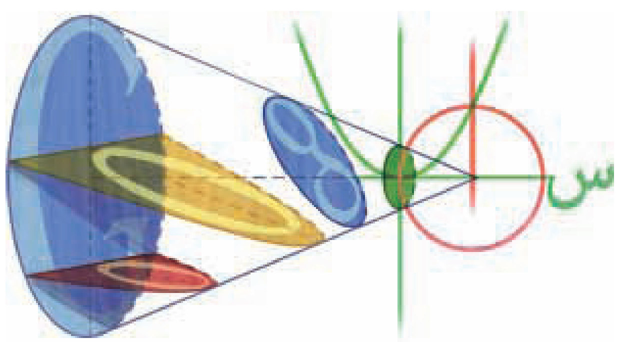


图 82 海亚姆诞辰 964 周年纪念（2012 年 5 月 18 日，阿联酋、巴林、阿尔及利亚、埃及、伊拉克、约旦、科威特、黎巴嫩、利比亚、摩洛哥、阿曼、巴勒斯坦、突尼斯、卡塔尔和沙特阿拉伯）

2012 年 5 月 18 日，谷歌在许多中东和北非国家的谷歌首页纪念古波斯诗人、数学家、天文学家和哲学家欧玛尔 • 海亚姆（Omar Khayyám，又译莪默 • 伽亚谟 [郭沫若用译名]

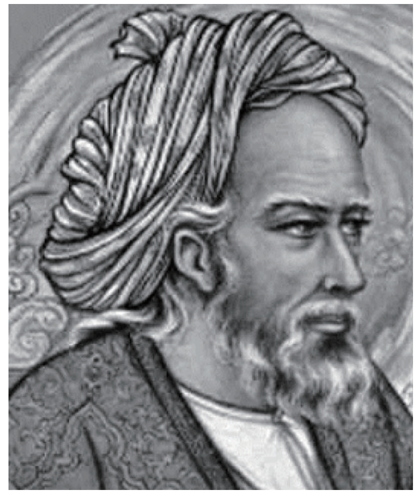


图 83 海亚姆

或峨默 [金庸用译名]，1048 年 5 月 18 日-1131 年 12 月 4 日）诞辰 964 周年。

海亚姆出生于今伊朗东北部霍拉桑（Khorrasan）省的内沙布尔（Neyshabur 或 Nishapur）。当时的伊朗被突厥人建立的塞尔柱帝国统治。海亚姆生活的时代，内沙布尔是重要的文化中心，世界上最大的城市之一。它也是古丝绸之路上的一个城市，至今仍有古代旅馆留存下来。历史上，内沙布尔也是一座充满悲伤的城市。1221 年，成吉思汗的蒙古军队西侵时，曾对内沙布尔进行屠城杀戮，相传死亡人数约 170 万人。

纪念海亚姆的谷歌涂鸦最右边的阿拉伯字符（或说波斯 - 伊朗字符）س[7] 用意就是揭示被纪念者所在地。伊朗人

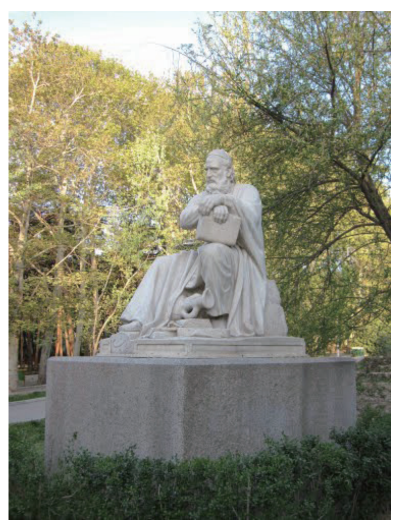


图 84 西班牙马德里康普斯顿大学里的海亚姆雕像

[7] 该字符按理应该用来显示“Google”商标中的字母“e”，但 س 对应的英文字母为“s”。有可能是谷歌失误，因为表示“e”的阿拉伯字符 ی 与 س 相似。也有可能谷歌设计者认为字母“e”已经得到表达，此字符仅是增加“波斯风味”。

图 85　电影《回到未来》(1985）中的情景，女主角所抱的书为 1937 年美国纽约出版的一本费兹哲罗译《鲁拜集》(装在书匣中，书匣表面图案如图中右下部所叠加的图片）

图 86 杜拉克为《鲁拜集》第 12 首（实为费兹哲罗英译第 1 版第 11 首）配的插画

对欧玛尔很推崇，他们把 5 月 18 日定为海亚姆日，每一年的这一天都会在内沙布尔举行纪念活动。

2011 年的 5 月 18 日，远在西班牙马德里康普斯顿大学（Complutense University of Madrid， 西班牙文 Universidad Complutense de Madrid）在校园里树立了一座海亚姆的雕像来纪念他。另外，在伊朗的首都德黑兰和罗马尼亚的首都布加勒斯特也都有他的雕像。

海亚姆主要以其诗歌倾倒众人。他善写一种称为鲁拜（Rubai）的四行诗。鲁拜类似于中国的绝句，一首四行，第一、第二和第四行押韵，第三行大抵不押韵。

海亚姆生活在诗的时代。此前在他的家乡霍拉桑省有史称波斯文学之父的诗人鲁达基（Rudaki, Abu Abdollah Ja1far, 850-941）以及著名诗人菲尔多西（Ferdowsi, 约 940-1020）。菲尔多西的代表作《列王纪》是一部波斯民族的英雄史诗巨著。

海亚姆的诗歌在几百年里几乎被人遗忘。直到 1859 年英国的爱德华 • 费兹哲罗（Edward FitzGerald, 1809-1883）将他的诗从波斯文翻译成英文时才引起极大的关注，现在这个英译已经成为了英国文学的经典。董桥在《画 < 鲁拜集 > 的人》中赞道 :“这部书饮誉西方文坛一百五十多年，靠的真是菲茨杰罗 [8] 的英文译本了。都说译文是借句发挥不是依句翻译，海亚姆笔端飘下一片落叶，菲茨杰罗的稿纸上瞬间是满山的秋色。”

此后便有几乎数不清的译本出现。单说中译就有几十种之多。郭沫若、胡适、闻一多、徐志摩和朱湘等名家都翻译过，张鸿年还从波斯文直接翻译。特别是译者黄克孙（1928-），他是一位颇有成就的美籍华人物理学家，麻省理工学院的教授，但在中文世界，他最有名的或许还是他用七言诗的形式将费兹哲罗的英译《鲁拜集》译成中文。

图 87 1967 年迪拜发行的纪念海亚姆的邮票

张承志在《波斯的礼物》里写到:“在他们（老读书人）看来，这一西域怪杰，完全可以与整个的波斯文明相匹敌。确实，这位风流诗人的绝妙‘鲁拜’，引得中国人译者如蜂，兴而不衰。……这些胡姬当炉的妙歌，它挑逗了中国文人的渴望和趣味，教导了他们个性解放的极致。文人们出于惊喜，争相一译，寄托自由的悲愿。……——于是译笔缤纷，华章比美。”

绿叶衬牡丹，好诗少不了名家的配图。著名的有法国画家杜拉克（Edmund Dulac, 1882-1953）所作的彩色插画。

[8] 即费兹哲罗。

董桥曾赞他的插图“随时翻阅都翻得出一缕古东方的神秘情调”。1967年，迪拜还以海亚姆的诗歌配图为内容，发行了一套纪念海亚姆的小全张。

爱屋及乌，对诗的喜爱也吸引了很多爱书之人对书的形式的喜爱。董桥不但写了《画<鲁拜集>的人》，还写了《我集藏的<鲁拜集>》、《彩翎之恋》，谈《鲁拜集》的收藏，以及其插图、装帧、版本乃至书商和轶事。尤其是三篇文章中董桥都念念不忘1908年英国书籍装帧名家桑格斯基（Francis Sangorski）所做的一部“封皮上镶了各种宝石缀成的图案，一派东方贵胄气息”的孔雀装《鲁拜集》。这部书几经波折，却不幸在1912年随泰坦尼克号邮轮运去美国的途中海葬了。

郭沫若说，在海亚姆的诗里，可以找出李太白的面目来。我们来读读费兹哲罗《鲁拜集》（*Rubaiyat of Omar Khayyam*，Rubaiyat是Rubai的复数）中的第12首[9]。这首诗可能是《鲁拜集》中引用最广泛的。

郭沫若译[10]：

树荫下放着一卷诗章，
一瓶葡萄美酒，一点干粮，
有你在这荒原中傍我欢歌——
荒原呀，啊，便是天堂！

接下来我们通过金庸在他的《倚天屠龙记》中所引用

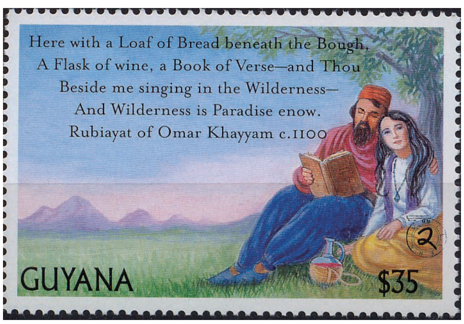


图88 圭亚那发行纪念海亚姆的邮票（邮票上的英文诗为费兹哲罗英译《鲁拜集》第1版第11首，即常说的第12首的英译）

海亚姆的诗歌与传说来进一步认识《鲁拜集》诗歌中所反映的海亚姆对生命无常的感叹以及传说所折射的他淡泊名利专心学问的态度。我们知道金庸的小说除了恢弘的历史背景，荡气回肠的侠骨柔情，跌宕起伏的情节，也常了无痕迹地寓历史典故、诗词歌赋、琴棋书画、儒释道医、奇门术数于刀光剑影之中。后文在介绍纪念拉马努金的涂鸦中将提到金庸小说里的术数（数学）。

《倚天屠龙记》中小昭、殷离常哼唱令听者倍感悲凉的中土曲子：“来如流水兮逝如风，不知何处来兮何所终！”就是化用了海亚姆的诗的语言和意境。请看郭沫若翻译《鲁拜集》中的第28首

我也学播了智慧之种，
亲手培植它渐渐葱茏；
而今我所收获的收成——
只是“来如流水，逝如风”。

而小说中直接使用的“飘飘入世”、“飘飘出世”等词与郭译第29首有直接的联系：

飘飘入世，如水之不得不流，
不知何故来，也不知来自何处；
飘飘出世，如风之不得不吹，
风过漠地，又不知吹向何许。

《倚天屠龙记》第三十回中还借用了波斯大哲野芒门下三个杰出的弟子“山中老人”霍山、诗人峨默（即海亚姆）与政治家尼若牟（即尼扎姆•穆勒克）的故事。传说三人同窗求学时，曾相约未来若发达，当共享富贵。尼若牟做了首相后，给了霍山官职，但霍山不满足，成立了恐怖组织依斯美良派，专事行刺。后来更遣人刺杀波斯首相尼若牟。而峨默不愿居官，只求一笔年金，以便静居研习天文历数，饮酒吟诗。类似的故事也可以在郭沫若译《鲁拜集》“小引”中找到。这个传说其实不会真实发生，因为三人生活的时代有差异，但故事流传甚广，反映了人们对三人品格的看法。

以海亚姆传奇为主题的1957年美国好莱坞电影《欧玛尔•海亚姆》（*Omar Khayyam*）和2005年美国电影《继承者：欧玛尔•海亚姆传奇》（*The Keeper: The Legend of Omar Khayyam*）[11]都有上述相关情节。金庸小说中更是加以演绎——明教中人的武功出自山中老人。依斯美良派在历史上还与另一位穆斯林大数学家纳西尔丁•图西有关，我们将另文讲述他的故事。

海亚姆在数学方面也有杰出的贡献。与其诗歌成就离不开诗的传统一样，他的数学成就的背后是穆斯林数学的整体辉煌。

数学是文明之镜。穆斯林创造了璀璨的文明，在数学

[9] 这里的第12首是按通常习惯理解，实际上费兹哲罗的英译有五个版本，第12首在第一版中为第11首。

[10] 黄克孙则将同一首诗译成七言诗，别有味道：一箪蔬食一壶浆，一卷诗书树下凉。卿为阿侬歌瀚海，茫茫瀚海即天堂。

[11] 故事以历史与现实双线交叉展开：一方面是叙述美国休斯顿12岁男孩卡尔曼作为海亚姆的后代，在其家族传承海亚姆故事的“继承者”哥哥去世之后所进行的寻根之旅，另一方面是对海亚姆的传奇经历的回顾。片中还有卡尔曼以孔雀装《鲁拜集》的封面为引子，找到桑格斯基的继承人，见到一部《鲁拜集》的情节。

方面也有着很重要的贡献。穆斯林数学最重要的贡献不仅是翻译继承了希腊数学的传统，使得度过漫长黑暗时代的欧洲人通过十字军东征发现了阿拉伯学者的著作，获得了欧几里得等的著作。作者在《亚历山大城的希帕蒂娅》一文中介绍了穆斯林教徒在六世纪对亚历山大图书馆、希腊数学的毁灭性打击。稳定后的穆斯林世界也开始重视学术研究，在巴格达就建有堪与亚历山大图书馆媲美的智慧宫，专事翻译与学术研究。希腊数学的重要著作如欧几里得的《几何原本》以及托勒密的《天文学大成》，以及印度人的著作等也陆续被翻译成了阿拉伯文。穆斯林数学家学习希腊、印度数学和天文学，并加以评注和改进。他们在代数学、三角学、平面几何与球面几何等方面在希腊数学家的基础上有系统的发展，而且开始考虑几何与代数的关系。我们使用的阿拉伯数字和十进制，就是阿拉伯人从印度引入并传播开来的，而代数学这一名称则直接来源于阿拉伯文。

海亚姆曾研究过在数学史上有重要意义的欧氏几何第五公设问题，但他最主要的著作是《代数问题的论证》（*Treatise on Demonstration of Problems of Algebra*）。在此书中海亚姆研究了开方术，如得到了 44 240 899 506 176 的 5 次方根 536！他也得到了二项式展开公式，即我们熟知的杨辉三角（或贾宪三角）；因此在伊朗也常称该三角为海亚姆-帕斯卡三角。其中最重要的成果是第三章中关于三次方程的求解。他的前辈花剌子密系统地解决了一次方程及一元二次方程求解问题。而三次方程的一般解法直到 1545 年才由意大利数学家卡尔达诺在其《大术》中写下。海亚姆将三次方程进行分类并对一些特殊的三次方程给出几何解法，即用两条圆锥曲线的交点来确定方程的根。

谷歌纪念海亚姆的涂鸦显示的就是海亚姆在求解三次方程方面的数学成就。这个涂鸦主要有两部分组成：涂鸦左边是圆锥和各种圆锥截面，并显示了椭圆和抛物线等圆锥曲线；右边是一个抛物线和圆相交的示意图。

在中学学过解析几何的读者知道，解析几何的特点是用代数的方法求解几何问题，比如求解两条曲线的交点，只需要求解两曲线方程的联立方程就可以了。但对阿拉伯人来说，代数问题可以且必须用几何来解释。

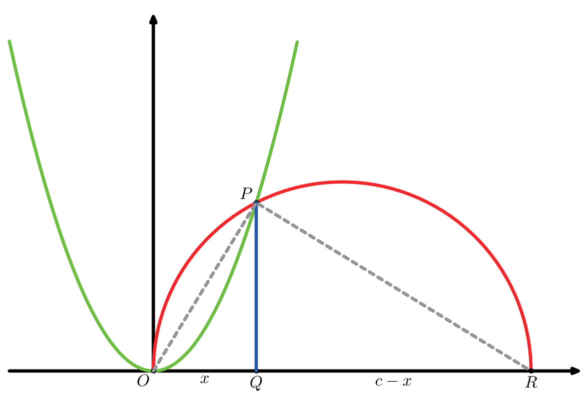


图 89 海亚姆求解三次方程的几何解释

海亚姆曾求解如下形式的三次方程

$$x^3 + b^2x = b^2c,$$

其中 $b, c > 0$。为方便解释，我们给出了笛卡尔发明的坐标系，其实利用圆锥曲线的性质，这是不必要的。海亚姆的方法如下：作抛物线 $by = x^2$ 以及中心在 $(c/2, 0)$、直径为 c 的圆（参考图 89 并比较涂鸦上的示意图）。设两曲线交点为 P，且 PQ 垂直横坐标，则 OQ 的长就是方程的解。推理不难。设 $OQ = x, PQ = y$。因为三角形△OPR 为直角三角形，易知两直角三角形△OPQ 与△PQR 相似。所以 $y^2 = x(c - x)$。同时又有 $by = x^2$。消去未知量 y 可得 $x^3 = b^2(c - x)$。因此 $x = OQ$ 为方程的解。

三次方程的圆锥曲线解法也可以追溯至古希腊时代。门奈赫莫斯（Menaechmus，约公元前 360 年）在研究倍立方问题时发现了圆锥曲线。倍立方问题是指用尺规作图构造一个两倍于原立方体体积的立方体。从代数学的角度看，这需要构造立方根 $\sqrt[3]{2}$。后人证明这是一个超越数，从而否定了尺规作图的可能性。阿基米德在《论球与圆柱》中的平面截球问题也可归结于三次方程问题。

方程之解的几何构造在十七世纪时吸引了许多数学家的注意。特别是笛卡尔找到了用圆与抛物线相交来求解所有三阶和四阶方程的唯一构造。

1070 年海亚姆向北到古丝绸之路上的名城达撒马尔罕（现为乌兹别克斯坦第二大城市，撒马尔罕州首府）从事数学研究，后赴伊斯法罕进行天文历法改革 [12]。海亚姆还在诗歌中记述过他在历法方面的经历：“啊，人们说我的推算高明，我曾把旧历的岁时改正——，谁知道那只是从历书之中，消去未生的明日和已死的昨晨。[13]”

海亚姆的这一姓氏（英文翻译为 Tent-maker）有各种解释。一般认为其意思是帐篷制造者或支架帐篷的人，可能表示其父辈的职业；郭沫若则认为这可能是诗人的雅号。海亚姆在家乡求学后游历四方，终身未婚，晚年回到家乡直至去世。为了纪念海亚姆，1934 年，由多国集资，在他的故乡内沙布尔修建了一座高大的陵墓——一座用八块菱形板围成的圆锥状中空建筑，棱形内部镶嵌着伊斯兰的美丽花纹。这大约是受到海亚姆生前预言的启发：“我的坟墓所在的地方，北风会吹玫瑰花来覆盖。”

12 伊朗现行伊朗历比世界通用公历要精确。

13 郭沫若译《鲁拜集》第 57 首。

图 90 海亚姆陵墓

(a) (b) (c)

图 91 纪念海亚姆的邮票：(a) 密克罗尼西亚联邦发行；(b) 和 (c) 为阿尔巴尼亚发行

历史上，在文学方面有声誉的数学家（或天文学家）不乏其人，如中国的张衡，法国的帕斯卡、柯西，俄罗斯的柯瓦列夫斯卡娅等。英国的数学家罗素还在 1950 年以《婚姻与道德》获得诺贝尔文学奖。但同时在诗歌、天文学、数学这几个领域如海亚姆一样有杰出成就，而且影响深远者，很难找到另外的人。

关于诗歌与数学的联系，德国数学家魏尔斯特拉斯曾说："一个数学家，如果没有一点诗人的气质，不会是一个完满的数学家[14]。"英国 BBC 制作的四集电视节目《数学的故事》之《东方的天才》在介绍海亚姆后评论："学科之间有很大的相似性。诗歌，研究结构和节奏韵律，与构建数学逻辑证明有强烈的共鸣。"这大约是为什么他能在这些方面取得非凡成就的一个内在原因吧。

1997 年，阿尔巴尼亚发行了两张纪念海亚姆的邮票（邮票上写着为纪念海亚姆诞辰 850 周年，可能有误）。

可以参考的资料有英国 BBC 制作的纪录片《天才的欧玛尔•海亚姆》(*The Genius Of Omar Khayyam*)。也推荐阅读当代诗人与数学家蔡天新教授所著《难以企及的人物——数学天空的群星闪耀》中的《欧玛尔•海亚姆的世界》。

22 图灵诞辰 100 周年

图 92 图灵诞辰 100 周年纪念（2012 年 6 月 23 日，全球；图为图灵机游戏起始页面的计数程序（当前显示的二进制数为 10110，即十进制表示的 22）

2012 年的 6 月 23 日是英国数学家、逻辑学家与计算机科学之父阿兰•图灵（Alan Mathison Turing, 1912 年 6 月 23 日 -1954 年 6 月 7 日）诞辰 100 周年的纪念日。谷歌涂鸦以一个交互游戏[15]的方式展示了图灵在计算机实现之前提出的抽象计算模型——图灵机（Turing Machine）。

谷歌涂鸦设计者想利用图灵诞辰 100 周年的机会，设计一个好的涂鸦向他们心中的英雄致敬。但图灵在很多方面都有杰出的贡献，而且图灵的许多工作抽象而难以用涂鸦的方式表现使得公众理解。这对谷歌涂鸦设计者是一个挑战。

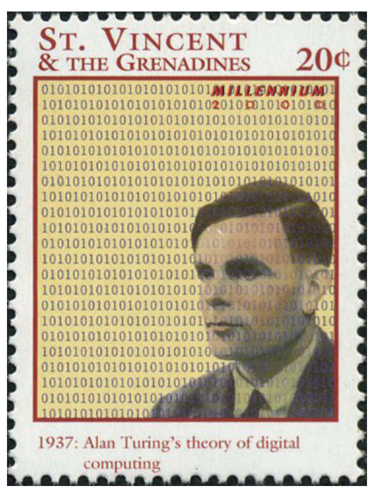
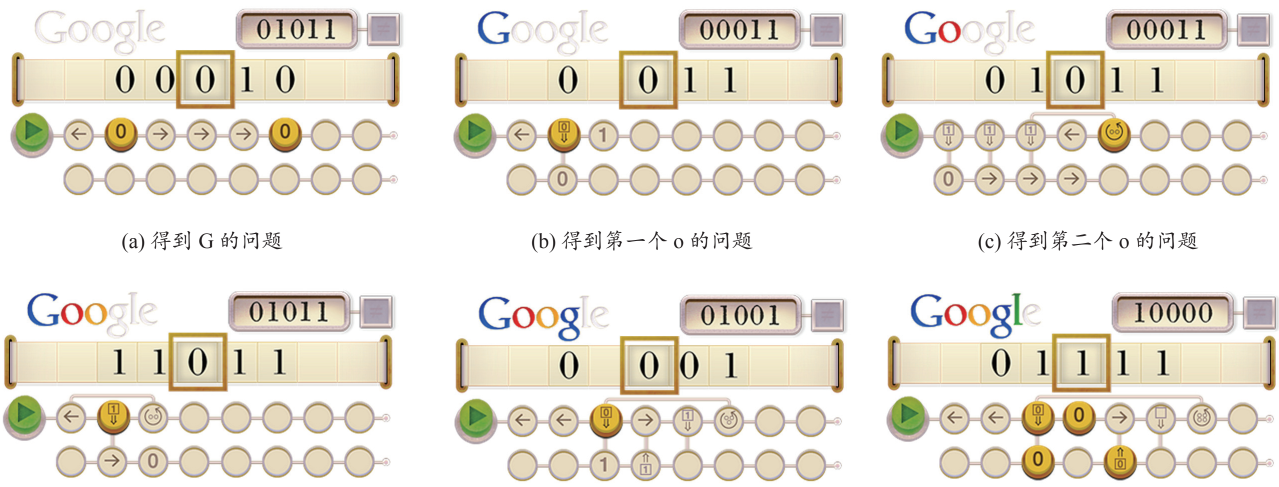


图 93 圣文森特和格林纳丁斯 2000 年发行的千禧年纪念（1900-1950 部分）邮票系列中的一张纪念图灵的邮票，背景为构筑计算机世界基础的 0 和 1

[14] 德语为"Ein Mathematiker, der nicht auch etwas Poet ist, wird nie ein vollkommener Mathematiker sein."

[15] 参考谷歌徽标档案网页上该游戏网页：http://www.google.com/doodles/alan-turings-100th-birthday。



(a) 得到 G 的问题　(b) 得到第一个 o 的问题　(c) 得到第二个 o 的问题

(d) 得到 g 的问题　(e) 得到 l 的问题　(f) 得到 e 的问题

图 94　图灵机游戏第一轮的问题

他们在决定使用这个图灵机游戏方案前，深入研究了图灵的工作，做了许多尝试。

图灵机是图灵在 1936 年，年仅 24 岁时写的一篇论文《论可计算数在判定问题中的应用》（*On computer number with an application to the Entscheidungsproblem*）中提出来的。“Entscheidungsproblem（判定问题的德文表达）”是希尔伯特在 1928 年提出来的三个问题之一。留着德语烙印的问题是当时的热点研究问题，然而，图灵解决问题所描述的图灵机以及通用图灵机却更加要紧，它们奠定了现代计算机发展的理论基础。冯 • 诺伊曼曾说：“如果不考虑巴贝奇等人早先提出的有关思想，现代计算机的概念当属阿兰 • 图灵。”

谷歌纪念图灵的涂鸦可以让我们很好地了解图灵机的原理。本文下部分附录中介绍巴贝奇的相关思想时我们再简单提及图灵机更加形式的描述，这里仅介绍游戏。游戏还使用了循环和条件语句等程序设计思想，是一个很好的智力游戏，充分体现了谷歌涂鸦设计者的水平。

游戏的起始页面是一个用图灵机进行计数的程序：用二进制码表示，从 1 开始，逐次加 1，直至用户点击涂鸦开始游戏第一关。有兴趣的读者可以考虑，在参考下文介绍的游戏指令后，作为练习写出该程序的指令。

游戏的目的是通过正确算法依次得到以 0、1 编码表示的“Google”这六个字母。在游戏中表现为依次点亮左上角的这六个字母，每个字母一个小游戏。实际游戏从简单到复杂，共两轮 12 个小游戏。为方便读者，我们用图 94 给出了第一轮游戏的 6 个问题 [16]。字母编码采用了博多码（Baudot code），共 5 位 0、1 编码。字母 g, o, l, e 对应的博多码（不分大小写）分别为 01011, 00011, 01001, 10000。涂鸦中相应字母的正确编码放在右上方。

图中央是一条被分成多个小方格的纸带，纸带上有待用指令进行修改的二进制码或待填充编码的空位。纸带上有一个方框显示当前指令作用的位置。纸带下方为指令表，用来移动方框（在游戏中表现为纸带的左右移动）或修改其中的值。游戏中已给出一组指令，深色的指令可以通过点击来改选为合适的指令，而灰色的指令不能被修改。当将指令设好后，点击绿色按钮 就开始运行指令得到一个修改后的编码。然后游逐一检查所得纸带上的各位编码是否与目标值相符（在右上角目标编码后的方框显示等号或不等号），若得到正确答案，即可进行下一关。

指令的作用可分如下几类：

1. 纸带移动：→（纸带左移一格，相当于方框右移一格），←（纸带右移一格，相当于方框左移一格）。
2. 修改纸带上的值：0和1分别表示在纸带当前空格位置写入 0 和 1。
3. 指令一般从左至右执行：若遇 ，指令继续向右执行，但若遇下列条件，则分别转向或跳转：
   (a) 条件判断指令：这样的指令带有 0 或 1 或空格三种指示值，有上、下箭头两种方向。若方框所

[16] 六个问题的参考解答分别为：1. 将两个0均改为1；2. 将指示值为 1 的条件指令改为指示值为空格的条件指令；3. 将跳转指令连到最左的条件指令，即连线跨越四个指令；4. 同 2；5. 同 2；6. 修改第二行的两个指令：将指示值为 0 的条件指令改为指示值 1 的条件指令，同时将0改为1。

在纸带上位置的值与指令的指示值相符，则执行箭头所指向的指令。例如，表示如果方框所在纸带上位置的值为 1，则执行箭头下方的命令。

(b) 跳转指令：、和等表示指令跳转至连线所指向的指令。弯箭头所包含的小圈数目表示指令最多可以跨越的指令数。

作为例子，我们解释如何用指令“← 1 →→→ 0（这里表示的简写）”将初始位置位于第三个 0 的编码“00$\boxed{0}$10”修改为表示 G 的正确编码“01011”。这里用方框将某位置围住表示当前指令位于该处。对“00$\boxed{0}$10”，依次执行“← 1 →→→ 0”这六个指令：

1. 执行“←”，指令位置左移一格，得到：0$\boxed{0}$010；
2. 执行“1”，当前位置值修改为 1，得到：0$\boxed{1}$010；
3. 执行“→”，指令位置右移一格，得到：01$\boxed{0}$10；
4. 执行“→”，指令位置右移一格，得到：010$\boxed{1}$0；
5. 执行“→”，指令位置右移一格，得到：0101$\boxed{0}$;
6. 执行“1”，当前位置值修改为 1，得到：0101$\boxed{1}$。

每一轮的六个游戏结束后，谷歌涂鸦会重新自动演示一遍全部六个小游戏是如何通过指令逐步改变纸带上的值的。在重演过程中，涂鸦右上角的小方框中会闪烁一只小兔子的图像。如果点击进去，与起始的计数程序类似，涂鸦会自动演示一个更加复杂的程序：用图灵机计算一个用 0、1 编码表示的数列。涂鸦还提供了三行指令，每行 13 个指令，一共 39 个指令。这个程序所计算的序列 1, 110,11010, 110101, 11010110, 110101101,…… 与用 0、1 编码表示的斐波那契兔子序列紧密相关。

图灵的另一重要的贡献是协助军方破译了德国著名密码系统恩尼格玛（ENIGMA），加快了二战的结束。

恩尼格玛是德国人谢尔比乌斯（Arthur Scherbius）于 1918 年创造发明的一种机械密码，使用易操作的恩尼格玛机进行加密和解密。恩尼格玛机所用的一个重要加密方式是用到了多个相连的转子。在加密前，每个转子可设置初始位置，一个转子有 26 种初始设置。一台有三个转子的恩尼格玛密码机就会拥有 26×25×26 ＝ 16 900 个组合。德国海军在战争后期还采用过 10 个转子的恩尼格玛机。法国曾经获得过该种机器，10 余年来无法解密，认为是不可破解的。英国在战后也迟迟不宣告该密码已被破解，希望自己可以应用这套加密系统。

二战中德国海军的 U 型潜艇在大西洋采用“结群战法”：当某艘潜艇发现英国舰艇后，即用无线电将经过恩尼格玛机加密的信息传递给其它潜艇，围歼敌舰。物资和武器补给受到严重威胁的英国，在 1938 年设立了英国政府代码及加密学校（Government Code and Cipher School, GCCS），总部坐落在白金汉郡的布莱切利庄园。在这里，图灵设计了被称为“图灵炸弹（Bombes）”的破译机（仿波兰人 1938 年造的“Bomba”）。这台机器主要由继电器构成，使用了 80 个电子管，由光电阅读器直接读入密码。后为提高速度，布莱切利庄园的工程师汤米 • 弗拉沃尔（Tommy Flowers）在图灵的帮助下设计了 Colossus，这实际上可以看作是最早的电子计算机之一。

图灵对密码的破译也丰富了密码学、数学和计算机科学。例如图灵曾创造了一些新的统计理论。但图灵的这些理论因没有发表而在后来被他人重新发现。统计学中重要的“序贯分析”就是图灵最早使用，后来由瓦尔德（A. Wald）重新提出。实际上，直到 1974 年温特伯坦姆写的《超级机密》(*The*

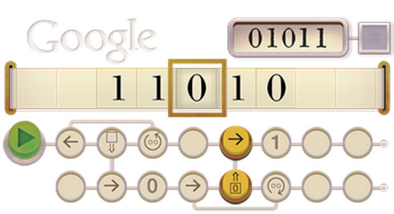


图 95 图灵机游戏第七关：计算第二轮 G 的问题

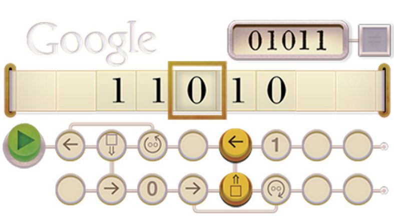


图 96 图灵机游戏第七关：计算第二轮 G 的解答

图 97 图灵机游戏第二轮计算的重演（注意右上角的小兔子）

图 98 点击“兔子”后呈现的图灵机演示程序

图 99 位于布莱切利园（Bletchley Park）的图灵雕像

图 102 图灵与恩尼格玛机（2005 年圣赫勒拿岛发行，纪念二战结束 60 周年）

Ultra Secret) 一书出版，图灵在解密方面的贡献才广为人知。

图灵对于人工智能的发展也有重要贡献。1950 年，他提出关于机器思维的问题，设计了一种用于判定机器是否具有智能的试验方法，这种方法现在称作“图灵试验（Turing Test）”。

人机对弈是人工智能领域一个重要的方向。本文的“下”部分在介绍西班牙工程师和数学家托里斯时，会提到他在 1910 年到 1914 年间设计并制造了第一台可以自动下棋的机器 EI Ajedrecista。

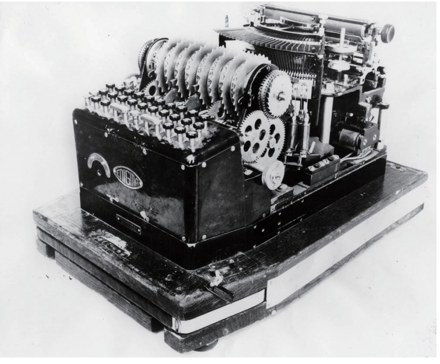


图 100 带 8 个转子的恩尼格玛机

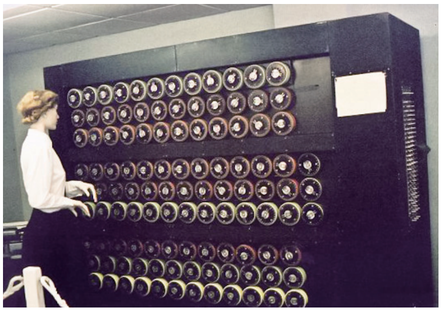


图 101 “图灵炸弹”

历史上，最轰动的人机对弈是 1996 年和 1997 年进行的两场对弈，对阵双方分别为国际象棋世界冠军卡斯帕罗夫（Gary Kasparov）与 IBM 公司的超级电脑“深蓝”。1996 年，深蓝 2–4 失利；1997 年，运算能力翻倍的“深蓝”以 3.5–2.5 的成绩获胜。

图 103 卡斯帕罗夫与图灵的国际象棋程序对弈

图 104 长跑比赛中的图灵

2012 年 6 月 25 日，在曼彻斯特大学举行的图灵诞辰 100 周年纪念大会上，卡斯帕罗夫在发表关于图灵及其“纸机器”的演讲中，表演了一场“人机对弈”。这一次卡斯帕罗夫的对手是图灵在 1952 年设计的程序。他只用 16 步就轻松击败图灵的程序。图灵在写出他的程序时并没有真正的计算机能够来执行他的程序。他只好自己模仿计算机，以每半小时一步的速度，与一位同事下了一盘，结果程序输了。

图灵在生活中也独具魅力。他热爱体育运动，是世界级马拉松长跑运动员，最好成绩 2:46:03 仅比 1948 年奥运会金牌获得者的成绩多 11 分钟。 但遗憾的是，图灵的同性恋倾向不被当时英国的法律认同，被迫接受“治疗”。不甘受辱的图灵于 1954 年 6 月 7 日在家中服用毒苹果自杀，不满 42 岁。2009 年 9 月 15 日，英国首相布朗代表英国政府正式向图灵道歉：我们非常对不起您，您应该得到比这好得多的对待。

人们没有忘记图灵。美国计算机协会（ACM）在 1966 年设立用以表彰在计算机科学方面贡献卓越者的“图灵奖”。该奖有“计算机界诺贝尔奖”之称。2012 年被计算机界定为“图灵年”，全球各地举行了一系列活动来纪念他，特别是在他生前工作和学习过的地方，如美国普林斯顿大学和英国曼彻斯特大学。作为发生在我身边的例子，2012 年一整年中，德国帕德博恩市的海恩茨 • 尼克斯多夫博物馆论坛（简称 HNF，以计算机科学为主题，包括一座计算机博物馆）就分 10 个主题，全面展出了图灵的各个方面。

23 拉齐诞辰 1147 周年

图 105 拉齐诞辰 1147 周年纪念（2012 年 8 月 26 日，巴林、阿富汗、阿尔及利亚、利比亚、阿拉伯联合酋长国、埃及、巴勒斯坦、黎巴嫩、卡塔尔、摩洛哥、约旦、突尼斯、阿曼、伊拉克、科威特、沙特阿拉伯）

拉齐（ Muhammad ibn Zakariyā Rāzī，865 年 8 月 26 日-925 年），或称拉齐斯（Rhazes）是波斯医学家、化学家、哲学家和博物学家。拉齐早年学习伊斯兰文学和数学，在数学上并无大的贡献。

医学上他著有《曼苏尔医书》和《医学集成》等经典，被誉为“阿拉伯的盖伦”、“穆斯林医学之父”。例如他发现了天花与麻疹是两种不同的疾病，最早阐明了过敏和免疫的原理，撰写了最早的儿科护理书籍。

图 106 拉齐诊治一位麻疹病人

24 比鲁尼诞辰 1039 周年

图 107 比鲁尼诞辰 1039 周年纪念（2012 年 9 月 4 日，巴林、阿富汗、利比亚、阿尔及利亚、沙特阿拉伯、阿拉伯联合酋长国、埃及、巴勒斯坦、黎巴嫩、卡塔尔、摩洛哥、约旦、突尼斯、阿曼、伊拉克和科威特）

阿布 • 拉伊汗 • 穆罕默德 • 本 • 艾哈迈德 • 比鲁尼（Abū al-Rayhān Muhammad ibn Ahmad al-Bīrūnī，英文中常被称作 Al-biruni，973 年 9 月 5 日-1048 年 12 月 13 日）是阿拉伯著名博学家。2012 年 9 月 4 日谷歌以比鲁尼仰望星空的涂鸦，纪念比鲁尼诞辰 1039 周年。

比鲁尼生于花剌子模（现乌兹别克斯坦南部的一个省份）。他毕生从事科学研究与写作，有记载的著作就有 146 部，涉及天文学、历史学、地理学、数学、力学和医学等众多科学领域。科学史学家乔治 • 萨顿（George Sarton, 1884-1956）称他为“伊斯兰最伟大的科学家之一，也是所有时代最伟大

图 108 伊朗德黑兰 Laleh 公园比鲁尼雕像

的科学家之一[17]”。

比鲁尼主要在伽色尼王朝极盛时期生活，受到穆斯林第一位有“苏丹”称号的国王马哈茂德及其儿子的庇护。伽色尼王朝幅员辽阔，马哈茂德征服的地盘包括北印度、阿富汗、花剌子模和伊朗大部分地区。马哈茂德统治时，重视学术，吸引了许多学者。

贝尔在其《数学精英》的导言中说：“就整体而言，大数学家是一些多才多艺、精力充沛、机智敏捷、对数学以外的许多事情有着浓厚兴趣的人。”比鲁尼也如前面介绍的海亚姆等许多穆斯林数学家一样，博学多才。阿拉伯文中的“哈基姆（Hakīm）”即是专指这些“智者”。

我们先举些例子来说明比鲁尼在数学之外的成就：

1. 比鲁尼的《编年史》(*Chronology*) 讲述了古代各民族的历史和纪元。
2. 发现光的传播速度快于声音。
3. 他精确地测定了 18 种矿石的密度。
4. 他是伊斯兰宗教史专家。马尔代夫盛行伊斯兰教，最早就是由比鲁尼引入的。
5. 他在《药物之书》(*Kitab As Saydalah*) 一书中介绍了药物的分类及其在医疗中的应用，包括 720 种药物的医疗作用以及它们在多种语言中的名称。
6. 比鲁尼利用跟随马哈茂德出征印度的机会，在印度居留三十年，写作《印度志》，记载了有关印度自然、社会以及地理学等方面的知识，为印度与阿拉伯之间的文化交流做了许多工作。他的书是后世研究印度历史的重要参考。他关于印度的著作也使得他被认为是最早的人类学家。
7. 比鲁尼最重要的著作之一是《天文典》(*Al Qanun Al Masudi*，英文译为 *The Canon of Al Masudi*，作为献给伽色尼苏丹 Masud 的礼物)。这是一本近 1500 页百科全书式的著作。其中他清晰地解释了月食，提出地球可能绕太阳旋转等观点。

图 109 比鲁尼诞辰一千年纪念邮票（阿富汗 1973 年发行）

比鲁尼的大多数著作是关于天文学和数学的，特别是他在应用数学方面很有影响。

为宗教服务是穆世林数学家进行研究的一个驱动力。一方面统治者鼓励穆斯林学者研究天地以寻求他们的信仰存在的证明，另一方面穆斯林宗教仪式中也有很多实际活动需要他们研究与数学密切相关的地理学、天文学等。

按照《古兰经》的要求，穆斯林每日要做五次礼拜，分别在日出前、正午后、下午时、日落前和进入夜晚。这要求穆斯林数学家和天文学家研制精准的日晷。清真寺有

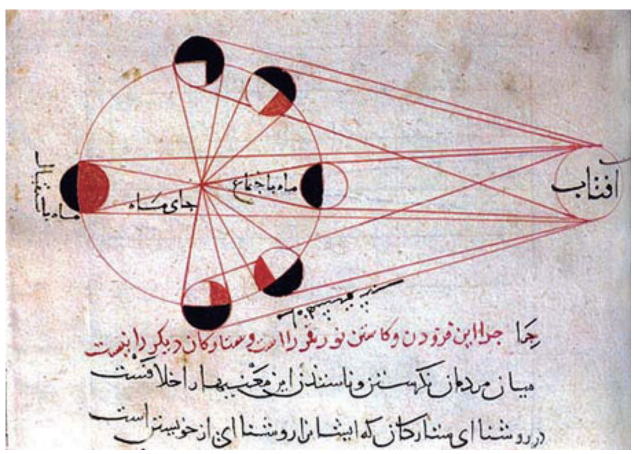


图 110 比鲁尼解释月食的手迹

[17] 原文见 George Sarton 著 *Introduction to the History of Science* 第一卷 707 页：“One of the very greatest scientists of Islam, and, all considered, one of the greatest of all times”。

(a) 突尼西亚开罗安大清真寺广场上的日晷台（Great Mosque of Kairouan, Tunisia）

(b) 开罗安大清真寺日晷台上的日晷

(c) 叙利亚大马士革倭马亚（Umayyid）大清真寺广场上的日晷柱

(d) 倭马亚大清真寺里由著名天文学家 al-Shatir（1304–1375）设计的日晷（图为 18 世纪复制品）

图 111 清真寺中的日晷

专门的司时人员，清真寺外还建有宣礼塔。每到礼拜时间，唤礼者在塔上大声呼唤。此外，穆斯林要确定斋月等圣日的起止日期，这也需要研究数学和天文学。

穆斯林朝拜要面向圣地麦加克尔白。现在每一所清真寺里都有一个凹壁（米哈拉布）指示朝拜方向（Qibla）。在早期伊斯兰世界，如何确定给定点与麦加的方位与距离，是一个至关重要的问题，历代王朝调动了许多学者来参与计算。这里需要分别计算麦加与给定点的纬度和经度，再利用球面三角知识来得出朝拜的方向。现代穆斯林信徒已经可以很方便地掌握礼拜时间和朝拜方位了，智能手机上一个小小的应用程序就可以解决问题。但在古代，这并不简单。即使是现代人，也会对朝拜方位理解错误。

1953 年 4 月 15 日，美国名报《华盛顿每日新闻》（*The Washington Daily News*）登了一篇题为《不能凭借罗盘来建清真寺》（*You Cann't Build That Mosque With a Compass*）的文章，讲述了当地居民对美国首都华盛顿一座在建清真寺的困惑[18]。这座清真寺位于华盛顿哥伦比亚特区麻州大道（Massachusetts Avenue in Washington D. C.），1954 年建立，1957 年开放。当时是西半球最大的清真寺。

在清真寺的建造过程中，一些路人（大部分为穆斯林）

[18] 可参考网页：http://www.surveyhistory.org/can't_build_a_mosque_with_a_compass.htm。

图 112 土耳其伊斯坦布尔圣索菲亚清真寺的米哈拉布

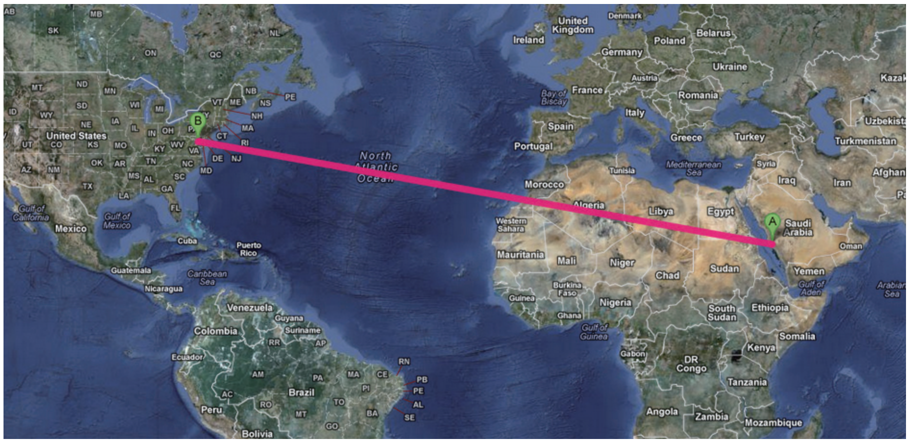


图 113 谷歌地图上从华盛顿到麦加（从左到右）

不时前来参观，其中的细心者注意到该清真寺竟然是偏北的（东偏北 56° 33' 15″），不禁开始担心起来。如同所有清真寺都要朝向麦加圣地一样，华盛顿的这座清真寺也应指向麦加圣地。然而，按照纬度，华盛顿在麦加的南方（华盛顿和麦加的纬度分别为 38° 53'，21° 25'）。在地图上，从麦加往华盛顿方向作直线，也很明显，直线应该稍朝南。

事实上，民众产生疑惑是因为他们在通常意义（墨卡托投影［Mercator projection］）下的平面地图上考虑问题。这上面两点间的直线并不是最短路径。假设地球为理想球体，则地球上两点间的最短路径为经过这两点的最短大圆弧（即以这两点及球心的三点所确定的大圆上的圆弧）。数学上，这样的路径称为测地线。找来一个地球仪，用拇指和食指分别指向这两个城市，在地球仪上比划下就可以形象地理解这一点：最短的路线，从华盛顿出发，以偏北的方向经过纽约附近，穿过北大西洋的冰山。这个道理也用在飞机和海轮的航路设计中。飞机在飞行过程以及海轮在航海过程中都需要不断变换方向，并不是一条直线。

比鲁尼的《城市方位坐标的确定》(*Tahdid, the Demarcation of the Coordinates of Cities* 或 *The Book of the Demarkation of the Limits of the Areas*）就是为了确定穆斯林礼拜朝向而作的。比鲁尼总共撰写了 15 部大地测量学著作。他将数学的精确与严谨引入地理学中，使得他成了科学地理学之父。

确定经度和纬度需要知道地球半径。虽然前人如亚历山大的埃拉托塞尼就已经知道如何利用太阳来测量地球半径的方法[19]，但比鲁尼的方法不像埃拉托塞尼那样依赖地理位置，而且很精密，所得出的地球半径值 6339.6 千米与我们现在所知数值非常接近[20]。

比鲁尼的方法很巧妙。他首先选定某坐山，测出其高 h。然后登到山顶，测出远望地平线的俯角 θ。由三角学知识就可以算出地球半径

$$r=\frac{h\cos\theta}{1-\cos\theta}.$$

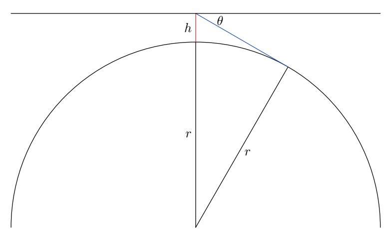


图 114 比鲁尼测量地球半径方法示意图

比鲁尼用一种称为星盘（Astrolabe）的工具来测量角度。他测量山高的方法也是通过该工具测量两次仰角，应用三角学知识得到的：如图 115 所示，先定已知距离为 d 的两点，分别测量其仰望山顶的仰角 α,β，则山高为

$$h=\frac{d\tan\alpha\tan\beta}{\tan\beta-\tan\alpha}.$$

关于山高的测量，我国三国时代刘徽所著的《海岛

[19] 参考作者的《亚历山大城的希帕蒂娅》，《数学文化》第 3 卷第 1 期，2012。
[20] 赤道半径 6378.140 千米，极半径 6356.755 千米，平均半径 6371.004 千米。

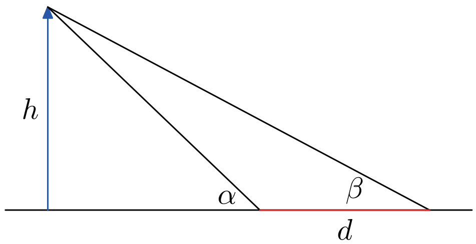


图 115 比鲁尼测量山高方法示意图

算经》中就有望海岛一问。刘徽所用方法和比鲁尼的有些类似，只是《海岛算经》中利用了所立的两个“表”（柱子）进行观测，利用表高、表距等已知量用相似比来计算。

虽然测量方法出奇地简单，但要精确测量也非易事。首先，比鲁尼要选择一个高地以有一定的角度俯视地平线。他选取的山是现今巴基斯坦旁遮普省杰赫勒姆（Jhelum）地区的 Nandana 要塞的一座高山。其次，比鲁尼的方法有赖于角度的精确测量。一般而言，θ 很小，若用弧度表示 θ，则 $\cos\theta$ 近似为 $1-1/2\theta^2$，因此地球半径 R 近似为 $2h/\theta$。由此可见，θ 的微小误差会引起所得结果的精确性。

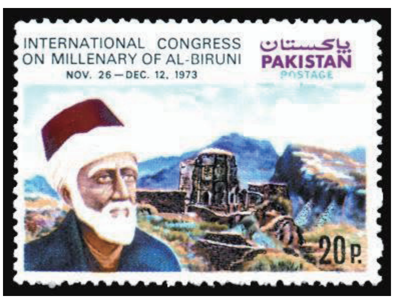
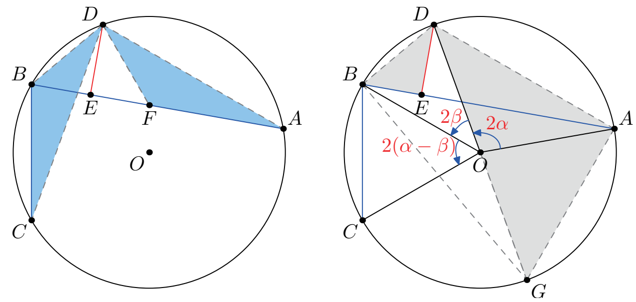


图 116 巴基斯坦 1973 年发行的邮票（背景为比鲁尼测量地球半径所登高山）

我们从比鲁尼测量山高和地球半径的方法可以看到，穆斯林数学家已经能非常熟练地应用三角函数了。确实，阿拉伯人在三角学方面贡献甚大。例如，比鲁尼在他所作《天文典》中研究了圆内接多边形的长、倍角正弦公式、球面三角学的正弦定理以及三角函数的插值法等。

作为一个例子，我们介绍比鲁尼的一本论述圆中弦



(a) 折弦定理及一个证明示意 (b) 折弦定理蕴含两角差的正弦公式

图 117 折弦定理及其推论

的著作里所记载的一个简单而又有趣的定理。这个定理被称为折弦定理（Theorem of Broken Chord）。虽然比鲁尼将它归于阿基米德名下，但该定理实际上等价于两角差的正弦公式，进而可以用之于三角函数表的编制等，因此可以从中了解比鲁尼的兴趣。

折弦定理 [21]：如图 117(a) 所示，设有圆中弦 $AB > BC$，D 为 $\overset{\frown}{AC}$ 弧的中点，且 DE 垂直于 BC，则 $BC + BE = AE$。

折弦定理与两角之差的正弦公式的联系也不难。如图 116（b）所示，设圆半径为 1，圆心为 O，$\angle AOD = 2\alpha$，$\angle BOD = 2\beta$。我们有 $\angle BOC = 2(\alpha-\beta)$。由折弦定理，我们知道 $BC = AE - BE$。另一方面我们知道弦长与三角函数密切相关，有 $BC = 2\sin(\alpha-\beta)$；再注意到 AE、BE 可分别用弦长从而用三角函数表示便可以得到折弦定理的等价表示 [22]：

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta.$$

此即两角差的正弦公式。

有两座以比鲁尼的名字命名的大学：一是乌兹别克斯坦的国立塔什干理工大学（英文名称为 Tashkent State Technical University Named after A.R.Beruni），二是阿富汗卡比萨省于 2000 年成立的比鲁尼大学（Al-Beroni University）。我们将另文简介世界上以数学家的名字命名的大学。

德国比勒费尔德和知屋

2013 年 4 月 10 日

[21] 一个供参考的证明提示：先在 AB 上取点 F，使得 $BC = FA$，再证明 $\triangle BCD$ 与 $\triangle FAD$ 全等。因此 $BD = FD$。由此立即可得 $BE = EF$。

[22] 设 G 为 D 关于圆心的对称点，易知 $\triangle DEB$、$\triangle AED$ 分别与 $\triangle DAG$、$\triangle GBD$ 相似，这样我们有：$AE = AD\cdot BG/DG$，$BE = AD\cdot BG/DG$。最后将 $DG = 2$，$AD = 2\sin\alpha$，$BD = 2\sin\beta$，$BG = 2\cos\beta$，$AG = 2\cos\alpha$ 代入即可得证。