张家山汉简《算数书》“圜材”三题

吴朝阳　晋文

张家山汉简《算数书》与“圜材”相关的共有“圜材”、“以圜材方”、“以方材圜”三个算题。“圜材”算题因为出土原简字迹难辨之处太多，造成原释文中有许多缺文，至今没有令人满意的释读，而“以圜材方”及“以方材圜”二题，则因为题中的公式与单纯的数学公式不一致，导致学者们意见纷纭、莫衷一是。本文首先将“圜材”原简字迹难辨处加以处理，从中得到关键线索，并考证出正确的释读。对“以圜材方”及“以方材圜”两个算题，我们则根据上古数学水平、算题的应用实际性质以及《算数书》中的例证展开论证，从而得到正确的释读。

一　“圜材”

张家山汉简《算数书》的“圜材”题共含 156、158 号两支简，张家山二四七号汉墓竹简整理小组的释文为：

圜（圜）材　有圜材一（?），断之口口市口口口口口口口大几何？曰：七（?）十（?）六（?）口口四寸半寸。述（术）曰：口自乘，以（156）

入二寸益之，即大数已[1]。（158）

由于很多文字无法释读，本题诸家均无法读通[2]。笔者对原简图版进行一定程度的技术处理，使一些关键字得以读出，部分图版处理结果如下[3]：


图 1：有圜材一

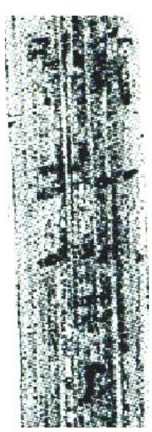


图 2：斲之入二寸


图 3：平尺四寸


图 4：曰大二尺有


图 5：六寸半寸

从图 1 可知，“圜材”之后还有余地，并有墨迹，因此，原释文“一”字可取。从图 2 可以看到，原释文“断之口口市”是成问题的，对比“斷”字的隶书写法可以发现，此段竹简的第一个字左上有二小“口”字形，其形比“斷”之小“口”明显要大，而其下既没有“斷”字那么多笔划的墨迹，最左侧并无“斷”字之“∟”形之残墨，空间也不足以容纳“斷”字的左下部。因此这个字不是“断”字，而应该是“斲”字。综合字迹及图 2 其他简文可以发现此字确为“斲”字，而此段简文为“斲之入二寸”。

“斲”与“断”一字之差，关系到全题的理解与释读。岳麓书院藏秦简《数》书以及《九章算术 • 勾股》都有“斲圜材”的算题，其文援引如下：

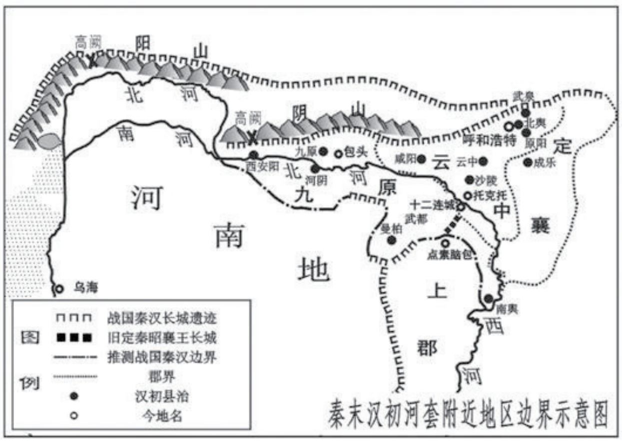
[今] 有圆材薶 [埋] 地，不智 [知] 小大，斫之，入材一寸而得平一尺，问材周大几（可）[何]? 即曰：半平得五寸，令相乘也，以深一寸为法，如法得一寸。有 [又] 以深益之，即材径也[4]。

[1] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简 [二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006 年 5 月，第 153 页。按：整理小组误将 157 号简归入此题，为简化讨论，此处径略去此简。

[2] 参见：彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001 年，第 113 页；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001 年第 3 期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001 年第 3 期。

[3] 原图片参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：前揭书，第 96 页 156 号简。

[4] 简文转引自：肖灿、朱汉民：《岳麓书院藏秦简〈数〉的主要内容及历史价值》，《中国史研究》，2009 年第 3 期。



今有圆材，埋在壁中，不知大小。以锯锯之，深一寸，锯道长一尺。问径几何？答曰：材径二尺六寸。术曰：半锯道自乘，如深寸而一，以深寸增之，即材径[5]。

张家山汉简《算数书》本算题所论是“圜材”，简文有“斲之入二寸”句，并且“而得”、“问□大几何”、“寸自乘”、以及“入二寸益之”都可以明确释读，在简文中又都处于合适的位置。因此，对比以引岳麓秦简《数》及《九章算术》中的算题，本题毫无疑问是一个同类的“斲圜材”算题。因此，算题中无法确认的文字可以借助这两则算题的行文方式来做判断。

图 3 所示竹简片段第一字无法辨认，第二字的位置依上下文及墨迹形状应是“尺”字，第三字据文义是一个数字，依墨迹形状判断应为“六”或者“四”字，而最后一字依文义及残墨则可以肯定为“寸”字。此段竹简之前有“而得”二字，其中“而”字可辨，“得”字依上下文可以断定。对照岳麓书院藏秦简《数》书相应内容，可以判断此四字为“平尺四寸”或“平尺六寸”。

图 4、图 5 两部分，原释文为“曰七（?）十（?）六（?）”及“□□四寸半寸”。据图 5，“寸半寸”可辨，而前一字依残墨判断，或者如原释文是“四”字，或者是“六”字。图 4 除“曰”字外均不可辨，但依上下文知其为“曰大□尺□”。考虑图 5 简文是“□寸半寸”，而“尺”后面的字残墨之迹与“有”近似，故依行文此字应为“有 [又]”字。至此，据计算可知，此答数为“二尺有六寸半寸”，而图 3 则为“平尺四寸”。

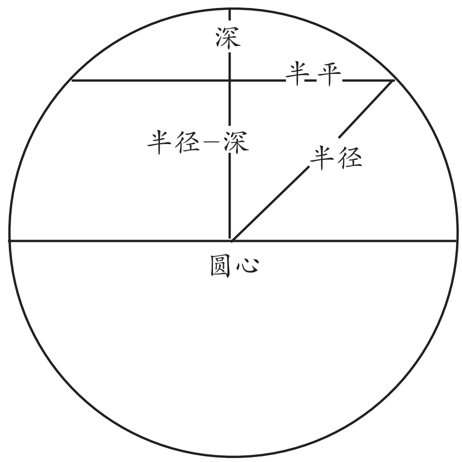
[5] 参见：李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998 年 9 月，第 695-697 页。

对照上引岳麓秦简“术”的行文，可知 158 号简脱漏“为法，又以入二寸”七个字。因为“入二寸”在我们复原的简文中出现两次，所以这一脱误的原因是明显的：它是因为简文上下有两处“入二寸”，抄写者不慎相涉而产生脱误。至此，我们得到复原的简文如下：

睘材　有圜〖材〗一，斫之入二寸，而得〖平尺四〗寸，问〖材〗大几何？曰：大〖二尺有六〗寸半寸。述 [术] 曰：〖七〗寸自乘，以（156）

入二寸【为法，又以入二寸】益之，即大数已。（158）

此处，158 简中的“大”即问题中的“材大”，“大数”即为圆材直径之尺寸数。《九章算术》将此类算题归入“勾股”章，其计算公式由勾股定理推导而得，其推导过程如下：



如上图，（半径－深）、半平、半径构成直角三角形，据勾股定理得：

（半径－深）×（半径－深）＋半平 × 半平＝半径 × 半径

展开、化简，得：

2 深 × 半径＝半平 × 半平＋深 × 深

因此，

直径＝半平 × 半平 / 深＋深

本题、上引岳麓秦简、《九章算术》三者算法的叙述方式相互均有所不同，但它们都是以上这个公式。按照这个公式，本题的计算如下：

$$圆材的直径=\frac{7\times7}{2}+2=26\frac{1}{2}。$$

二 “以睘材方”

张家山汉简《算数书》“以睘材方”及“以方材睘”两个算题，由于其“术”提供的公式不同于从数学出发而推得的所谓正确的公式，因而历来研究者要么认为其公式有误，要么认为其数据有误[6]。然而事实并非如此，我们将证明：这两个算题中的公式不是纯数学公式，它们是根据生产实际，测算以圆形木材制造的方形材大小的应用公式。本小节先讨论“以睘材方”算题，其简文如下：

以睘材方　以圜材为方材，曰：大四韦[围]二寸廿五分寸十四，为方材几何？曰：方七寸五分寸三。术曰：因而五之为实，令七而一，四（153）
【而】一即成[7]。（157）

原释文“以睘材方”只有153号简，此算法，即“术”文显然是不完整的，苏意雯等、段耀勇及邹大海、以及日本张家山《算数书》研究会诸专家认为应补以“而一”[8]二字。这种校补句法通顺而又与答数相符，文义完整而合理。然而据图版[9]可知，本题竹简即153号简，其简文至“四”字已抵竹简下端编线，可见此处“术”不是缺文，而是缺少后续的一支竹简。153号简出土编号为H103，而157号简的出土编号为H102，二简出土编号既相连，而出土位置也确实相邻。由于157号简的全部简文为“一即成”，内容与153号简内容相接。而如上节所论，157号简不属于“睘材”题，因此我们确定157号简是153号的续简，两简简文之间误脱一个“而”字。所以，我们将157号简列于此简之后，并以脱误例校补“【而】”字。

简文中“韦”借为“围”，古以“径尺为围”，这里的“围”实际上等于“尺”。因此“大四围二寸廿五分寸十四”的意思是“圜材”周长为$42\frac{14}{25}$寸。据“术”文计算，“方材”的边长为：$42\frac{14}{25}\times5\div7\div4=\frac{38}{5}=7\frac{3}{5}$，正与答案相符。因此，我们认为本题算法与答案的简文都没有问题。上引诸家中彭浩、郭世荣、郭书春认为本题有误，并各以己意解读、校改，我们与段耀勇、邹大海一样，认为他们都不正确。

本题之前《算数书》的所有60个算题中，虽然存在一定数量的脱文、衍文以及传抄错误，但是由于错误的“术”而产生错误答案的仅有“妇织”一个算题，而“妇织”问题性质上属于“趣味数学”而非“实用数学”[10]。也就是说，《算数书》中的实用算题的算法都是正确的。因此，从统计的角度看，本题的“术”也就很不可能是错误的。

而本题的“术”文算法与答案相符，而且对应于本题的“四而一”，后文所论“以方材睘”题中的算法中也相应地是“因而四之”。可见，本题的“术”文及答案肯定都没有问题。

古人“圆用规，方用矩”，因此圆内接正方形与圆的关系古人显然是清楚的，上引“睘材”则证明勾股定理在秦代也是人所熟知的知识，而从张家山汉简《算数书》的“方田”题及《九章算术》可知：古人在对形如$N=a^2+r$的自然数开平方时，常用$\sqrt{N}\approx a+\frac{r}{2a+1}$为近似公式[11]。

[6] 参见彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第110-111页；苏意雯、苏俊鸿、苏惠玉等：《〈算数书〉校勘》，台湾师大《HPM通讯》第三卷，2000年第10期；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期。段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以睘材方”、“以方材睘”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期；日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第12-13页。

[7] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第152、153页。按：释文据我们所批评的错误理解为基础而校改，此只引原简文。

[8] 参见前注所引诸文，为避繁琐，此后引以上诸文从略。

[9] 本简图版见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]》，文物出版社，2001年11月，第95页；出土位置编号及位置图见第318及322页。

[10] 参见彭浩：前揭书。

[11] 参见彭浩：前揭书，第125页注2；李继闵：《〈九章算术〉导读与译注》，陕西科学技术出版社，1998年9月，第388页。

据这个公式计算，则$\sqrt{5^2+5^2}=\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}\approx 7\frac{1}{15}$，因此，边长为 5 的正方形之斜边边长略大于 7，可见《孙子算经》所谓“见邪求方，五之，七而一[12]”是古已有之的近似公式。此外，从张家山汉简《算数书》中的“困盖”、“睘亭”、“井材”等算题可知[13]，“径一周三”，即圆周率约等于三也是当时众所周知之事。邹大海先生在深入研究传世文献及秦简之后，得出的结论说：“《九章》的主体算法在先秦已经用到[14]”，“先秦必然用到了汉《九章》所达到的那种高水平的数学知识[15]”，这些结论也从宏观上支持我们的看法。因此，我们可以肯定：$\sqrt{2}\approx 7/5$ 以及 $\pi\approx 3$ 在秦代是一件广为人知的事实。所以，如果应用“见邪求方，五之，七而一”，则“以圜材为方材”的公式应是：

圜材周长×5÷7÷ 圆周率。

若再以“径一周三”替换以上公式中的圆周率，则公式变成：

圜材周长×5÷7÷3。

也就是说，本题“术”文的最后一句似乎应该是“三而一”而不是“四而一”。然而，我们前面已论证本题的算法与算题所给的答数相符，因而是不可能出错的，因此，“术”文的“四而一”不是源于错误的数学知识，而是另有原因。

事实上圆周率是略大于三的，很多迹象都表明古人知道这一事实。如果算法是“三而一”，那么除数小了，算出来的内接正方形的边长就会比实际可能的尺寸大，加上“五之，七而一”的近似，由$\dfrac{\sqrt{2}\times\pi}{\frac{7}{5}\times 3}\approx 1.058$可知，依“径一周三”计算出的答案比实际数字会大出 6%，可见，实际应用中不能以“五之，七而一”以及“三而一”来计算从“圜材”可能得到的“方材”的边长，也就是说于实际问题而言，“三而一”是不可行的。另一方面，本题是一个实用问题，实际的“圜材”可能不那么圆，其尾部直径也必须略小，甚至木材表层可能质地不堪使用，因而计算可得到的“方材”直径时，留有余量的估算是现实问题的需要。本算题简文明确说“以圜材为方材”，这是极其值得重视的！这句简文说明“以圜为方”的简

[12] 佚名：《孙子算经》，文渊阁《四库全书》电子版，卷上。
[13] 参见彭浩：前揭书，第 107-110 页。
[14] 邹大海：《中国数学的兴起与先秦数学》，河北科学技术出版社，2001 年 9 月，第 434 页。详细论证请参看该书第四、五章。
[15] 邹大海：《睡虎地秦简与先秦数学》，中国科学技术史学会第六届代表大会论文，2000 年 8 月。

端题名只是本问题名称的略称，本算题所讨论的是“圜材”及“方材”，而不是“圜”和“方”，也就是说，本算题是实际应用题而不是纯数学问题。如上所论，以“三而一”来计算方材边长是脱离实际的，可见采用“四而一”的计算公式正是留有余量的边长估算法，而不是数学错误。此前诸专家未见及此，不恰当地将这个算题等同于“已知圆周长，求其内接正方形的边长”这样单纯的数学问题，这正是他们认为本算题有错误的原因。

总而言之，古人既已知圆周率大约为3，算题中却使用“四而一”进行计算，而计算公式与答数又完全相符，可见其中的“四而一”是因其为“以圜材为方材”的应用算题而给出的留有余量的估算式。日本张家山《算数书》研究会诸专家虽然没有详细论证，但同样认定“四而一”是实际操作留出余量的计算方法[16]。此外，从各种出土秦简可以发现，秦人在基层实行严密而高度数量化的管理，因此我们进一步认为，“以圜材为方材”问题中“四而一”的计算方式并非是随意的，应有相当于“程”的官方规定为依据。

三 “以方材圜”

关于“以圜材方”算题的校释中，专家主要是认为计算公式有失误或抄误，或者认为算题中的数据有误，总之被认为的错误在一定程度上还不算严重。“以方材圜”算题则不同，很多专家认为这个算题的算法是从根本上就错了。这些专家认为本题的算法把“以方材圜”作为“以圜材方”的逆问题是一个根本性错误，事实上却是他们错误理解了这个算题。我们先来看看这个算题的简文：

以方材圜　以方为圜，曰：材方七寸五分寸三，为圜材几何？曰：四韦[围]二寸廿五分十四。•术曰：方材之一面即（154）

圜材之径也，因而四之，【七之】以为实，令五而成一[17]。（155）

简文中的“曰材”二字，段耀勇、邹大海校改为“材曰[18]”，并以“材”属上句，构成“圜材”一词。我们认为与下文对照，可知此处“材”字即是“方材”，因其后有“方”字而将“方材”省称为“材”，故保留原简文为妥。此外，本题“术”文中“方材之一面即圜材之径也”一句看似难以读通。然而“径”通“经”，“横度之名也[19]”，这种意义虽与“径”的原意相近，但依上下文应理解为“横截面”。因此，我们认为此句即是解释“方材之一面”与“圜材”截面的关系。

对比问题的已知条件中的数据、答案以及“术”即算法的行文，本题确实是把“以方材圜”作为“以圜材方”问题的逆问题，依“以圜材方”题的算法，可知原简误脱“七之”二字，故校补如上。依校补后的算法，本题具体计算为：圜材之径 $=7\dfrac{3}{5}\times4\times\dfrac{7}{5}=42\dfrac{14}{25}$，由已知条件中的数据，根据算法计算的结果与算题中的答案完全相符。

如上所说，本题从算法来看是“以圜材方”题的逆问题[20]。我们在上节已经论证，“以圜材方”是“以圜材为方材”的实用算题而不是单纯的数学问题，其中“四而一”的算法源于为实际可操作性而设的加工余量。也就是说，“以圜材方”问题是“已知圆材周长，求由其所割削而得的方材的边长”这样一个应用问题。本题既是“以圜材方”的逆问题，则是一个“已知所得方材的边长，求所需圆材的周长”的实用算题。

然而，国内各专家既认为“以圜材方”题是“已知圆周长，求其内接正方形的边长”的纯数学算题，本题就被相应地理解为“已知正方形的边长，求其内切圆的周长”的问题。由于这样的问题不是“以圜材方”的逆问题，因而彭浩、郭世荣、郭书春、段耀勇及邹大海[21]等专家都认为这个问题的算法是错的，并给出了各自不同的校改方案。

我们认为，以《算数书》会在这样一个实际应用问题上有算法错误是一种脱离实际的想当然。从整部《算数书》看，它是秦、汉低层官吏在实际管理中遭遇数学问题时的参考书，其问题基本上全部都是现实生活中的问题。就“以圜材方”题而言，其在计算由圆材割取方

[16] 参见日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第12页注5。
[17] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006年5月，第153页。按：释文据我们所批评的错误理解为基础而校改，此只引原简文。
[18] 段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以圜材方”、“以方材圜”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期。
[19] 参见宗福邦等编：《故训汇纂》，商务印书馆，2003年7月，第750页“径”字条第32义项。
[20] 日本张家山《算数书》研究会诸专家也认定本题是“以圜材方”题的逆问题，但对其正确性未作论证。参见日本张家山《算数书》研究会：《张家山汉墓〈算数书〉译注稿（4）》，第13-14页。
[21] 参见彭浩：《张家山汉简〈算数书〉注释》，科学出版社，2001年，第111-113页；郭世荣：《〈算数书〉勘误》，《内蒙古大学学报（自然科学版）》，2001年第3期；郭书春：《〈算数书〉校勘》，《中国科技史料》，2001年第3期；段耀勇、邹大海：《〈算数书〉中“以圜材方”、“以方材圜”两问校证》，《自然科学史研究》，2003年第2期。

材时留有余量的做法，显然是实际算题的需要。因此，倘若本题算法错误，它早应由实践得到更正。再者，“材”之本义及最常用词义都是“木材”，以木材而论，将“圜材”加工成“方材”是现实生活中常有之事，反之上古原木于官方极为易得，又有多少官吏需要将“方材”加工成“圜材”呢？所以，作为实用算题，本题只能是官吏在其现实管理中需要的应用题：某工程需要某种大小的方材，那么官方应该发给工匠什么规格的圆材？

既然本题是“以圜材方”问题的逆问题，那么问题所求应该是“（留有余量的前提下）正方形外接圆的周长”，国内诸专家认定此题讲的是“内切圆”而不是“外接圆”，除了不理解“以圜材方”题中“四而一”是留有余量的做法之外，还因为他们对本题“为圜材几何”这一问句中的“为”字的理解。单凭文句理解，“以方材为圜材”句中的“为”字似乎应训“作”，因而文句自然以“从方材获取内切圆材”的解释为妥。然而，这种理解缺乏对本题、本句作结合实际的综合分析，与我们以上的论证相抵触，因而并不可靠。“为”字自古多义，此处亦未必训“作”。

事实上，古文中的“为”字除训“作”之外，尚可训“用”、训“谓”、训“曰”、训“于”、训“如”[22]等等，因此，综合考虑我们以上的讨论，本题“为圜材几何”问句中的“为”字不必训为“作”，其意思或应近于“用”、“需要”。对“为”字作近似于此的训解，在张家山汉简《算数书》中就可以找到例子。《算数书》“程禾”题说“禾黍一石为粟十六斗泰半斗，舂之为粝米一石”，而“米求粟”题说“今有米七分升六，当为粟几何[23]”，这两段文字虽然说的都是“粟”、“米”的换算，但其中“为”字的意思和用法却不相同。“程禾”题说“为粝米一石”时明确说“舂之”，所以其“为”字与“以圜材方”题“以圜材为方材”一句中的“为”字用法相同。然而“粟”可以舂为“米”，“米”却不能做成“粟”，因此“米求粟”算题的题名及其“当为粟几何”句中，“为”字的意思近于“需要”，实则可以简单地解释为“换算”。“为”字在“当为粟几何”句中的这种用法，与“为圜材几何”句正可相比拟。可见，“以方材圜”正是“以圜材方”算题的逆问题，两个算题中的“为”字可以有不同解释，情形正与“粟”、“米”换算问题相似。事实上，秦、汉间“粟”与“米”间的算题全部可以看成按比率换算[24]，相似地，“以圜材方”与“以方材圜”二题也正可看成是“圜材”、“方材”间的“换算”问题。

总之，综合我们在“以圜材方”及“以方材圜”题中的论证，结论是很清楚的：“以方材圜”算题是根据目标“方材”的大小计算所需“圜材”大小的实际问题，它正是“以圜材方”算题的逆算题，本题除了误脱“七之”二字外，其问题、算法及答案都没有错误。“以圜材方”及“以方材圜”两个算题的算法都是正确的，它们是根据留有余量规定而建立的实际应用公式。

[22] 参见宗福邦等编：前揭书，第 1386-1388 页“为”字条。

[23] 参见：张家山二四七号汉墓竹简整理小组：《张家山汉墓竹简[二四七号墓]（释文修订本）》，文物出版社，2006 年 5 月，第 144 页、147 页。

[24] 按：秦、汉时期粟、米换算比率为 50 : 30，这个比率见于张家山汉简《算数书》、岳麓书院藏秦简《数》及《九章算术》等出土和传世文献。

作者简介：吴朝阳，中国科学技术大学数学系应用数学硕士；美国 Louisiana State University 数学硕士，计算机硕士，数学博士；南京师范大学历史学博士；现于南京大学数学系任教。