重心（Barycentric）坐标的一个妙用

万精油

上期的趣味数学题目是用两个不同容量的容器分酒。为便于描述，我们把上次的题目再重复一下。

上期题目：一个能装 14 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 11 两，一个能装 5 两。这些容器都没有刻度，现要求你用这三个容器把酒分成均等两份。

这是一道经典题目。这个题目不麻烦，相信许多喜欢数学问题的人都碰到过。只是容器的容量不同。对于小一点容量数目，可以多试几次就得出答案。但如果要找对任意数目的通解，我们就要用到更系统的方法。

先看一下对具体数目的解。解题过程可用下面的矩阵表示，第一行是瓶子的容量，后面是每一步时每个瓶子里的酒的数量。刚开始两个小瓶是空的，所以状态是（0 0 14）。第二步（0 11 3）就是把酒从 14 两的瓶里倒进 11 两的瓶里，大瓶里还剩 3 两。其它以此类推，

5	11	14
0	0	14
0	11	3
5	6	3
0	6	8
5	1	8
0	1	13
1	0	13
1	11	2
5	7	2
0	7	7

最后的结果是（0 7 7）。均分 14 两，问题得解。

这个问题我们把它简称为（5, 11, 14）问题。对于（19, 23, 40）问题，步骤就要多很多。如果再加大到（29, 37, 60），没解出题以前已经倒晕了。

更一般的情况：一个能装 X 两酒的容器装满了酒。另有两个容器，一个能装 Y 两，一个能装 Z 两。$X > Y > Z$。这些容器都没有刻度，现要求你用这三个容器把酒分成均等两份。

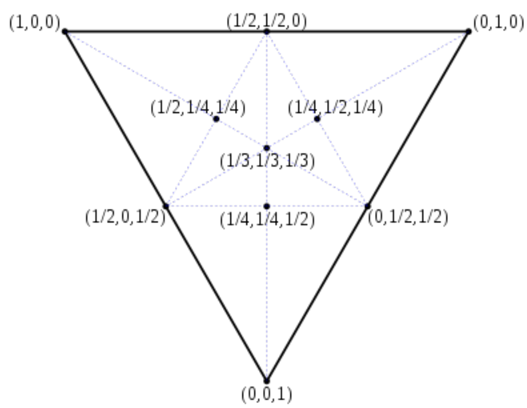
对于大一点的数，我们不能盲目地瞎倒，必须要有一般的解法。需要设计一个固定步骤，只需遵循这个步骤就可以找到解（或证明解不存在）。

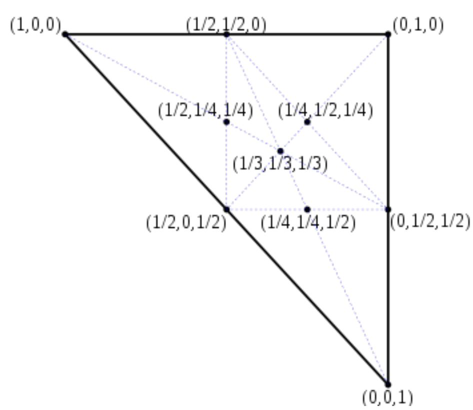
古老的重心（Barycentric）坐标系统闪亮登场。

重心坐标系统是莫比乌斯 1827 年引入的，近代数学甚至把这个重心坐标概念推广到代数几何簇的仿射坐标里。以前学到重心坐标，总觉得是数学家头脑里想象出来的玩意，不会有太多现实意义。后来在工作中需要写一个 N 维空间中的插值程序，竟然很自然地用到了重心坐标，又一次为纯数学研究正了名。重心坐标的奇妙还不仅于此，对我们眼下的

这个分酒题目也可以派上用场。这个古典的大瓶小瓶分液体问题，以前不知做过多少次，每次都是硬试。但如果用重心坐标，就可以得到通解。

先讲一下重心坐标。重心坐标的定义本来适用于任意 N 边形。但对于我们解这道题来说，只需用到三角形，所以我们只讲它在三角形上的定义。一般情况下的定义可以类推。三角形上的重心坐标也叫面积坐标。因为对于三角形 ABC 来说，点 P 的重心坐标与三角形 PBC，PCA，PAB 的面积成比例。如果我们限制坐标和为 1，那么对任意一点 P，这个比例就唯一确定了三个数，它们就是 P 的重心坐标。如图：



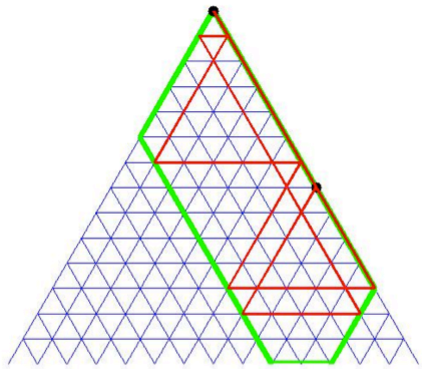


对于我们这道题，为了方便，我们不限定坐标和为 1，而是只保持其比例部分。这样一来，我们可以只与整数打交道。具体说起来就是，在一个等边三角形里作平行于每条边的平行线。在（5, 11, 14）问题里，最大的瓶子容量是 14，我们就作 14 条平行线（包括边线本身）。这样一来，三角形就被分成许多格点。一个点的三个坐标就是那个点到三条边的距离（在这个题里表示酒瓶里所剩酒的数量）。最后，以每个瓶子的容量线为边界作一个多边形（下图中的绿线）。

如何用这个图来解决我们的问题呢？我们可以把这个多边形想象成一个台球桌。从起点开始，让一个球沿坐标线跑（相当于台球在边界上做弹性碰撞）。这样一直跑下去，如果碰到平分点（0, 7, 7）点，那个路径就是解，如果没碰到平分点就开始循环，说明没有解。

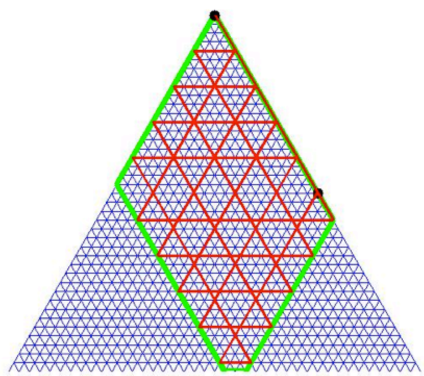
注意到从起始点可以有两个方向出发，所以有解的话就有两种解。当然，我们选择比较短的那个。下面的两个图就是用这个方法解题的示意图。蓝线是坐标线，绿线是边界，红线是跑的轨迹。上方的顶点是起始点。另一个粗红点是终点（解）。旁边是对应的步骤。

（5, 11, 14）问题



0	0	14
11	0	3
6	5	3
6	0	8
1	5	8
1	0	13
0	1	13
11	1	2
7	5	2
7	0	7

（19, 23, 40）问题



0	0	40
23	0	17
4	19	17
4	0	36
0	4	36
23	4	13
8	19	13
8	0	32
0	8	32
23	8	9
12	19	9
12	0	28
0	12	28
23	12	5
16	19	5
16	0	24
0	16	24
23	16	1
20	19	1
20	0	20

有了这个方法，对任意 3 个数的组合，我们都可以不用动脑筋，只需让这个台球从起点开始做弹性运动，自然就把解找出来了。因为瓶子都没有刻度，所以倒酒只能倒满（或者把一个瓶子倒空），所以，所有的解都只能是这种弹性运动产生的。如果这个弹性运动没有产生解，那么就证明了解不存在。

（29, 37, 60）问题如果画出图来就线路太密，快成分形了，我们就不附图了。

古老的重心坐标系统竟然在这个趣味题上找到应用，数学的神秘再次让我们叹服。

本期题目：2001 年纽约时报有篇报导的标题是《为什么数学家们突然开始关心他们帽子的颜色？》。文章说最近一个有趣的关于帽子颜色的题目在各大学数学家之间广为流传。这个题目如何有趣，牵涉到什么数学理论，我们下期的文章会讲到，这期先把题目发出来。

帽子的颜色问题：三个人头顶上都被戴上一顶帽子。帽子的颜色是蓝色或红色，完全独立随机。每个人可以看见别人的帽子，但看不见自己的帽子。每个人可以有两种选择：猜自己帽子的颜色，或者放弃（就是不猜）。每个人把自己的决定写在一张纸上。如果最后的结果是至少一人猜对而且没人猜错，那么他们可以得到一笔巨额奖金。我们的问题是，他们用什么策略才能最大地提高得奖的概率。

本期题目注解

注 1：他们可以事先讨论一个策略，戴上帽子后就不能有任何形式的交流。

注 2：如果每个人都随机地猜，他们成功的可能性只有 1/8。他们能有办法保证有大于 1/2 的胜率吗？

注 3：这个问题可以推广到多个人，人越多胜率越大，甚至可以逼近于 1。当然，这要用到较深的计算与数学理论，下期文章会讲到。