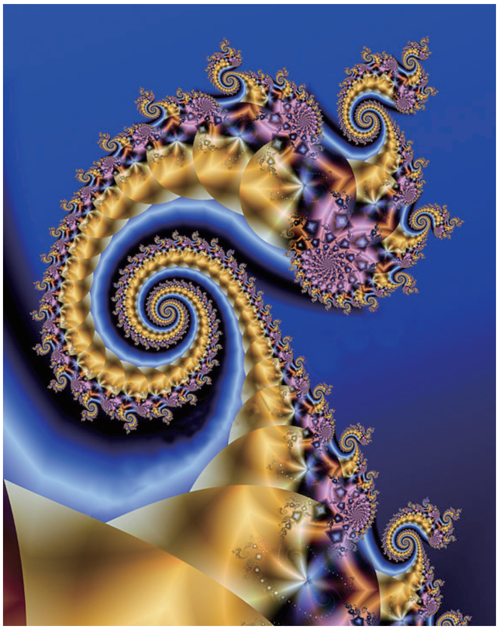


分形——故事之外

陈关荣

今天，“分形”的意思、其解析理论及计算方法在数学、自然科学和工程技术领域里可以说是家喻户晓，因而在这里无需多费笔墨来加以定义和描述。然而，漂亮的分形到底有什么实用价值，特别是在电子技术中有什么可能的应用，也许需要举几个例子来加以诠释。

从分形故事说起

二十世纪六十年代，当时在美国 IBM Thomas J. Watson Research Center 工作的波兰出生法国裔数学家本华 • 曼德波罗（Bernoit B. Mandelbrot, 1924-2010）探讨了“英国的海岸线有多长”这个有趣的问题。他注意到，如果用公里作为测量单位，从几米到几十米的一些曲折地段会被忽略；改用米来做单位，测得的总长度会增加，但一些厘米量级以下的曲折地段还是不能反映出来；进一步，从理论上来说，海边沙砾的下一个尺度是分子、原子，于是要使用更小数量级的尺度的话，得到的海岸线总长度就很不一样。因此，长度不是海岸线的与尺度无关的不变量。这当然只是一个平凡的观察。但是，平凡的观察加上不平凡的思考，让曼德波罗引进了“分数维图形”的新概念，建立了今天熟知的分形几何理论。

曼德波罗独具匠心，创造了 fractal 一词。据他自己说，在 1975 年的一天晚上，他在冥思苦想之余偶然翻开了儿子的拉丁文字典，看到一个形容词 fractus（“破碎”），其对应的动词是 frangere（“产生无规则的碎片”）。他马上联想到具有相同词根的英文名词 fraction（“分数”、“部分”）及 fragment（“碎片”），从而“突然想到”一个新词 fractal。而在那以前，他一直是用英文单字 fractional 来表示他的分形思想的。这样，曼德波罗就取拉丁词之头、英文之尾，开始用 fractal 来描述自然界中传统欧几里得几何学所不能刻画的一大类当时被认为是“杂乱无章”的几何图形。这个新词从此不胫而走，进入了各种语言的字典词典，并将永留世间。

图 1 本华 • 曼德波罗（1924-2010）

图 2 中世纪《圣经》中的一幅插图[1]

1967 年，曼德波罗在美国《科学》杂志上发表了题目为《英国的海岸线有多长？》的一篇划时代标志性论文，阐述了分形的新思想。1977 年，他又在巴黎出版了一部法文著作“Les objets fractals: forme, hasard et dimension”，并于同年在美国出版了其英文版“Fractals: Form, Chance and Dimension”（中译本《分形：形状、机遇和维数》），和“The Fractal Geometry of Nature”（中译本《大自然的分形几何》）。但是，历史好像也是分形的，相似的事件反复重演。像过去许多名著的命运一样，曼德波罗这三本书完全没有得到学术界应有的重视，直到 1982 年他第三本书的第二版出来后，才受到欧美社会的广泛关注，并迅速形成了“分形热”。此书后来被分形学界视为“分形学之圣经”。

曼德波罗于 2010 年 10 月 14 日辞世，生前是耶鲁大学数学系的荣休 Sterling 讲座教授、IBM 荣休院士、1993 年沃尔夫物理学奖获得者、美国国家科学院院士。

说起来有趣，分形几何学的数学历史从不同角度来说也同样具有相似性。类似于分形的思想可以追溯到瑞典数学家 Niels F. H. von Koch（1870-1924）。他从一个三角形的“岛”出发，通过对称性而把它的“海岸线”变成不断向更小尺度层次延伸的连续曲线，于是其长度也在不断增加并趋向于无穷。

其实，类似于分形几何的历史思想还可以往前追溯。不妨看一看图 2。“我在看一本科学史书时注意到了这幅图。书上说这是中世纪、即 13 世纪晚期《圣经》中的一幅插图。意思是，上帝按照几何学设计了这个世界。我又搜索了一下这幅图；一些网站显示为《上帝计测宇宙》，描绘了作为宇宙建筑者的神（1250 年绘制）。”2008 年，时为上海交通大学数学系本科生的王雄同学在给我的电子邮件中如是说。他惊叹道，“那幅图的几何，很像一个 Mandelbrot 分形图案！作为中世纪作品画成这样的效果，已经是非常不错了，很难想象会是别的什么”。王雄后来成了我的博士研究生，现在就读于香港城市大学，研究与分形相关的混沌理论。

这里顺便提及，最早把分形几何引进中国的可能是中科院沈阳金属研究所的龙期威研究员，他曾是中国科学技术大学教授并任中科院国际材料物理中心主任。他率先把分形理论应用于金属断裂研究，并培养了把分形方法引入到裂隙岩体非连续变形、强度和断裂破坏行为为研究的一位优秀学生，也就是四川大学现任校长谢和平院士。

现在回到本文的主题，即分形几何在电子技术中有什么潜在应用和发展前景？这里只讲两个启发性的例子：分形天线和分形电容器。

分形天线

分形天线是一种无线通信用的新概念天线。和传统天线相比，它在同样面积或体积的条件下具有最大的有效长度或周长。这种天线具有极端紧凑和多宽频带等特性，非常适合于 RFID 和移动通讯方面的应用。由于现代通讯工具种类越来越多，体积也越来越小，因而需要把天线做得很小很小，而且越小越好。为此目的，把天线的形状做成分形是个好

主意，因为这可以在同样面积的限制条件下把天线做得很长，而且还能取代多条天线而同时工作在几个不同频率区间之中。

把天线阵列设计成分形样子的做法早在 1957 年就出现了。它是由美国伊利诺伊大学电子工程系教授 Raymond DuHamel 和学生 Dwight Isbell 提出的对数周期阵列（log periodic array）。分形天线阵列与传统天线阵列设计相比，具有多频和宽频特性，可用于快速计算方向图，可有效地利用狭小地域来布置庞大的平面阵列，可实现低副瓣设计策略，等等。两种典型的分形阵列天线是康托（Cantor）集阵列和维尔斯特拉斯（Weierstrass）线性阵列，目前多用于电视天线（图 3）。

图 3 分形阵列天线

基于分形结构来设计和优化单个天线的做法始于 1988 年，由波士顿大学教授 Nathan Cohen 首先提出，但相关的学术论文到了 1995 年才第一次正式发表。一些代表性的分形天线见图 4。

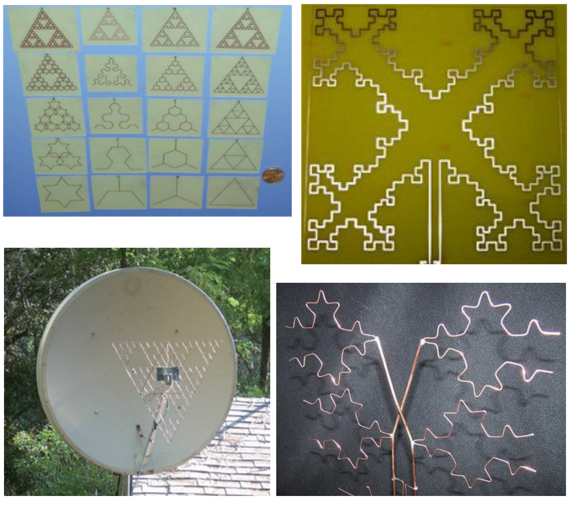


图 4 一些代表性的分形天线

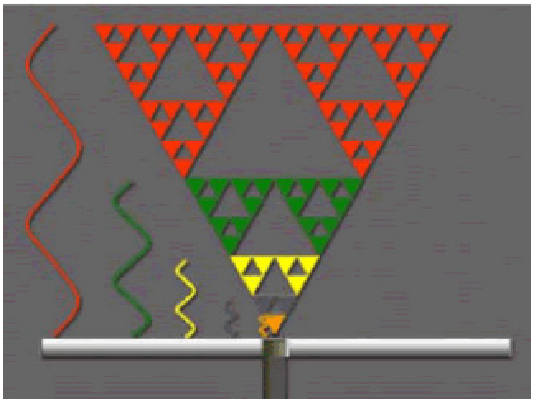


图 5 有限分形（伪分形）天线

与传统天线相比，分形天线除了在缩小尺寸方面独具一格之外，还有其他优点，例如：可以利用其自相似性来增加工作频带数目和带宽，具有自加载特性而不需要额外的调谐线圈和电容等元器件或匹配电路来辅助其在宽带工作条件下达到阻抗匹配，还可以简化电路设计和降低系统造价，等等。据报道，基于分形设计的天线可以在 UHF（862-928 MHz）频带的无线通信设备中和 GSM+DCS（900MHz 和 1800MHz）双频移动天线系统中得到较好的应用。目前的研究主要集中在 GSM（900MHz）、PCS（1900MHz）、蓝牙无线通信系统（2.4GHz）等方面。它不仅可以在个人手提（如 cellular phone 即蜂窝电话）和其他无线移动设备（如无线局域网中的 laptop 即笔记本电脑、车载天线系统）中得到应用，还可望用于卫星通信系统和相控阵雷达系统。目前看来，如果相关的一些技术障碍（如多频道信号之间的相互干涉）能够取得突破，则分形天线的前景还是颇为诱人的。

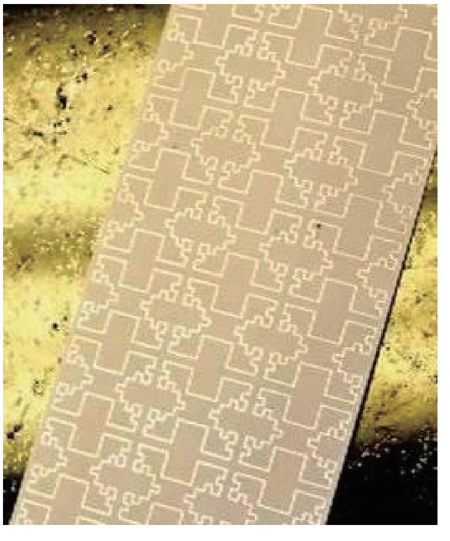


图 6 变形材料制造的分形天线

当然，从数学的角度来看，严格地说这些例子都只是利用了有限分形、或者称为伪分形（如图 5 所示），因而尚有潜力可以挖掘。事实上，目前一切还在尝试之中，期待新的进展。

据报道，新近迅猛发展的纳米变形材料（Metamaterials）和用变形材料制造的天线都充分考虑到有效地利用分形几何结构（图 6）。

2011 年还有报道说 [2]，用密封分形共振器合成的宽带变形材料可以制造出隐形外套，其原理是可以让光绕过这些材料而实现传播和折射（图 7）。

图 7 用具有分形结构的变形材料制造出隐形外套 [2]

分形电容

分形电容器设计的基本思想和分形天线是一样的。理论上，前者是在有限的面积内获得无限长的曲线以增加天线的有效长度，后者则是在有限的体积内获得无限宽的曲面以增加电容器的储电容量。

研究发现 [3]，在传统的电容器中把部分纵向的相反电极分布改为横向的话可以有效地提高其储电量。如图 8 所示，中间的电容器结构要比顶层的那个储电量高，而底层的那个结构的储电量更高。图 9 是根据这个思想设计出来的一个分形电容器的示意图。图 10 则是分形电容器的一个原型。

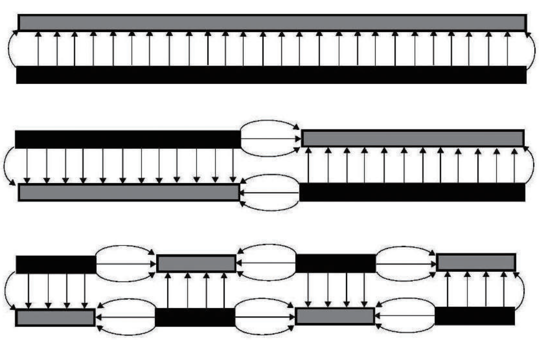


图 8 增加横向的相反电极数目能有效地提高电容器的储电量 [3]

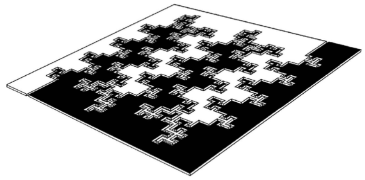


图 9 分形电容器设计示意图 [3]

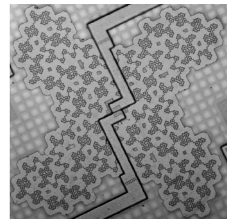


图 10 分形电容器的一个原型 [3]

把上述分形电容器的设计思想推广到三维是一个数学上很自然的做法，也适应了实际应用的需求。图 11 介绍了实现这个想法的几种设计方式。图 12 是分形电容器的一个设计原型。

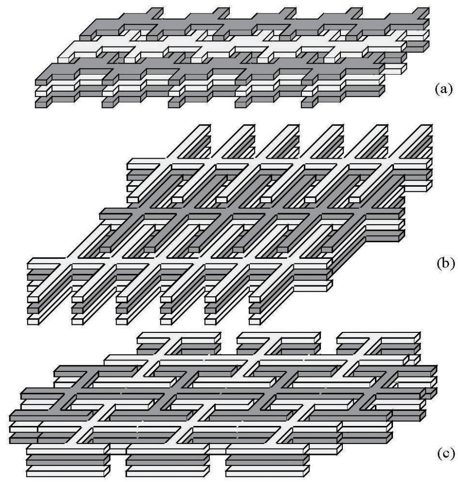


图 11 三维分形电容器的几种设计方式 [4]

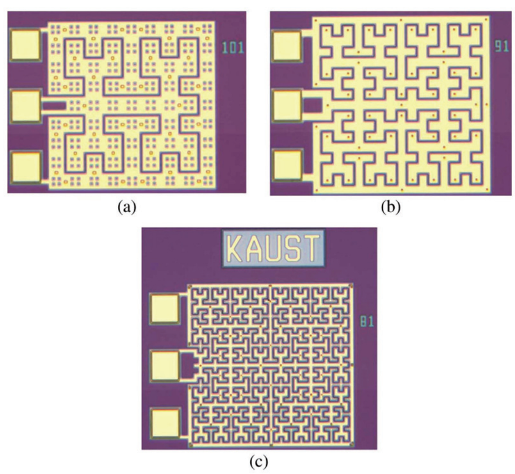


图 12 分形电容器的一个设计原型 [5]

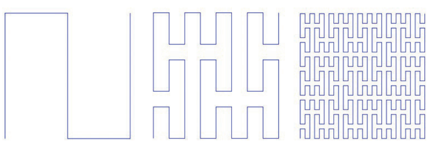
分形电容器应用的一个成功试验性例子是由瑞士 Paul Scherrer Institute 公司研制的分形超级电容器（supercapacitor

或 ultracapacitor）[6]，被安装在一辆名为 Hy.Power 的燃料驱动小汽车里，用作汽车爆发加速时的拖动功率补给。2002 年 1 月 16 日，Hy.Power 成功地爬上了位于瑞士 Brig 与意大利 Domodossola 之间海拔两千多米高的 Simplon 山口（图 13）。这段山路极为陡峭，而且当时山顶气候条件恶劣，同类型的小汽车只能望山兴叹 [7]。

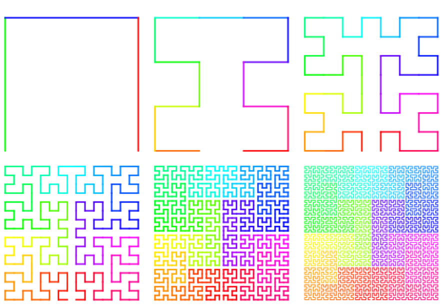
图 13 配有分形电容器的 Hy.Power 汽车爬上 Simplon 山口 [7]

相关的分形数学

说到分形天线和分形电容器的数学思想和原理，还得从 Peano 曲线（诞生于 1890 年）和希尔伯特（Hilbert）曲线（诞生于 1891 年）谈起。这两种曲线如图 14 所示。这类曲线通过反复迭代而不断卷缩并延长。例如，希尔伯特曲线的第 n 次迭代的长度是 $2^n - 2^{-n}$，可见其长度趋于无穷。有趣的是，这些貌似一维的曲线的 Hausdorff 维数是 2 而不是 1，也就是说它们最终可以充满整个方块。



(a) Peano 曲线



(b) 希尔伯特曲线

图 14 平面填充曲线

具体地说，希尔伯特曲线是如图 15 所示来产生的。

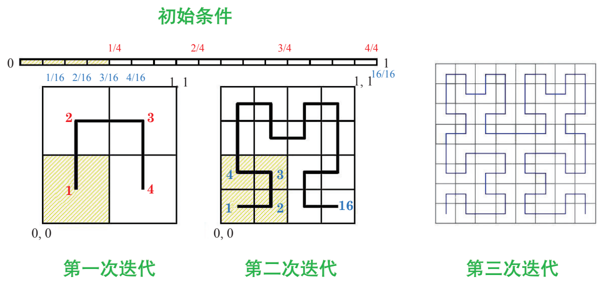


图 15 希尔伯特曲线的生成

如果使用字母的一种语法表示（Lindenmayer 系统，简称 L- 系统），则可能更为容易理解和记住迭代的法则：例如，在图 15 中第一次迭代后得到的图形就是图 16 中的 H 图形；把 H 变成箭头右方的 4 小块 $\begin{bmatrix} H & H \\ A & B \end{bmatrix}$ 便得到在图 15 中第二次迭代后的图形；再把分别相应于 $H\ H\ A\ B$ 箭头右方的 4 小块放进 $\begin{bmatrix} H & H \\ A & B \end{bmatrix}$ 中便得到在图 15 中第三次迭代后的图形；以此类推。

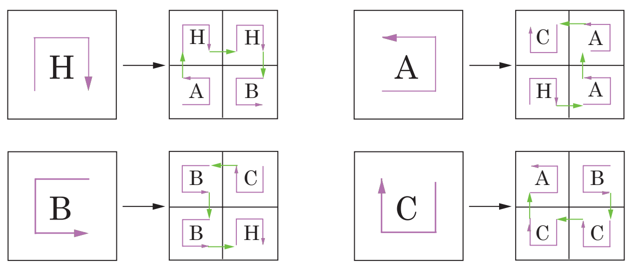


图 16 用 L- 系统法则生成希尔伯特曲线

图 17 中 T 恤上染印的是迭代五次以后所获得的希尔伯特曲线图形，而迭代六次以后获得的希尔伯特曲线图形如图 18 所示。

图 17 T 恤上印有迭代 5 次后获得的希尔伯特曲线图

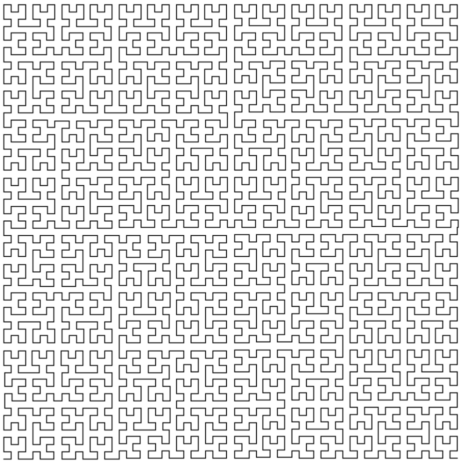


图 18 迭代 6 次以后获得的希尔伯特曲线图形

三维的希尔伯特曲线如图19所示，也称为空间填充曲线。

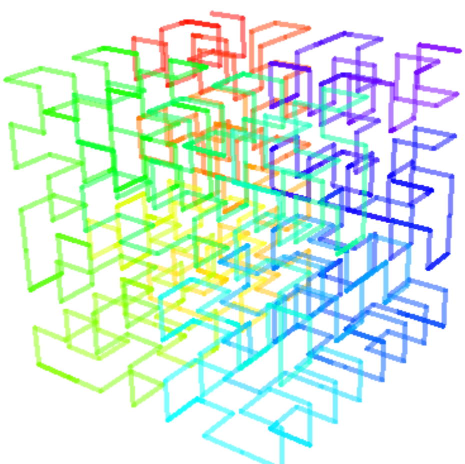


图 19 三维希尔伯特曲线图

结束语

应该说，分形几何在自然界、物理学和工程技术中的应用还只是初见端倪。

除了大家都已经很熟识的植物枝干叶子构成的分形、陆地迂回曲折的海岸线形成的分形之外，在人体内血管的分布和大脑的皱褶等地方（图 20），你都能够看到各种分形或者类似分形的几何特征。

在显微镜下观察落入溶液中的一颗花粉，你会发现它不间断的无规则运动（布朗运动）的轨迹是由不同尺度的连续折线相接而成的。这条曲线的分形维数是 2 而不是 1，因而和希尔伯特曲线一样，理论上可以逐渐遍历整个游走过的平面区域。

图 21 是 2005 年美国宇航局从国际空间站拍摄到的埃及境内纳塞尔湖的照片，上面呈现出来纳塞尔湖的水流分支就有很明显的分形结构。另一幅对我国黄土高原中部山西省岢岚县所拍摄到的照片（图 22）也有明显的分形结构。

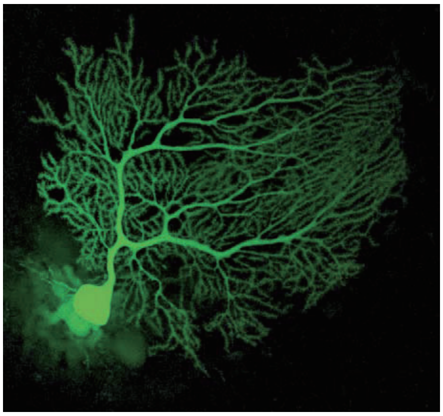


图 20 Purkinje 神经细胞

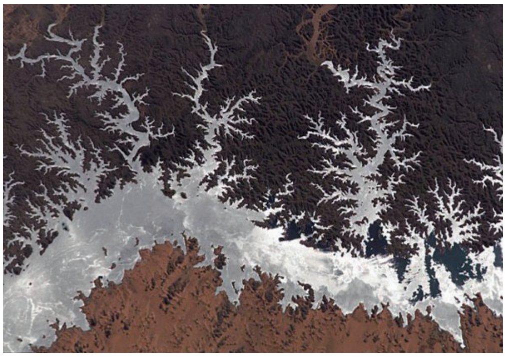


图 21 埃及纳塞尔湖的航拍照片

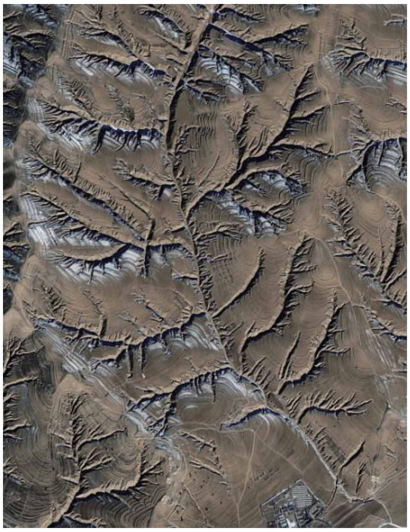


图 22 中国黄土高原中部山西省岢岚县的航拍照片

在物理化学领域中，在某些电化学反应过程里电极附近沉积的一些固态物质是以不规则的树枝形状向外增长的。在化学震荡反应、流体力学不稳定性、光学双稳器件动力学实验和分析中，都可以通过实际测量得到各种分形几何结构或者通过大型计算得到数据序列的分形维数。在工程技术领域里，已经出现了图像分析用的分形滤波器（fractal filter），使用分形编码（fractal coding）的图形分形压缩技术（fractal image compression），等等。

分形在工程技术中的众多应用反过来向数学提出了诸多新的问题和挑战。以上面谈及的分形电容器为例，在大学普通物理中介绍过如何来计算简单平板电容器的电容量：如图 23 所示，假设两个相距为 d（单位：米）的同质电极的面积均为 A（单位：平方米）。在电压差ΔU（单位：伏特）的作用下产生电场 $E=\Delta U/d$（单位：伏特 / 米）。这时，电

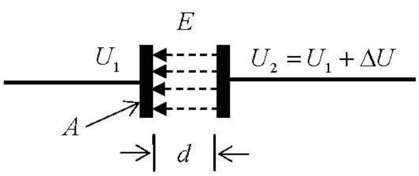


图 23 基本平板电容器

容器的电容量 C（单位：法拉）及其存储的电能量 J（单位：度）由下面两式给出：

$$C=\varepsilon_0\varepsilon_r\frac{A}{d},\quad J=\frac{1}{2}C(\Delta U)^2$$

其中 $\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}$（单位：法拉 / 米）是一个基本常数，$\varepsilon_r$ 是两块平板电极之间媒质的介电常数（例如，真空为 1，水为 81）。

现在，一个显然是十分有用但还没有答案的数学问题是：对于上面描述的各种有限分形电容器，如何分别推导出由该分形几何参数决定的、计算其总电容量的解析表达式？工程技术人员在等待着数学家们的回答。

如上所述，从数学的角度来看，严格地说前面提到的所有例子都只是利用了有限分形（伪分形）。容易想象，真正的分形几何学还有很大的潜力等待开发和挖掘。希望在不久的将来，随着科学技术的进一步发展和突破，我们能够看到分形几何获得越来越多、也越来越成功的各种实际应用。

致谢

作者感谢 Maciej Ogorzalek 教授提供了一些相关资料。文中没有标明出处的图片均从互联网上的无版权网页下载。

参考文献

1. http://en.wikipedia.org/wiki/File:God_the_Geometer.jpg
2. http://www.fractenna.com/whats/110915.html
3. H. Samavati, A. Hajimiri, A. R. Shahani,G. N. Nasserbakht, and T. H. Lee, “Fractal capacitors,” IEEE J. of Solid-State Circuits, 33(12): 2035-2041, 1998
4. R. Aparicio and A. Hajimiri, “Capacity limits and matching properties of integrated capacitors,” IEEE J. of Solid-State Circuits, 37(3): 384-393, 2002
5. A. M. Elshurafa, A. G. Radwan, A. Emira, and K. N. Salama, “RF MEMS fractal capacitors with high self-resonant frequencies,” J. of Microelectromechanical Systems, 21(1): 10-12, 2012
6. http://ecl.web.psi.ch/supercap/index.html#power
7. F. Gassmann, R. Kötz and A. Wokaun, “Supercapacitors boost the fuel cell car,” Europhysics News, 34: 176-180, 2003

作者简介：陈关荣，香港城市大学电子工程系讲座教授，IEEE Fellow。