数学聊斋连载

（连载四）

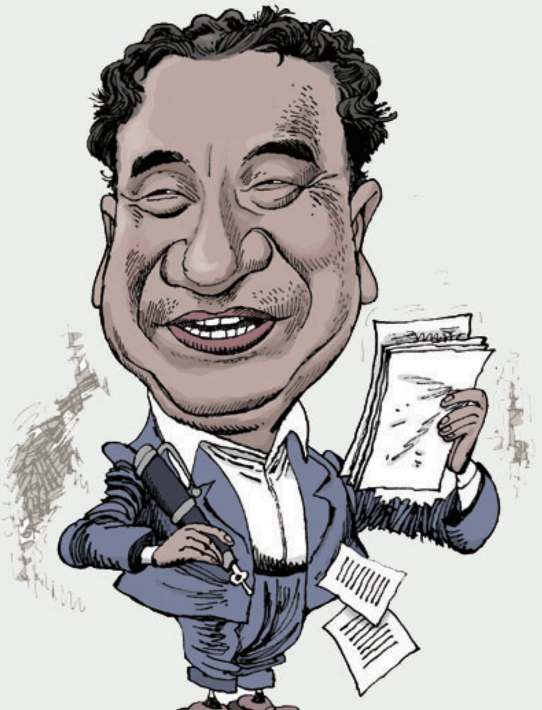
李尚志

明星做广告的责任

——非欧几何

明星经常做广告。很多人因为对明星的崇拜而相信明星做广告的产品，踊跃购买。但是，明星做广告的产品有时候也会被揭发为假冒伪劣产品，甚至是含有毒成分的食品。这时，有的消费者就会来追究明星做广告的责任，声称是受了明星的骗才买了这些产品，要求追究做广告的明星的法律和经济责任。这时候，明星就会出来大呼冤枉，很多媒体也会出来为明星喊冤，其理由也振振有词：“明星也是人，不是万能的，不可能具有鉴别这些产品的专业知识，也不可能花很多的时间和精力去鉴定这些产品的真伪好坏，怎么能够保证所做广告的产品的质量，怎么能够对产品的质量问题承担这么大的责任呢？”

这些理由听起来都很正确。但是，当明星做广告宣传产品的时候，他们是否也会将这些正确的话讲出来，提醒消费者不要做出错误的判断呢？是否也会在将产品吹得天花乱坠的时候也提醒一句：“我们明星也是人，不是万能的，不可能具有鉴别这些产品的专业知识，也不可能花很多的时间和精力去鉴定这些产品的真伪好坏，因此大家不要盲目相信我们的广告词，应当理性地作出自己的判断。”明星当然不会良心发现做这样的提醒，唯利是图的广告商更不会允许明星做这样的提醒。因为，广告商让明星做广告，其目的就是要消费者相信“明星是万能的，也是不会骗人的，他们说好的产品就一定是好”。明星之所以能够拿到



李尚志

高额的广告费，就是因为明星能够让更多的人相信他们是万能的，相信他们推荐的产品一定是好的。

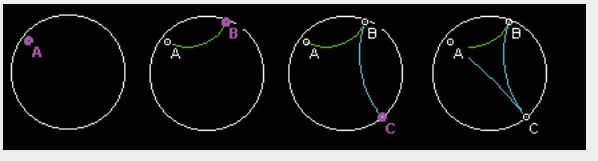
做广告的时候希望消费者相信“明星是万能的”，踊跃购买。出了问题又希望消费者相信“明星不是万能的”，不要追究他们的责任。我们不必与明星和商人们辩论到底明星万能还是不万能。但是，不用辩论

也知道：明星不可能既是万能的又不是万能的。如果明星是万能的，在产品出问题之后就应当追究明星们的责任。如果明星不是万能的，那就请不要相信明星的广告，在决定是否购买这些产品的时候独立作出自己的判断。如果你要坚决作明星的粉丝，相信他们是万能的，盲目购买他们作广告的产品，那就做好牺牲自己利益的准备，中了毒也自认倒霉。“明星不可能既是万能的又不是万能的。”这个简单道理不但可以用来说明明星做广告应当承担什么社会责任，也可以帮助我们理解看起来违背常理的非欧几何。

从中学的平面几何开始，学生学的就是欧几里得几何。其中有一条重要的公理：在平面上，过直线 a 外面一点 P，只能作一条与直线 a 不相交的直线 b。同一平面内这两条不相交的直线 a, b 称为相互平行。这个公理称为平行公理。由平行公理出发可以推出一系列几何定理，例如：三角形内角和等于平角（180 度），等等。

欧几里得几何还有一些别的公理。例如，过平面上不同的两点可以并且只能作一条直线。这些公理的成立看起来都是显而易见的。但是，平行公理似乎显得复杂一些，不那么显然，似乎可以由别的显然成立的公理推导出来。于是，就有很多数学家试图用更显而易见的公理来证明平行公理。经过很多年的努力都没有成功。很自然，有些人尝试用反证法来证明平行公理。也就是：假定平行公理不成立，假定在平面上过直线 a 外面一点 P 可以至少作两条不同的直线 b, c 与 a 都不相交，试图由此推出矛盾。从这个假设出发，推出了很多看起来荒唐的结论。例如，三角形内角和小于 180 度，相似三角形必然全等，等等。曾经有很多人以为：既然否定平行公理之后推出了荒唐的结论，那就是证明了平行公理。其实这不对。什么叫做荒唐？他们所说的“荒唐”其实是按欧几里得几何为标准来作出的判断。比如，三角形内角和为什么一定是 180 度？小于 180 度为什么就是荒唐？其实，“三角形内角和等于 180 度”比“在平面上过直线 a 外一点 P 只能作一条直线 b 与 a 不相交”更不显然，凭什么就能用前者来证明后者的成立呢？如果否定平行公理之后能推出相互矛盾的结论，那就证明了平行公理的正确性。反之，否定平行公理之后推出的一大批看起来荒唐的结论相互不矛盾，可以自圆其说，这些“荒唐”结论就可以组成另外一个几何体系与欧几里得几何分庭抗礼。

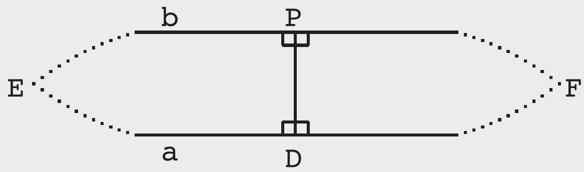
经过无数的失败，终于有人醒悟过来，意识到否定平行公理之后得到的一大批看起来荒唐的结论相互是不矛盾的。俄罗斯数学家罗巴切夫斯基首先在俄罗斯科学院做报告正式宣布了这一结论，由这些貌似荒唐却不矛盾的命题组成了一个新的几何体系，称为罗巴切夫斯基几何。也就是说：既可以假设平行公理成立，过平面上任意直线 a 之外一点 P 只能作一条直线与 a 不相交，由此推出一系列相互不矛盾的几何定理，组成欧几里得几何。也可以假设平行公理不成立，过平面上任意直线 a 之外一点 P 至少可以做两条不同的直线 b, c 与 a 都不相交，由此推出另外一系列相互不矛盾的几何定理，组成罗巴切夫斯基几何。这两种几何都没有矛盾，都可能正确，但不可能同时正确。到底哪一个正确，不能仅由逻辑推理来判定，需要在现实的宇宙空间中进行测量来判定。



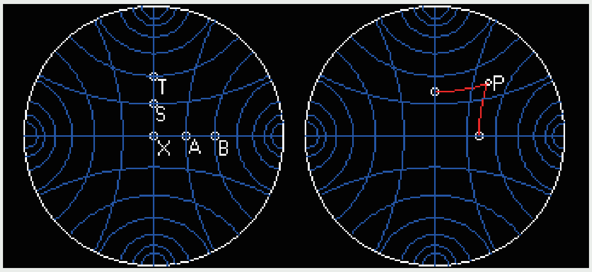
（非欧几何意义下的）双曲几何里的三角形

虽然人们没有在否定平行公理之后推出的一大批非欧几何定理之间发现矛盾，但没有发现矛盾不等于没有矛盾。有可能是因为地球人都不够聪明，所以没有发现矛盾，以后有可能从天上掉下个外星人发现矛盾。最好的办法是不要等待天上掉下外星人，而由地球人给出一个证明，说明否定平行公理之后得到的几何定理相互没有矛盾呢。这样的证明确实给出来了，但不是直接证明非欧几何定理之间没有矛盾，而是证明了：只要欧几里得几何没有矛盾，非欧几何就没有矛盾；如果非欧几何有矛盾，那么欧几里得几何也有矛盾。如果欧氏几何与非欧几何两者都有矛盾，就什么几何都没有了。我们只好同意两者都没有矛盾。

按照欧几里得几何，过平面上任一直线 a 之外一点 P 只能做一条直线 b 与 a 不相交。按照罗巴切夫斯



基几何，过 P 与 a 不相交的直线至少有两条，因而有无穷多条。在逻辑上，还应当有一种可能性：过 P 与 a 不相交的直线只有 0 条，根本就不存在。不过，可以证明直线 a 之外一点 P 至少有一条直线 b 与 a 不相交。证明方法是：过 P 作 a 的垂线 PD，如上图。再过 P 做 PD 的垂线 b。我们断定 b 与 a 不相交。若不然，设 b 与 a 有交点 E。将直线 a, b 关于直线 PD 做轴对称变换之后仍分别与 a, b 自身重合，而 a, b 的交点 E 则从 PD 的一侧变到另一侧成为 a, b 的另一公共点 F。a, b 是过两点 E,F 的两条不同直线，这与“过不同的两点 E、F 只能作一条直线”的公理相矛盾。为什么 E、F 一定是两个不同的点？这是因为它们分别位于直线 PD 的两侧。有一条公理说：任一条直线将平面分成两个不相交的部分。如果将这条公理也去掉，则直线 PD 两侧的 E、F 有可能是同一个点，就好比在地球上从中国往东和往西可以到达同一个地点，以上的证明就并没有推出矛盾。这就得到平行线的第三个公理：从平面上任一直线 a 之外一点 P 的每一条直线都与 a 相交。由这个公理推出的结论组成既不同于欧几里得又不同于罗巴切夫斯基几何——黎曼几何。黎曼几何并不奇怪：假如将地球表面看成平面，这个“平面”上任意两点 A, B 连成的最短线 (过 A, B 与球心所作平面与球面的交线) 看成直线，这它们满足平面与直线的相关公理，并且任何两条这样的“直线”都相交。



双曲几何里的坐标系

以上三种几何都没有矛盾，其中哪一个在现实的宇宙空间中成立？科学家们似乎更偏向于黎曼几何。不过，在小范围的宇宙空间中，罗巴切夫斯基几何与黎曼几何近似地等同于欧几里得几何，正如地球表面的球面在小范围内近似地等同于平面。这个“小范围内的宇宙空间”有多小？在太阳系甚至银河系范围内都不会有显著误差。生活在地球上的人们可以大胆使用欧几里得几何而不用担心有明显的误差。不过，这三种几何虽然是为研究几何空间发明出来的，却还可以用来描述很多别的事物。正如现实的空间虽然是三维的，四维或更高维数空间的几何和代数知识仍然可以用来研究现实世界中由 4 个或更多个参数决定的系统。

房价何时过千万？

——等比级数的中国故事

数学教材和科普读物，讲到等比数列的时候都喜欢讲一个故事：

印度一个聪明人为国王发明了国际象棋。国王非常高兴，问这位发明人想要什么奖赏。并且答应：“你要什么我就给什么。”发明人回答：“请按国际象棋的 64 个格子给我奖赏：第一个格子给我一粒麦子，第二格给两粒，第三格给 4 粒。依此类推，每个格子给我的麦粒数是前一个格子的两倍。64 个格子给完了，就是我所要的全部奖赏。”

国王想，他所要的麦子不多呀。从 1 粒麦子开始，实在很少。每次两倍，也不多。64 个格子也不算多。经过计算，这些麦子的总数 2^{64}-1 是一个 20 位的整数。这些麦子的总量比全世界生产的麦子都多，可以从地球一直堆到太阳。国王给不出这么多麦子。

这个故事的中心思想是要说明：随着指数 n 的增长，指数函数 2^n 的值增长得多么快。用这样一个有趣的故事来普及数学知识，当然很好。但这个故事讲了很多年了，老掉牙了，不新鲜了。而且是古代的外国的，离我们的生活太远。并且，我怀疑这并不是真人真事，可能只是古代外国的聪明人创作的一个虚拟故事，一个寓言，来说明指数增长的惊人速度。

等比级数的形象例子

类似的例子还不少，例如，为了说明立方倍积的尺规作图问题，就创作了上帝托梦让人们将正方体神坛体积扩大一倍来免除瘟疫的故事。为了说明斐波那契数列，就创作了养兔子的故事。

虚构有趣的故事来普及科学知识，可以说是一种好的教学方法。但也不能过分。如果书上的应用题和实例全部都是虚构的，没有一个真的，就给学生一个印象，科学的应用都是假的，没有真的。例如，鸡兔同笼问题，让学生通过鸡和兔子共有多少个头多少只脚来计算鸡兔各有多少只，学生就会想：既然已经看见笼子里的鸡和兔，直接数清楚鸡和兔有多少只就行了，何必数头数脚瞎折腾？在我的教学实践中，发现很多学生确实认为数学的应用都是假的没有真的，向农民买菜计算价钱只需要加减乘法，总不至于用到微积分吧？

有没有真实的、生动的、发生在我们身边、与我们的生活密切相关的中国故事可以取代国际象棋发明者的故事，同样能说明指数函数的快速增长呢？下面就是一个：房价飞速上涨，让中国的房地产商开心，老百姓们关心。中央政府采取严厉措施控制房价，各省相应地提出了具体的控制房价措施和目标。很多省制定的控制房价的奋斗目标是：房价涨幅控制在 10% 以内。这就提供了一个很好的数学习题：

习题：假定房价每年上涨 10%，多少年之后上涨到每平方米 1 千万元？

要得出明确的答案，需要知道现在的房价是多少。稍加调研就可以知道这个数据。例如，北京现在的房价大体上是每平方米 3 万元。不过北京的房价控制目标不是每年增长 10%，而是“稳中有降”，也就是控制在 0%，与这个习题的条件不吻合。在那些将房价控制目标定为 10% 的省市，将现在的房价按每平方米 1 万元计算，大体上符合实际。

有人会认为：从 1 万元开始每年上涨 10%，就是每年涨 1 千元。10 年涨 1 万元，经过 9990 年上涨 999 万元达到 1000 万元。9990 年太久，现在可以不必考虑。

只要懂得一点中学数学甚至只要学好了小学数学的人都知道以上的算法是错误的。从 1 万元开始每年上涨 10%，第一年确实是涨 1 千元。随着房价的持续上涨，10% 也就越来越多。当房价涨到 10 万元时，下一年再涨 10% 就是涨 1 万元而不是涨 1 千元。因此，每年上涨 10% 并非“涨幅稳定”，而是越涨越猛。如果真的每年只涨 1 千元，那就不是“涨幅稳定”而是“涨幅持续回落”了。

正确的计算方法很简单：每年涨 10% 就是变成前 1 年的 1+10%=1.1 倍。现在是 1 万元，n 年之后就是将 1 万元连乘 n 个 1.1，达到 1 万元 $\times 1.1^n$. 这是 n 的指数函数。利用计算器容易算出

$$1.1^{25}=10.8347,\ 1.1^{49}=106.7190,\ 1.1^{73}=1051.1532。$$

也就是说：25 年之后超过 10 万，49 年之后超过 100 万，73 年之后超过 1000 万。

25、49、73 这几个数不是凑出来的，而很容易利用中学数学知识算出来。算法如下：先算多少年可以涨到 10 万元，也就是求方程 $1.1^x=10$ 的解。两边以 10 为底取对数得 $x\lg 1.1=1$，那么 $x=1/(\lg 1.1)\approx 24.16$。因此，涨到 10 倍只需要 24.16 年，经过 24.16×2=48.32 年涨到 10 万元的 10 倍，就是 100 万元。经过 24.16×3=72.48 年涨到 1000 万元。

这个结果似乎太离谱了。房价真的会涨到每平方米 1000 万元吗？数学上算出来正确的结果当然是真

的：如果将房价上涨率控制到 10% 的目标确实能够实现并且维持下去，经过 25 年、49 年、73 年，房价真的要达到每平米十万、百万、千万。

反之，如果房价上涨率的控制指标不能实现，房价又会变成多少呢？由于 10% 的房价“控制指标”不是在中央政府鼓励房价上涨的情况下制定出来的，而是在严厉限制房价上涨的情况下制定出来的，是制定者很不情愿被迫让步到的最低线，实际执行结果很可能更高而不是更低，可能是 20%、30% 甚至 50%，房价达到千万实际上就不需要 73 年，只要 39 年或者 27 年甚至 17 年就能提前实现。

也有可能出现另一种情况：房价连续若干年保持了每年 10% 或更高的增长率达到了十万，中央政府采取更严厉的限制房价措施将增长率控制到 10% 之下，就有可能让房价不会涨到百万或者千万。比如，房价从 10 万开始每年只涨 1 万而不是每年涨 10%。按照电视台经常广播的科学术语，这叫做“涨幅持续回落”。很多老百姓听不懂这个术语：明明是持续稳定上涨，怎么是回落呢？其实，“持续稳定上涨”与“涨幅持续回落”两者并不矛盾。从某年的 10 万涨 1 万变成下一年的 11 万，涨幅是 1 万 /10 万 =10%。再从 11 万涨 1 万变成更下一年的 12 万，涨幅是 1 万 /11 万 =9.09%。从 10% 变成 9.09%，涨幅确实回落了。以后随着房价越来越高，每年涨的 1 万元所占比例越来越小。具体计算结果是：房价从 10 万依次涨到 11, 12, 13, 14, 15, …万，涨幅依次是 10%, 9.09%, 8.33%, 7.69%, 7.14%, …。这确实是“涨幅持续回落”。

等比级数的求和

中国人创造的这个真实例子，足以生动形象地说明指数增长之快速，比起那个子虚乌有的印度故事的教学效果肯定好得多。

让我们想一想：既然国际象棋发明者预先知道国王不可能拿出这么多的麦子来奖赏他，为什么要提出这个离奇的要求？恐怕也就是要炫耀自己的聪明。殊不知，炫耀自己的聪明也就是显示国王的愚蠢，很有可能国王会把他杀了。这个聪明人懂得指数增长之快速，在数学上确实聪明，但却有可能因显示自己的聪明而丢掉了性命，就象三国演义里的杨修在曹操面前卖弄自己的聪明丢了性命一样，政治智商其实很低，只能说是一个书呆子而不是聪明人。有一种说法是这个发明者是国王的宰相，我觉得这样的书呆子只能当发明家而不可能当宰相。相反，制定 10% 的“房价控制目标”的这些中国人比那个印度发明家聪明得多：他们制定了一个看起来很低的指标，不但没有丧命的风险，连挨骂的风险都没有。很多年来我们的中学用那个印度书呆子的故事来教等比数列，教出了一代又一代的中学毕业生，只会应付高考，却不明白“房价持续上涨”可以叫做“涨幅持续回落”，说明这样的中学数学教育其实是失败的。如果用制定 10% 涨幅的中国聪明人取代那个印度书呆子来作为等比数列数学教学的主角，教学效果一定会好得多。

出生 8 年才第一次过生日

很多动脑筋急转弯的书上都有这样一个问题：有人出生 4 年之后才第一次过生日。这是怎么回事？

这个问题的答案不难：他是在闰年的 2 月 29 日出生的。比如在 2008 年 2 月 29 日出生，以后连续三年 (2009，2010，2011) 都不是闰年，2 月都只有 28 天，没有 29 日，要等到 4 年之后的 2012 年 2 月 29 日才第一次过生日。

可是，如果我们说有人出生 8 年之后才第一次过生日。你相信吗？

如果你了解闰年的规则，就知道出生 8 年之后才过第一次生日也是可能的：他在 1896 年 2 月 29 日出生。不但出生之后的连续三年 (1897，1898，1899) 不是闰年，而且第四年 1900 年也不是闰年，都没有 2 月 29 日，再后面的三年 (1901，1902，1903) 也不是闰年，直到他出生之后的第 8 年 1904 年才是闰年，1904 年 2 月 29 日才第一次过生日。

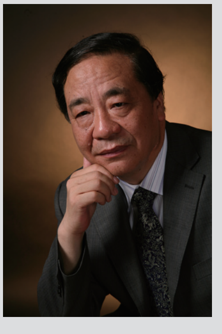
闰年的规则是：如果年份数是 4 的倍数而不是 100 的整数倍，那就是闰年；如果年份数是 400 的倍数，那也是闰年。在其余的情况下，或者年份数不是 4 的倍数，或者年份数是 100 的倍数但不是 400 的倍数，那就不是闰年。

为什么要有这样的规则？我们知道，一年就是地球绕太阳公转一圈的时间。一天是地球一昼夜的时间。平均起来，一年等于 365.2422 天。在制定历法时，只能让一年的天数是整数，最接近一年的当然就 365 天，所以只能规定一年 365 天。但这样一来，每年就少了 0.2422 天，由 1/0.2422 = 4.12882 知道：差不多每 4 年就少了一天。因此每 4 年就补充 1 天。历法规定：如果年份数是 4 的整数倍，就在这一年的 2 月份末尾补充 1 天，就是 2 月 29 日，这一年就称为闰年。

但是，每 4 年少的天数实际上是 0.2422×4=0.9688，每 4 年补充 1 天其实是多补了 1– 0.9688=0.0312 天。经过 1/0.0312=32.0513 个闰年之后，就多补了 1 天，应当将这 1 天扣除，也就是扣除一个闰年。每 4 年闰一次，经过 32 个闰年就是 4×32=128 年。这 128 年本来应当有 32 个闰年，应当扣除 1 个闰年，只保留 31 个闰年。

如果规定每 128 年扣除 1 个闰年，这样的规定不容易记忆，使用起来不方便。所以采用了另一个方法：以 400 年为单位来计算闰年的天数。400 年包含 3 个 128 年零 16 年。3 个 128 年应当去掉 3 个闰年。因此，现行的历法规定，在这 400 年中，年份数是 100 的倍数的 4 个闰年中，只保留其中是 400 的倍数那一年仍然作为闰年，将其余 3 个去掉，也就是将年份数是 100 的倍数但不是 400 的倍数的 3 个闰年去掉。

400 年除了包括 3 个 128 年之外还剩 16 年没有加以考虑。经过 128/16=8 个 400 年之后，积累起 128 年，从这 128 年的闰年之中应当再扣除 1 个。8 个 400 年也就是 3200 年。不过，人类迄今为止使用公历的历史还远不到 3200 年。而且，真的经过两三千年之后地球的转动速度也可能还会有微小的变化，一年是否仍等于 365.2422 天尚不清楚，所以现在去考虑那么遥远的未来的事情还为时过早，到时候自然会有办法。



作者简介：李尚志，北京航空航天大学数学与系统科学学院学术委员会主任、教授、博士生导师。第一届全国数学名师。