

# 微博上的数学漫游 (连载一)

歌之忆 <http://weibo.com/wildmath>

如果在微博上来一次随机走动式的数学漫游，那么我想把坐标原点定为笛卡尔。比起那些严密得让你喘不过气来的数学理论，更有意思的事情，倒是去拜访那些创造了数学的人们，去回望那滋养了数学的历史情境。

## 笛卡尔 *Descartes*



法国数学家笛卡尔 (1596-1650)



Pierre Louis Dumesnil 的油画《瑞典女王》，描述笛卡尔教数学的场景

■ 传说笛卡尔 (René Descartes) 某日躺在床上，饶有兴致地盯着天花板上的一只苍蝇，天花板上是木条嵌成的正方形网格，他居然就发明了直角坐标系。他追女孩的方式酷毙了：送女孩一个心形线方程。他的一句“我思，故我在”，影响了几代欧洲人，被誉为“第一个为人类争取并保证理性权利的人”。

17世纪的欧洲，古希腊数学再度复兴，欧几里得的《几何原本》和丢番图的《算术》风靡一时，数学成为知识界的中心话题之一，连城市广场也经常张贴数学难题征解。正是在《算术》一书的空白处，律师费马写下了著名的费马大定理。而笛卡尔致力于把古希腊的几何学与新兴的代数学结合起来，建立了解析几何学。

笛卡尔开创的欧陆理性主义，也影响到一代杰出学者帕斯卡（Blaise Pascal），此君 16 岁就发现了帕斯卡定理。启蒙运动时期的学者，并不行止于空谈，帕斯卡还发明了最早的加法器。帕斯卡认为人同时需要随心灵而走的“纤细精神”和随理性而走的“几何精神”——“人是一支芦苇，但他是一支会思想的芦苇”。



法国数学家帕斯卡（1623-1662）

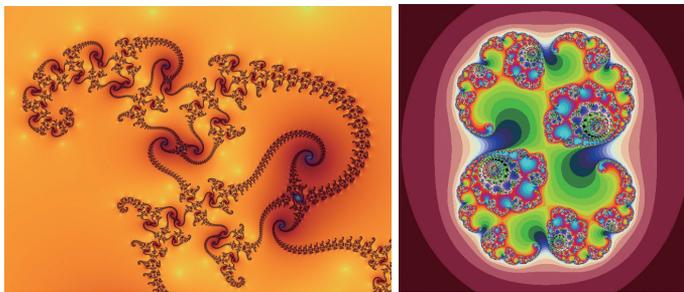


瑞士计算机科学家沃思（1934-）

当代计算机学者沃思（Niklaus Wirth）十分崇拜帕斯卡。他发明了著名的结构化程序设计语言——Pascal，应用极为广泛。因其简洁、结构化的特点，成为信息学国际奥林匹克竞赛使用最广泛的编程语言之一。沃思教授获得了 1984 年图灵奖，其得奖贡献就是他的一句经典名言：“算法 + 数据结构 = 程序。”

## 朱利亚 Julia

■ 浪漫之都法兰西，总是流传数学家的传奇故事。比如朱利亚（Gaston Julia），参加第一次世界大战，他失去了鼻子。战后，他在 25 岁时发表了一篇 199 页的论文，论述有理函数迭代的混沌行为点集（Julia 集）。此工作的价值，多年后被分形几何大师孟德尔布罗特（Benoit Mandelbrot）发现。美丽的 Julia 集，诞生在没有计算机的时代。



法国数学家朱利亚（1893-1978）

1912年庞加莱去世，数年之后第一次世界大战爆发，类似朱利亚的才俊们被送上前线，法国数学错失了整整一代人。单靠函数论强撑门面，根本无法抗衡德国。而阿达玛（Jacques Hadamard）和他的继任者朱利亚主持法兰西学院数学讨论班，坚持研习先进数学。为法兰西带来巨大光荣的布尔巴基，早期骨干全出自该讨论班。

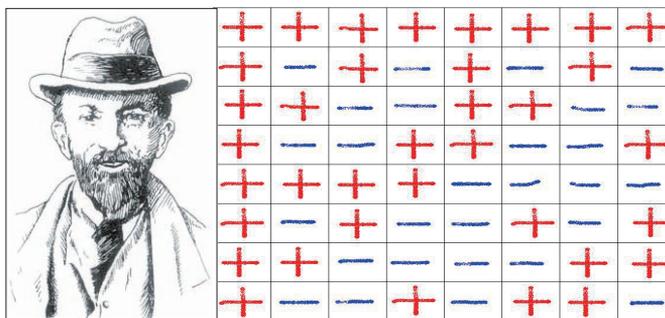


## 阿达玛 Hadamard



法国数学家阿达玛（1865-1963）

■ 法国数学家阿达玛有多厉害？这位犹太人证明了素数定理，提出了“泛函”和偏微分方程适定性概念。Hadamard 矩阵、Hadamard 变换长期是研究热点。在引人入胜的量子计算中，有 Hadamard 门。Walsh-Hadamard 矩阵甚至被 IS-95、WCDMA、CDMA2000 等移动通信标准采纳，作为下行链路用户码等使用。



执掌法兰西学院数学部的阿达玛，自幼各门功课表现出色——唯独数学一塌糊涂！七年级之后他遇上一位优秀的数学老师，渐露头角。法国崇尚精英体制，其高等教育的两张王牌是巴黎高等师范与巴黎综合理工学院。而阿达玛在这两所顶尖学府的入学考试中都名列前茅，最终选择了巴黎高师。

阿达玛对中国人民有着深厚的情意——1936年他在国立清华大学数学系任教，同一时期，维纳在电机系任教。自清华起，阿达玛开始培养中国偏微分方程的先驱者吴新谋。他还和维纳分别将华罗庚介绍给了维诺格拉朵夫和哈代。阿达玛1963年逝世，其法文著作《偏微分方程论》于1964年在中国出版。



美国数学家维纳  
(1894-1964)



前苏联数学家维诺格拉朵夫  
(1891-1983)

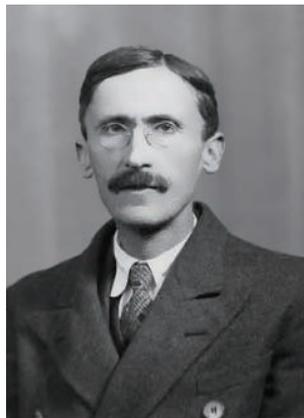
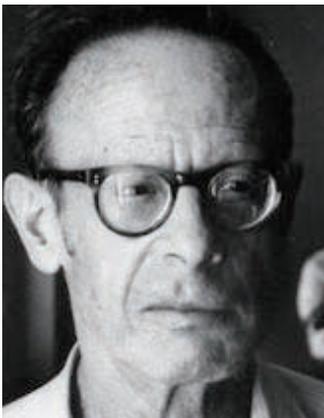


中国数学家华罗庚  
(1910-1985)



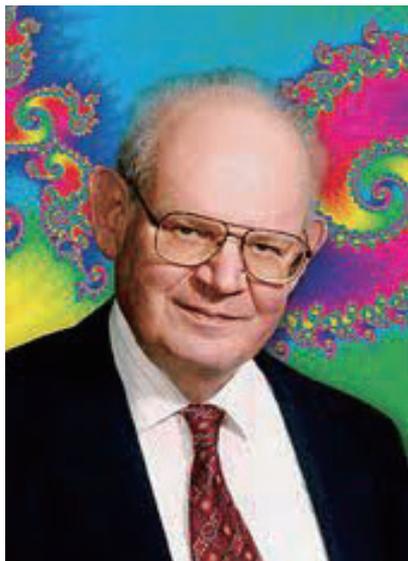
中国数学家吴新谋  
(1910-1989)

阿达玛名下弟子寥寥，却威震天下。先说安德烈·韦伊 (André Weil)，20世纪最伟大的数学全才之一，布尔巴基的领袖，毕生两度挽法国数学于狂澜，荣享至尊；再说莱维 (Paul Pierre. Lévy)，Lévy 过程早已是随机过程的标准内容，其学生孟德尔布罗特 (Benoît B. Mandelbrot) 是分形几何之父、Matheron 参与发明数学形态学、Loève 则以统计上的 KL 变换闻名。



法国数学家安德烈·韦伊 (1906-1998) 法国数学家莱维 (1886-1971)

## 孟德尔布罗特 *Mandelbrot*



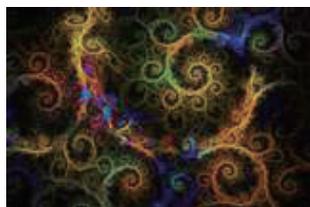
法国数学家孟德尔布罗特 (1924-2010)

■ 分形固然好看，却也颇多争议。80年代末，格兰茨 (Steven G. Krantz) 向美国数学会的研究刊物 *Bulletin* 撰文，质疑孟德尔布罗特的优先权和工作价值，他还把清样寄给了孟德尔布罗特，后者迅即反驳。为难的编辑先想改在美国数学会的会刊 *Notices* 发表，最终决定撤稿了事。后来施普林格出版了双方论战檄文。而格兰茨现在成 *Notices* 的主编了！



美国数学家格兰茨 (1951-)

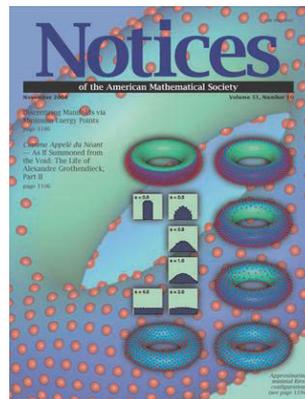
格兰茨向孟德尔布罗特就分形的首创人与数学意义发起质疑，煞是吸引眼球。攻方是多复变权威，师出调和与分析大师 Stein，看今日他名震天下的师弟陶哲轩，可想其身手该是不凡。而守方乃概率大师莱维之徒，绝非等闲之辈。胜负姑且不论，这场论战告诫世人：数学追求严肃的理论，而不是艺术炫图。



孟德尔布罗特的一生真够“分形”的。年幼从波兰逃难巴黎，凭天赋闯入高师，又转学巴黎高工。到美国加州理工拿了个航空学硕士，回巴黎大学拿到数学博士。冯·诺伊曼请他到高等研究所干过，在哈佛做过客座教授，在 IBM 工作了 35 年。落脚耶鲁任教 12 年之后，创下了 75 岁高龄才拿到终身教授 (tenure) 的纪录！

以分形成名的孟德尔布罗特，早在上个世纪 50 年代就开始琢磨股市，他发现了股市数据噪声并不服从高斯分布，而是服从长尾的 Lévy 分布。在金融领域，长尾意味着更高风险。这类体现“幂律”的还包括经常用于衡量财富分布的 Pareto 分布。“分形之父”也被称作“长尾分布之父”。

享有“长尾分布之父”与“分形之父”两项美誉的孟德尔布罗特，少年投靠他的数学家叔叔 Mandelbrojt，而后成为概率论大师莱维的学生。这两位老师都是阿达玛的博士。Lévy 分布成就了他的第一项美誉，Lévy 的 C-曲线又近乎于分形。面对这样一群优秀的犹太学者，你会有多羡慕他们的学术传承！



著名科学作家 Gleick 在《混沌》一书中大幅介绍了孟德尔布罗特的分形。虽然理论数学家格兰茨强调：Fatou 和朱利亚在复动力系统的工作才是真正出色的数学。但赢得沃尔夫奖的孟德尔布罗特对得起“分形之父”的桂冠。他 2010 年逝世后，法国总统萨科奇称道他拥有强大而富有创造力的智慧。



法国数学家 Paul Montel  
(1876-1975)

作为数学家的孟德尔布罗特未必算第一流的，但绝对是特立独行的。他直觉思维如此发达，从达利的画作看到的是自相似性。IBM 公司不但给了他自由探索的空间，而且他还能利用 IBM 强大的计算机。分形的研究，繁盛于计算机时代，还为数学联接艺术打通了一座新的桥梁。



法国数学家 Pierre Fatou  
(1878-1929)

被格兰茨推崇备至的 Fatou 和朱利亚，当之无愧是法国函数论学派在复动力系统的杰出代表。在第一次世界大战后的低谷期，正是 Fatou、朱利亚和 Montel（正规族理论）这批杰出的函数论人才，为法国数学储备了实力。不过，貌似抽象的函数论在信息社会中扮演的极为关键的角色，却长期不为公众所知。

## 佩利 Paley

■ 信息社会的基础是电信。麦克斯韦理论提出之后，马可尼研制起基于辐射电磁波的无线通信。1930 年代，长途电话网逐步采用了频分复用技术。通信的收发装置都牵涉到“滤波”技术。很基本的问题就是：能量有限的信号经过（严格低通）滤波器后变成了什么？充分而且必要的答案是：指数型整函数。

要理解函数论在现代电信中的基本作用，不得不提一个超级数学天才、剑桥大学研究生佩利（Raymond Paley）。此君身出伊顿公学，23 岁即为剑桥大学三一学院院士，年轻的他和世界顶级数学名家 Zygmund、维纳、波利亚、里特尔伍德合作发表过论文。但天妒英才，1933 年他在加拿大阿尔伯特滑雪蒙难于雪崩，时年 26 岁。

擅于从工程角度提问的维纳邀请攻无不克的佩利到 MIT 合作研究。维纳提的问题是：电子工程中，滤波器在截止频率附近不可过于尖锐，如何在数学上解释？在剑桥受教于里特尔伍德的佩利，以无比精湛的技巧建立了极为深刻的 Paley-Wiener 定理，其难度之高、涉及面之广，令人惊讶。



英国数学家佩利 (1907-1933)



意大利发明家马可尼 (1874-1937)



法国数学家 Laurent Schwartz (1915-2002)

一个普通的信号，其形式可以相当随意，可一旦辨识出它有某种解析结构，丰富的数学工具就可以发威。能在傅立叶分析和函数论之间架起一座如此美丽的桥梁，把电子工程的疑问回答得如此干净利落，正是 Paley-Wiener 定理的威力所在。可这种深刻的洞察力，已经远离当代教育的平庸追求了。



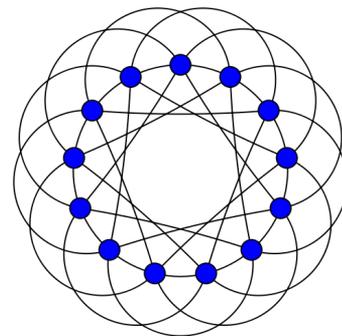
电工电子学一直向数学提出挑战性的问题。比如，如何对 Heaviside 函数求导、给量子力学的 Dirac 函数确立严密的数学基础？历史上曾经有不少人研究过“运算微积”，而最终法国数学家 Schwartz 以广义函数论赢得了菲尔兹奖，他还建立了 Paley-Wiener-Schwartz 定理，成为偏微分方程的核心定理之一。



年仅 26 岁的佩利 (Paley)，受邀美国数学会 1934 年度报告（每年不过 1-3 人），请看历年报告人包括了冯·诺伊曼、Whitney、Zygmund、Doob、陈省身、Kac、丘成桐、威腾 (Witten)、Wiles，再回想 Littlewood-Paley 分解、Paley 图、Paley-Wiener 积分，人们痛惜英国失去了一颗天赋异禀却酷爱冒险的数学巨星。

佩利之死，让维纳难以释怀，哀叹英国就此失去了未来数学的台柱，他称佩利是伟大的传统的英国古典学者。15 世纪以来致力于打造精英的伊顿公学，不仅将佩利培养成谦谦君子，更练就了他的粗犷好勇，外加导师里特尔伍德是位滑雪健将。这一切，令加拿大滑雪胜地班夫的禁滑标志，刺激了一场生命豪赌。

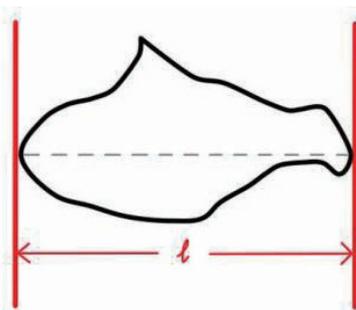
维纳和佩利常泡在 MIT 的旧办公室做推演。每当维纳提出一个难题，两人一筹莫展之时，佩利就会对维纳嚷嚷：不行啊！太难啦！搞不定啊！周末我得去纽约泡泡妞、喝喝酒，放松放松才能接着整啊！而每到周一，佩利总是能把完整的证明带来。这强悍的硬分析功夫，是被一流高手里特尔伍德严格训练出来的。



Paley 图

## 里特尔伍德 Littlewood

真正的高手从来不空谈思想，而是直接亮出功夫。里特尔伍德的功夫有多深？不妨看一个等周问题：平面上一段封闭曲线围出来的几何形状，最远端的两点距离为1，则其面积最大不过是  $\pi/4$ 。里特尔伍德只用了一行大一水平的积分公式，一行高中水平的不等式，就证明清楚了。想不想试试看？

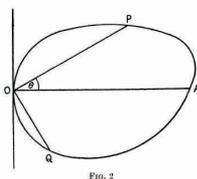


\* § 5. An isoperimetric problem: an area of (greatest) diameter not greater than 1 is at most  $\frac{1}{4}\pi$ .

Proofs of various lengths exist. It is easy to see that we may suppose the area convex, and on one side of one of its 'tangents'.

With polar co-ordinates as in the figure below  

$$\text{area} = \frac{1}{2} \int_0^\pi (r^2(\theta) + r^2(\theta - \frac{1}{2}\pi)) d\theta.$$
 The integrand is  $OQ^2 + OQ^2 - PQ^2 < 1$ .



英国数学家里特尔伍德 (1885-1977)



A MATHEMATICIAN'S  
MISCELLANY

J.E. LITTLEWOOD

里特尔伍德写过一本精彩的《一个数学家的札记》。这本 150 页的小书，仿佛一个老戏骨在出神入化地表演数学的无穷奥妙。书中，他甚至还调侃了一下他的老搭档。某次他让哈代找出他们合写的论文中的一个错，可怜的哈代查了半天一无所获。谜底却是哈代的名字被错印了一个逗号：G, H. Hardy。

里特尔伍德的这本《一个数学家的札记》，颇有毛姆的笔风。看上去都是细枝末节的细小玩意，可真正的人生不就是这样享受细节之美吗？一个数学家的常态，不就是像孩子们一样享受做游戏的快乐吗？他的文笔有多简练？看刚才的问题：提问 2 行，解答 5 行（含公式 2 个），图形 1 个。

但凡出自学术大师，哪怕是闲暇之作，大多像是武林秘籍。更何况是分析大师里特尔伍德，其札记既谈了牛顿、费马、拉玛努金，也谈数学教育和各种八卦。到 80 年代，图论和泛函分析双料权威 Bollobás 搜集了大量新的材料，重新编辑出版。他甚至挖掘出精彩的研究素材，其中有个令人称奇的故事。

这段传奇，要从赫利 (E. Helly) 谈起。此君很早就证明了占据泛函分析中心地位的 Hahn-Banach 定理的一个深刻的特例。赫利身出维也纳大学，曾随希尔伯特一千人马做研究，但在第一次世界大战中不幸被枪击中，被俄军俘虏到西伯利亚战俘营。一战结束后，又逢俄国内战爆发，他辗转日本才回到维也纳。



奥地利数学家赫利  
(1884-1943)

赫利伤在肺部，落下终生病根。战俘营里的这位犹太数学家遇上了一位年轻的匈牙利战俘、原在布达佩斯念土木工程的军官拉都（Tibor Radó）。在西伯利亚战俘营，数学家向土木工程大学生传授起了数学。赫利该不会遗憾，他去世7年之后，他曾在战俘营培养的拉都走上了1950年世界数学家大会，做起了报告。

一战结束后，拉都乘乱逃出西伯利亚战俘营。千里北上辗转转到北极地区，在爱斯基摩人的关爱下，最终逃回到布达佩斯。经赫利调教后的他研究起数学。经历生死逃亡的他，提出了一个问题：圆盘内有个狮子和一个人，他们最快的速度一样，人能否逃脱狮子的追赶？这就是有名的“狮与人”问题。



ON THE PROBLEM OF PLATEAU

拉都的著作

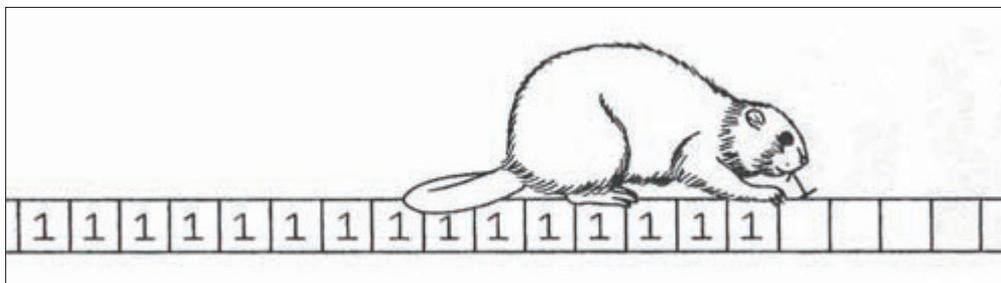
## 拉都 Radó



匈牙利数学家拉都（1895-1965）

■ 如果说数学充满了理性，成就这种理性的过程则不乏艰辛甚至血腥。看看被送到一战前线的家伙们：法国的朱利亚丢了鼻子，奥地利的赫利被抓到西伯利亚战俘营、居然在里面调教出了匈牙利的拉都。后者到美国后，在极小曲面问题上曾一展风采。二战结束后他还受美国之命赴德国搜罗核科学家。

拉都思考数学问题的方式极其生动而形象。比如他提出的“狮子与人”的追逐问题，引出了里特尔伍德乃至 Bollobás 的深入研究。你可以在 Bollobás 编辑的里特尔伍德数学札记里找到踪迹。拉都更为有名的工作，则是在图灵机的停机问题上，提出了“忙碌的河狸”函数，看他总爱直观！





似乎只在电影里才会出现的传奇情节，全在拉都身上真实地发生了：西伯利亚战俘营、北极荒岛、爱斯基摩人、千里逃亡、登上哈佛和世界数学家大会的讲坛。从战争的生死劫难中，宛如逃脱狮子追赶那样逃过一命的拉都，60年代抛出“忙碌的河狸”的开创性论文，全文仅只引用了唯一一篇文献，而论文发表在贝尔系统内部的技术期刊 *Bell System Technical Journal* 上。1948年香农那篇开创信息论和通信理论的历史性巨作也发表在此。

说到期刊，传闻维纳曾将不苟言笑的拉都恶搞过一回。维纳杜撰了一份期刊《数学琐屑》，还杜撰了一堆狂搞笑的论文标题，如“费马大定理：素数为偶数的情形”、“变态数学家的正态分布”。特别题献要“纪念”拉都，还一本正经地宣布因受到国家肃静基金会的及时资助，决定永不出版该刊！

像维纳杜撰《数学琐屑》来哄拉都开心之类令人忍俊不禁的故事，在智者身上数不胜数。大物理学家玻尔主帅的哥本哈根学派，搞过《诙谐物理学期刊》，登的是诗歌和八卦——比如玻尔某次很客气地在会议上评价某人的报告“很有趣”。散会后，老头儿对同事说，刚才的报告“纯粹一派胡言”。

未完待续

作者简介：歌之忆（笔名），生于六十年代，数学博士，任电子信息专业教授十年有余。现阶段在网络数据分析与图像识别等领域主持技术研发。