自然的奥秘：混沌与分形

谨以此文纪念混沌之祖庞加莱逝世一百周年

丁玖

“自然界的大书是以数学符号写的。”——伽利略

(五)巴西海滩的“马蹄”

生于美国密西根州Flint市的斯蒂芬•斯梅尔（Stephen Smale, 1930-）是个有独特个性的数学家，这不光体现在他的数学研究上，也在于他独立思考的政治态度。1966年夏天的8月，中国的文化大革命正在如火如荼之时，毛主席在天安门广场的城楼上接见激动得热泪盈眶的百万红卫兵小将，而此时的斯梅尔达到他个人学术生涯荣誉的最高峰：抵达莫斯科参加有5000人出席的国际数学家大会并领取菲尔兹奖。加拿大数学家菲尔兹（John Charles Fields, 1863-1932）去世前捐出47000美金建立了这个“数学的诺贝尔奖”，每四年全世界40岁以下的数学家只有二到四人获此殊荣，比得诺贝尔奖还难。

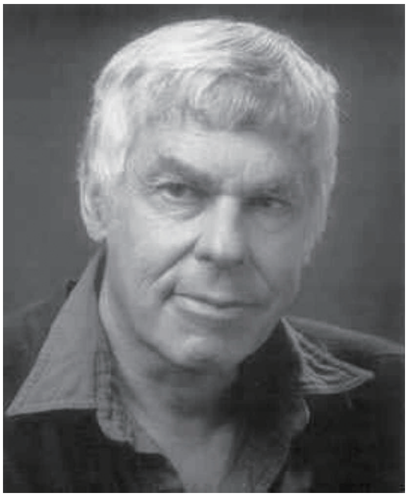
在国内，意气风发、精力充沛的斯梅尔就是一位“反越战英雄”。美国国会恰巧在他获菲尔兹奖的当天正在举行听证会，调查他和鲁宾（Jerry Rubin, 1938-）1965年在他任教的加州大学伯克利校区建立从事反战抗议活动的“反动”组织“越南日委员会”并担任共同主席的这件事。国际数学家大会快要结束之际，在莫斯科大学的宽阔台阶上，年轻时曾经“左倾”的斯梅尔应一位北越记者的邀请举行了记者招待会。他以谴责他自己的国家对越南的武装干涉开始，这让招待会在场的主人、冷战时期的苏联人大喜过望。

突然间，他话锋一转，进而谴责苏联入侵匈牙利以及国内缺乏政治、言论和出版自由，这让刚刚高兴的主人尴尬不已。由于公开得罪了超级大国的政府，他立刻被请入汽车，在公众视野里消失了几小时，但仍受苏联官方礼遇，未有太大麻烦，可能是受惠于手中的菲尔兹奖章。还未回到美国，国家自然科学

基金会主任就毫不留情地马上扣下了资助他研究的两个月夏季薪水的第二张支票，并指控他一大堆“经济问题”，如“滥用政府资助，整夏欧洲旅游”。所谓“欲加之罪，何患无辞”。第二年当他继续申请自然科学基金会资助时，某些让基金会领导害怕的美国国会议员还不想“放他一马”，百般刁难。生性倔强的斯梅尔毫不妥协，在校方及数学家同仁的支持下最后以胜利告终。这真是极具讽刺意义的故事：批评过苏联缺乏言论自由的斯梅尔在标榜“自由、民主、平等”的祖国也饱吃了一餐“言论自由”的苦果。

斯梅尔出生在一个美国的共产党员之家，青年时代的他也加入过这个组织。这并不奇怪。在那时代，熬过三十年代大萧条的美国人有许多对共产主义的想法发生了兴趣，向往苏维埃制度。当代美国有数学家布劳德三兄弟（Felix Browder, 1927-, William Browder, 1934-, Andrew Browder），前两位都曾当过美国数学学会的会长。 他们的父亲老布劳德（Earl Browder, 1891-1973）担任过十六年美国共产党的主席（1929-1945），直至被他的“同志们”赶下了台。奥本海默年轻时也在共产党组织的边界上徘徊过，他后来自杀的美丽未婚妻以及他的弟弟都是共产党员。

斯梅尔在家乡一所仅有一间教室的简陋的乡村学校读到八年级，以全班第三名的成绩高中毕业，没有显现任何天才迹象，但被视为一个孤独者和象棋高手。不像匈牙利的冯•诺依曼或美国的费恩曼，中学时代的他不太是一个“算得快”的少年，可能像中国的传奇数学家陈景润（1933-1996）一样不太适合参与奥林匹克数学竞赛。他获得四年免学费奖学金在离家仅仅一步之遥的号称“美国大学之母”的密西根大学读本科，后来一直读到1956年，在



斯梅尔（1930-）

年轻的教授、匈牙利人博特（Raoul Bott, 1923-2005）门下获得他的博士学位。在密西根教书三十年后去了哈佛的杰出数学家博特是一个高大的斯洛伐克人，他在1953年开设了一门代数拓扑课，除了一大群旁听教师，只有三名本土的研究生注了册，其中的两人，斯梅尔和芒克斯（James Raymond Munkres, 1930-），都成了著名的拓扑学家，后者的教科书《拓扑学》一直是这个行当好评如潮的大学生标准教材。后来，博特却以调侃的口吻说过，第三位的研究生贝利（James Berry）是“真正聪明的一个”，可惜他未完成学位。

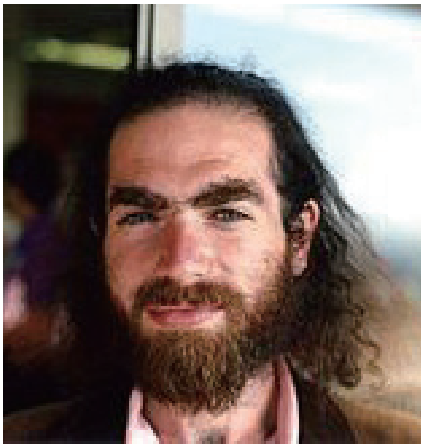
除了大一算是好学生，斯梅尔本科期间后三年的成绩大都是“非B即C”，甚至核物理课拿了个不体面的F（不及格）。这一部分原因是他对敏感政治活动的投入，在麦卡锡（Joseph McCarthy, 1908-1957） 主义“清算共产主义”方面不光与官方不配合，反而经常与校方对着干。幸运地被本系录取为研究生后，他的平均成绩依然是C, 直到1953年6月收到系主任一封措辞强烈的“最后通牒”信，威吓着要赶他走，这才真正用功起来。从此，政治向数学低头，马列主义让位于拓扑学。大器晚成的他真是个“浪子回头金不换”的最好正例，也是流行中国的口号“不让孩子输在起跑线上”的最好反例。后来的斯梅尔以强有力的数学洞察力著称于世，例子之一就是他拿到博士之后在其学术生涯第一站的芝加哥大学教书首年，就与一般直觉相反地证明了数学意义上的“球体翻转”——他有生以来第一个世界级水平的结果。

斯梅尔最伟大的工作都和庞加莱创立的拓扑学和动力系统有关。拓扑学研究的是几何图形在像挤压、拉伸或扭曲这样的“连续变形”下仍然保持不变的那些性质。在欧几里得（Euclid, 前330-前275）的几何里，圆和椭圆是两样完全不同的东西，但在拓扑学里它们却被看成是一模一样的东西，因为一个圆铁圈一被挤压就变成一个椭圆圈。但是，一位少妇手腕上戴的玉镯表面和她儿子玩的皮球表面不光在欧几里得几何里不一样，在拓扑学里也不一样。学过拓扑学的学生都会津津有味地谈论为什么每个人头顶上都有一个旋窝，不长头发，他们也知道为什么地球上不可能每个地方都同时刮“不管是西北风还是东南风”。

像斯梅尔这样的拓扑学家们考虑一个几何物体是否连通、是否有洞、是否打结。他们研究比我们的眼睛可以看到的一维曲线或二维曲面更为一般的“拓扑流形”。斯梅尔获得菲尔兹奖的成就是证明了对于维数大于四的“广义庞加莱猜想”，即1904年庞加莱提出的关于一类三维流形是否能与三维球面“拓扑等同”的著名猜想在四维以上的情形。四维的广义庞加莱猜想1982年被美国人佛雷德曼（Michael Freedman, 1951-）解决，并获菲尔兹奖。庞加莱猜想最终被俄罗斯数学天才佩雷尔曼（Grigori Parelman, 1966-）“临

门一脚”攻破，但他不光拒绝了随之而来的菲尔兹奖，而且拒绝接收由美国波士顿的成功商人兼数学爱好者克莱（Landon T. Clay）夫妇1998年设立的克莱数学研究所为全球公开悬赏求解庞加莱猜想而设立的一百万美元的奖金。

佛雷德曼 (Michael Freedman, 1951-)



佩雷尔曼（1966-）

当斯梅尔摘取了庞加莱之树的第一个果实并奠定了他在本领域中的大师地位后，他“挥泪告别拓扑学”，踏进了动力系统的新疆场。奇怪得很，庞加莱这个取名为“动力系统”的小儿子在他死后五十年间没有他另一个儿子“拓扑学”那么风光，研究者寥寥无几，尤其是与微分方程有关的“微分动力系统”。历史是如此的巧合，几乎是同时，当洛伦茨在北美洲东海岸的美国麻省理工学院摆弄着他的天气模型时，斯梅尔在南美洲巴西里约热内卢的纯粹与应用数学研究所和临近的Copacabana海滩上发明了他的“马蹄”。

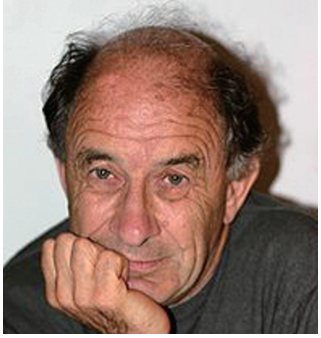
斯梅尔首先考虑的问题与动力系统的“结构稳定性”有关。低维系统的结构稳定性概念源于三十年代以柯尔莫果洛夫（Andrey N. Kolmogorov, 1903-1987）为首的苏联学派。1961年被美国哥伦比亚大学高薪挖去当正教授前，刚刚三十出头的斯梅尔在莫斯科见到比他更为年轻的四位崭露头角的数学家阿诺索夫（Dmitri V. Anosov, 1936-）、阿诺德（Vladimir I. Arnold, 1937-2010）、诺维科夫（Sergei P. Novikov, 1938-）和西奈（Yakov G. Sinai, 1935-），令他刮目相看，并叹息一声“西方并无这种组合”。巴西数学家佩肖托（Mauricio Peixoto, 1921-）研究圆这个特殊的数学框架时用到结构稳定性，但他未能将他得到的有关结果推广到更一般的动力系统。斯梅尔1958年申请到国家自然科学基金会两年资助到普林斯顿高等研究院做“博士后”研究，认识了早一年去那里访问的佩肖托，并洞察到这一概念的巨大前景。

但是一开始，斯梅尔就给出了一个关于稳定性问题的错误猜测。其实，在研究家的探索过程中，这不奇怪。现在哈佛任教的卓越华人数学家丘成桐（1949-）因为证明极其难解的“卡拉比（Eugenio Calabi, 1923-）猜想”是对的，1982年荣获菲尔兹奖，但是一开始他差点儿“证出”卡拉比猜想是错的。

生活中到处都有关于稳定性的问题。站在高山之巅上欢呼的人要特别地小心，因为稍有不慎就会坠入深渊。但是年轻的父母不必担心放在圆锥形摇篮内的婴儿会掉下来。前一个情形的平衡状态是“不稳定”的，因为一个小小的扰动就回不了原先的平衡位置，而后一种情形的平衡状态却是“稳定”的，因为任何一个小扰动不会妨碍又回到原先的平衡位置。

上述的“稳定”或“不稳定”是关于一个固定系统的一个平衡点而言，因而称之为“平衡点的稳定性”，这是一个局部性的稳定性问题。斯梅尔关心的是一种全局性的稳定性问题，即当动力系统本身稍微改变一

柯尔莫果洛夫（1903-1987）



阿诺德（1937-2010）

诺维科夫（1938-）

西奈（1935-）

维纳（1894-1964）

莱温松（1912-1975）

范德波尔（ 1889-1959）

点时，系统的解是否有本质性的变化。这就是系统的“结构稳定性问题”。

如果原为圆锥形的山顶削成四面体形锥体，站在上面还是一样危险。同样，如果把圆锥形摇篮做成更为美观的半圆形摇篮，婴儿照样安全。所以，这些系统的小小改变并没有改变平衡点的性质，系统是“结构稳定的”。

有“结构不稳定”的例子吗？会画指数函数图像的人就有一例。中国的高中生都知道每一个以大于 1 的数 a 为底的指数函数 $y = a^x$ 的曲线都经过 y- 轴上半部和原点相距为 1 的那个点。它向上弯曲（向下凸）并且递增，底越大，递增越快，曲线越陡峭，底越靠近 1，递增越慢，曲线越平坦。当底为某一个特别的常数时，更确切地说，为 e（约为 2.71828）的 e 分之一次方这个在 1.445 附近的常数时，这条曲线恰好与 xy- 轴的对角线 $y = x$ 相切于 (e, e) 这个点，并站在对角线的上方。这就保证了这个特别的指数函数有，并且只有一个“不动点”（刚好为 e）。只要底比这个常数小，对应的曲线和对角线相交于两点，就是说该函数有两个“不动点”，而底大于这个常数的曲线再也不碰到对角线了，这时的函数就没有任何“不动点”。没有学过高中代数的人可以想象一根竖着的朝上开口的抛物线铅丝向上“穿过”一根挂衣服的水平绳线时的情形：先有两个截点，然后是一个切点，最后没有交点。

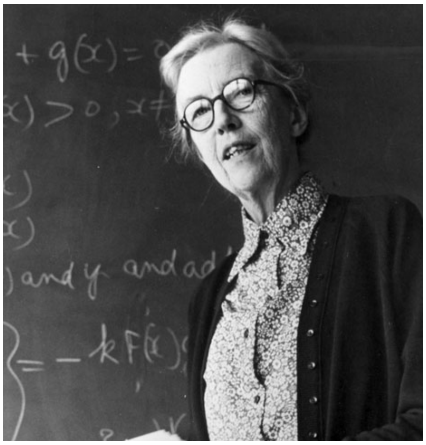
上面一段落的“千言万语”汇成一句话：底为 $e^{1/e}$ 的指数函数这个“系统”是“结构不稳定”的，因为底的变大或变小改变了不动点的数目。实际上，连不动点的性质也起了变化。懂得初等微积分并喜欢读读“课外书籍”的大学生可以打开《美国数学月刊》的姐妹期刊《高校数学杂志》（The College Mathematics Journal）2009 年 11 月的那一期，翻到一篇名叫“指数函数的动力学”的文章，其第二、三页上就有你想要看到的图形和分析。

斯梅尔考虑的描述微分动力系统的微分方程，带有可以取不同值的某些参数。例如，对于洛伦茨研究的热对流天气模型，流体的粘性指数就是一个参数。参数的大变化当然导致系统的解的大变化。自然地，人们都希望，小小的参数变化只会导致系统的解的微小变化，并且不改变解的主要性质，也就是说，系统是结构稳定的。

斯梅尔最开始的错误猜测大意是：具有不规则解的微分方程（即后来所称的混沌系统）不可能是结构稳定的。他定义了一类结构稳定的微分方程，后来被大家称为“莫尔斯（Marston Morse, 1892-1977）- 斯梅尔型”，并宣称任何一个混沌系统都可用这类方程中的一个来任意逼近。学过大学矩阵理论的人可以这样来类比：具有固定行数和同等列数的所有的“非奇异矩阵”都可被看成是“结构稳定的”，而每一个“奇异矩阵”可被某个非奇异矩阵任意逼近。可惜的是，矩阵的这个性质在微分方程中的类似并不成立。

正当斯梅尔和他的太太在里约热内卢的临时公寓里被他们两个婴儿的尿布忙得不可开交时，1960 年元旦前寄来的一位数学同行的信让他大伤脑筋，就像十多年后年轻气盛的明日之星丘成桐公开宣称“卡拉比猜想”不对后不久，收到意大利出生的犹太人、美国宾夕法尼亚大学数学系讲座教授卡拉比本人寄来的“质疑信”那样令人苦恼。

这封信来自一位在维纳的熏陶下由电子工程硕士转变成的数学家、



卡特赖特（1900-1998）

李特尔伍德（1885-1977）

也曾是共产党员并在1953年在专门设立的调查共产党的国会非美委员会巨大压力之下“反悔”的麻省理工学院教授莱温松（Norman Levinson, 1912-1975）。他在信中描述了他于1949年发表的一篇论文中所考虑过的一个既是混沌的又是结构稳定的系统，小小的扰动并不让解的不规则性态消失掉。其实，这个“斯梅尔猜想”的反例是四十年前被一名荷兰工程师和物理学家范德波尔（Balthasar van der Pol, 1889-1959）研究过的刻画具有周期驱动电路的一个二阶非线性常微分方程。这个系统的解是不可预测的，但系统却实实在在是结构稳定的，和摇篮里的婴儿一样稳定得“固若金汤”。事实上，斯梅尔后来知道，洛伦茨将要研究的那三个微分方程解的不规则性在小扰动下也是保持不变的，但是他们当时并不认识对方，直到七十年代初约克把洛伦茨的论文给了斯梅尔后，他才知道洛伦茨这个人及其工作。

得到莱温松这个重量级数学家的启发，受过拓扑学训练而导致几何思维发达的斯梅尔深思熟虑，一下子“豁然开朗”。在他1998年发表在美国大众数学杂志《数学信使》（Mathematical Intelligencer）第二十期上的混沌：在里约的海滩上发现马蹄”这篇文章里，他回忆道：

“无论如何我最后说服自己莱温松是对的，而我的猜想是错了。混沌已经隐含在卡特赖特与李特尔伍德的分析之中！迷途已经解开，而我则作出错误的猜测。但是在这学习的过程中，我发现了马蹄！”

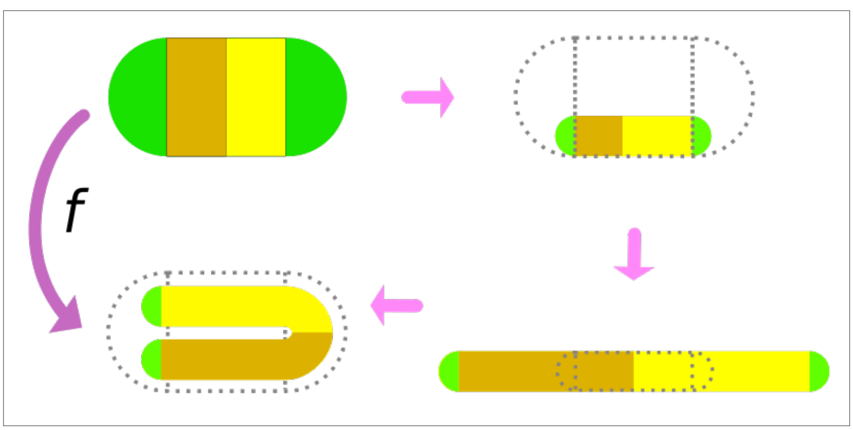
作为哈代（Godfrey H. Hardy, 1877-1947）与李特尔伍德（John E. Littlewood，1885-1977）这一“强强联手”在哈代70岁过世之后的“解析延拓”——哈代的博士生、“少有翻版”的英国女数学家卡特赖特（Mary Lucy Cartwright,1900-1998）与李特尔伍德形成了一个新的“科学组合”，他们对微分方程理论的精深研究，影响了这个领域的几代学者。

这个孕育在巴西海滩上的斯梅尔“骏马铁蹄”是怎样的东西？它又怎样踏进混沌的疆场？

我们在纸上画一个长方形，用A、B、C、D从左下角起顺时针来依次记它的四个顶点。我们设想把长方形横向拉长，同时纵向缩短，变成一个瘦长的长方形。这个过程有点像山西人做拉面，面条越拉越长、越拉越细。然后把它弯曲成一个马蹄形，使得长方形的左边出现在马蹄的上面顶端。马蹄对应的四顶点依次记为A’、B’、C’、D’。下一步将马蹄放到原先的长方形上，它们相交成位于长方形内的两个有一定距离的平行的狭长长方形。

把这些操作复合成一步完成，就可以想象这定义了一个把长方形映到马蹄上的函数 h，它把长方形的每一个点映射到马蹄的一个点，例如，h 把A点映到A’点，不同的点映到不同的点，相近的两点映到相近的两点。反过来，马蹄的每一点都是长方形的某一点被 h 映来。这个函数是一个拓扑学家们经常挂在嘴上的“拓扑同胚”。

斯梅尔构造的这个“马蹄函数”不属于他以前提出的“莫尔斯-斯梅尔型”的。他证明它不光是混沌的，而且是结构稳定的。其混沌与庞加莱在求解“三体问题”时苦苦思索



斯梅尔的“马蹄

康托尔（ 1845-1918）

过的同宿点存在性有关。同宿点联系着系统在将来和过去的相反方向时间都趋向于同一个不动点这一平衡状态。从美国第一代数学家领袖之一莫尔（Eliakim Hastings Moore, 1862-1932）手中拿到芝加哥大学博士文凭的伯克霍夫沿着庞加莱的思路进一步证明在同宿点附近有无穷多个周期状态。但是他的工作在之后的几十年内只是在故纸堆里睡大觉，一直到斯梅尔在巴西的研究所里叫醒它。

斯梅尔还记得当时的情形："我从检视纯粹与应用数学研究所图书馆内的伯克霍夫文集而知悉同宿点和庞加莱的工作。"

我们已经看到在马蹄函数作用一次后，原先的长方形中有一部分的点将留在长方形内，这些点事实上构成两个平行的瘦高长方形。运用想象力，可以感知如果连续作用马蹄函数两次，那些仍然留在长方形内的那些点将组成四个平行的更瘦削的长方形。作用三次，就有八个平行的细细的长方形，看上去像物理光学实验课上看到的黑白相间的光谱线，它们的点在迭代马蹄函数三次后还留在原先的长方形内。不断迭代下去，我们就会"看"到愈来愈细、愈来愈多的"光谱线"。山西手工拉面的行家可能更容易体会它：多次拉面的动作就会拉出越来越多、越来越细的面条。这个漂亮的"几何图像"让我们立刻想起一个人，一个由于受到大权在握、极其富有金钱的同胞数学家克罗内克（Leopold Kronecker, 1823-1891）全方位的"数学迫害"，前后三十年一连串精神失常并在疯人院度过一生最后时光的倒霉德国人——"集合论之父"康托尔（Georg Cantor, 1845-1918）。

康托尔三分集

十九世纪末期的1883年，康托尔构造了实数轴上的一个点集合。他把0到1之间的数区间[0, 1]这一线段分成三等份，然后把中间那个等份的线段去掉，但留下它的1/3和2/3这两个端点。在剩下的两个线段[0, 1/3]和[2/3, 1]中再去掉中间的三分之一。这样就剩下四个小线段：[0, 1/9], [2/9, 1/3], [2/3, 7/9], [8/9, 1]。再去掉每一段中间的三分之一，如此重复做下去，直至无穷。这样构造的一个点集称为"康托尔三分集"，它包含所有被挖掉的线段的端点和其他没被挖掉的点。事实上，这个康托尔集由不可数个点组成，但它本身不包含长度可以任意小的任何线段，无限地稀疏。

康托尔三分集的几何有个有趣的特色，这个称为"自相似性"的性质后来被"分形学"借了过去而大放异彩。如果我们只局限于看到三分集从0到1/3的这一段，一旦放大三倍，就会发现它的结构和原先的整个三分集一模一样。把0到1/27这一段放大27倍也是一回事。其实，三分集的任一小段放在放大镜下看都和整个三分集完全相同，就像小皮球放大一亿倍后看上去是个大月亮。这个数3就是康托尔集自相似性的"放大因子"。

康托尔的这个集合虽然出现在数学系本科生所修的课程《实变函数论》的教科书中，但跟他的其他伟大发现相比简直是"小巫见大巫"，只是他创造的震撼数学界的"集合论"大餐中的"一碟小菜"而已。故贝尔在他的大作《数学伟人传》中最后一章"失乐园？康托尔"谈到他的数学时就根本没提及到它。康托尔集除了在《实变函数论》中偶尔露个面，被关在集合论的象牙塔里几乎一百年，和美不胜收的自然界"老死不相往来"。

斯梅尔的马蹄动力学就这样和康托尔三分集联姻起来。将伯克霍夫早先的想法再向前推进，斯梅尔证明了他的马蹄函数同宿点的存在以及由此产生的迭代过程最终性态对初始状态的敏感依赖性，而这就是混沌的本质。几年后，他那里程碑式的著名长篇综合报告"微分动力系统"也在1967年被《美国数学会通报》（Bulletin of the American Mathematical Society）发表，马上被这个领域的建筑师们欢呼为一座"标志性大厦"

当数学家斯梅尔在他的微分动力系统开创性研究中大玩"高深数学"而大显身手的时候，他大概对一般只用到一点点"低级数学"的

马尔萨斯（1766-1834）

马寅初（1882-1982）

罗伯特•梅（1936-）

生物学"不屑一顾"。然而，就在这时，普林斯顿大学的一位动物学教授斩钉截铁地向世界宣告：简单的数学模型也可能复杂得令人咋舌。

（六）莫名其妙的人口涨落

十八世纪末的1798年，英国有位名叫马尔萨斯（Thomas Robert Malthus, 1766-1834）的经济学家出版了一本书《人口论》，忧心忡忡地提出了他的"人口理论"：人类赖以生存的生活资料是以算术级数增长的，然而人类自己却是以几何级数增长的。如果 n 代表未来的年数，前者的增长像 n^2，后者的像 2^n。当 n 为20时，20^2 仅为400，但 2^{20} 已经超过一百万。马尔萨斯解决人口过剩的简单而冷酷的办法是：战争。

一百六十年后，东方的中国也有一位姓马的经济学家。他的全名是马寅初（1882-1982），早年拿过美国哥伦比亚大学的博士学位，时任北京大学的校长。1957年，他在《新人口论》中也忧心忡忡地担心中国的人口如不注意节制，就增长太快了。他的担心是对的，但是相信"人多力量大"的最高领导认为他杞人忧天，不是另一个姓马的"共产主义之父"马克思的信徒。虽然他多年失去话语权，但每天洗冷水浴的他比活了99岁的贝特还多活一年。

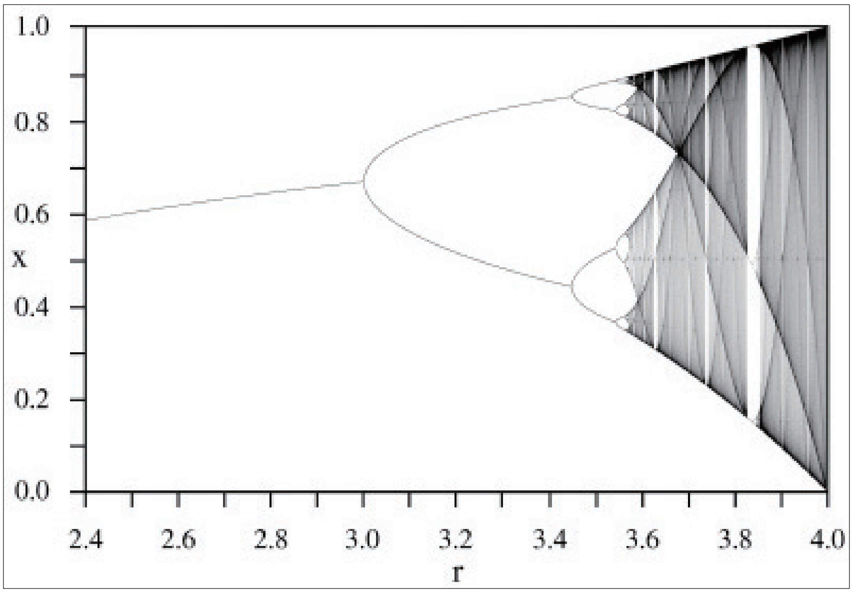
"人口动力学"这个学科并不一定要研究人，尽管研究人口很重要。中国人宋健（1931-）的"人口控制论"研究就在国际上有口皆碑。人口动力学更正式的名字叫"生态学"，英文术语是Ecology，研究的是生物种群数目的涨落、生命的盛衰。曾为英国"首席科学家"的罗伯特•梅（Robert M. May, 1936-）男爵就是在生态学领域里发现了混沌现象的一位生态学家。

梅和乌拉姆一样，生于律师之家，但不是犹太人。他1959年在祖国澳大利亚的悉尼大学获得理论物理学博士学位，然后去哈佛做了两年"博士后"，研究应用数学。回到母校做到理论物理正教授之后，他"心血来潮"地对生物学着了迷，1971年他到普林斯顿高等研究院呆了一年，不干别的，专找普林斯顿大学的生物学家"聊天"。1973年，硕果累累的他就成为普林斯顿大学的动物学讲座教授。

当年马尔萨斯的人口无限制增长模型太过粗糙了，因为它只用到线性函数。在食品无限充足的最理想情况下，如果一个种群的数目每年按某个增长率增加，那么种群下一年的数目为一个大于1的参数 r 乘上当年的数目，即迭代的函数为线性函数 $f(x) = r\,x$。这样的话，种群个数最终趋向无穷大，就像放在银行的存款永远不拿那样。然而，任何生命体有生，也有死，有复杂的生存环境，如天敌的存在。非洲狮子的数目不可能无限制增加，因没有足够多的斑马供它们享用，同样，斑马也不会太多，因为狮子总想吃它们。

这样，种群的数目必定随时间有升有降。要得到更反映现实的模型，生态学家合理地假设：种群数小时上升很快，数目适中时增长速度为零，而在数大时急剧下降。如果我们用0表示绝种，用1表示可设想的最大种群数，那么"相对种群数"x 由0与1之间的一个数来表示。满足上述自然要求的最简单的"相对种群数"函数是拿原先的线性函数 $r\,x$ 乘上因子 $(1 - x)$，得到的函数是一个二次多项式 $f(x) = r\,x\,(1 - x)$，其中参数 r 代表着种群的增长率。当 x 上涨时，$1- x$ 下跌，它们的乘积就会制约种群数目的变化。

这个最简单的二次模型称为"逻辑斯蒂模型"。它的函数图像是开口向下的抛物线。当 x 从0上升到1/2时，函数也跟着上升，但当 x 从1/2继续上升到1时，函数却随之下降。这恰恰反映了种群数目的涨落规律。



逻辑斯蒂模型的分支

这个函数的计算看上去连初中生都会难不倒，但在梅对它发生极大兴趣之前，没有人想到它的迭代点走向会复杂得如此令人眼花缭乱。后来的发展跟生态学家以前“种群数以相当规则的周期性在某个平衡点附近上下浮动”这个在大众眼里也说得过去的传统观念相悖。

梅开始了这样的迭代，并逐步增加参数值 r。他发现，当 r 不超过 3 这个数时，一切都很正常。比如说，如果参数 r 小于 1，那么无论起先有多少种群数，最迟第二年以后它的数目就逐步减少，最终走向消亡。但当 r 在 1 和 3 之间时，最后的种群数会逐渐稳定下来到某一个固定数，而全然不管开始的种群有多少。这个固定数随着参数增加而增加，在图像中表示为一条上升的曲线。举例来说，当参数为 2.7，最终的种群数固定在 0.6296，而参数在 3 时，终极种群数增加到 0.6667。

他继续加大参数的值。当 r 比 3 大得不多时，直到大约 3.45 的时候，他发现了新的现象：固定数曲线像《西游记》中沙和尚的月牙铲一分为二。种群数不再最终趋向于一个固定的值，而是按年份交替地先升后降（或者先降后升），最后在两个不同的固定数之间不停地来回跳动，而与最初的种群数无关。让参数值比 3.45 再大一点点，直到差不多 3.54 时，“月牙铲头”的两端又各生一个新的小“月牙铲”，即种群数每过四年有规则地涨落，最终在四个固定数之间周而复始地跳来跳去，而不管种群的初始数目有多大。这样一来，种群数的两年周期现象加倍成四年周期现象。

随着参数值一步步地提高，种群数目的周期数一次次地加倍。这种“倍周期分叉”现象既复杂得令人目瞪口呆，又美丽得令人目不暇接。这使我们想起古代中国的《周易》内的一列排比句：

“无极而太极，太极而两仪，两仪生四象，四象生八卦。”

这些分叉的参数值向前移动步伐越来越小，速度越来越快，周期数依次走过 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, …，突然参数值到达一个极限点，在这一点的参数值，其不错的一个逼近是 3.57 这个数，周期现象戛然而止，种群数开始呈现一种像随机数一样无规律的涨落现象。

但当参数值继续向前走，稳定的周期又飘然而至，继续上升后，又冒出一个具有像三或七这样的奇数周期的“周期窗口”，在此窗口内，以周期三或周期七开始的倍周期分叉更快速地行进，然后再次中断而进入新的混沌。

这些都是在参数还未走到最大容许值 4 之前发生的怪事。当参数靠近 4 时，其迭代序列也变得愈加复杂。最后，参数为 4 时的种群数模型就是乌拉姆和冯•诺依曼研究过的那个函数，它复杂的动力学性态早已为人所知。

梅只看到参数由 3.45 变到 4 这整个图形的部分现象。这就足够了，“简单数学模型具有极其复杂动力学行为”的这一惊人发现足以让他在《科学》和《自然》这些顶尖学术期刊上让全世界的人看到自然界的新奥秘。关于这个最简单的非线性模型的大量数值实验将由纽约大学柯朗（Richard Courant, 1888-1972）数学研究所的生物数学家霍本斯台特（Frank Hoppensteadt, 1938-） 来完成。他选取了好几千个参数值，在计算机上画出迭代的参数变化分叉图像。他最后由此而拍成的电影充分显示了从分叉到混沌、从有序到无序不同瞬间的千变万化。霍本斯台特后来当过李天岩任教的密西根州立大学的理学院院长，还保持对研究的热爱。他八十年代在数学系放映了他的电影，让当时刚入学不久，李天岩教授招来的还不懂混沌的中国大陆弟子们大开眼界。

梅和洛伦茨一样发现了在不同学科中出现的自然界混沌现象，但是依然困惑于数学上精确、贴切的解释。历史给了数学家极好的机会，在这些科学研究的背景下，混沌的数学概念在李天岩与约克的著名论文中横空出世。

（七）“周期三则乱七八糟”

1973 年 3 月的一个星期五下午，美国马里兰大学数学系的博士研究生李天岩来到他博士论文导师约克教授的办公室吐了一阵子“苦水”，到现在他还记得当时吐的是什么苦水，大概是什么“非少年维特”类型的烦恼吧。

约克完全没有理会他吐的苦水，却说，“I have a good idea for you!”

这个想法已在约克头脑中直观地凸现，但他未能予以证明。那时李天岩正在做微分方程方面的研究，以为他所谓的“good idea”是关于那个方面的“高深想法”。但是，他心中的那点不爽还在那里。

李天岩（稍有羞辱并半开玩笑地）：“Is your idea good enough for the Monthly?”

Monthly 指的就是美国几乎每个大学数学系都订阅的《美国数学月刊》这个一般大学生都能看得懂的浅近杂志。当李天岩从约克嘴里得知这个牵涉的语言非常基本的“idea”之后，马上感慨地说：

“It would be a perfect work for the Monthly!”

李天岩祖籍湖南，1945 年 6 月出生于福建省沙县。他的父亲李鼎勋早年留学日本东京帝国大学医学院，获得医学博士学位，1934 年回国任教湖南湘雅医学院，1939 年起任福建省省立医院院长。

李天岩曾经回忆道：“我父亲当初在湘雅医学院教书时，把小叔李震勋从家乡带出来到湘雅念书。可是小叔要‘革命’。父亲跟他说，你要革命可以，可是要把书念好了再‘革’。小叔还是跑到延安念‘抗大’。解放后，他做了第一任的大连医学院院长。1958 年反右，他就下台了。1968 年文革时，再抓出来斗一斗就斗死掉了。我们在台湾知道了这事，都不胜唏嘘。”

李天岩三岁时，国民党在大陆大势已去，他的父亲也到了台湾，而他随母亲还滞留在上海。母亲家中及亲戚们劝她及孩子们不必逃了，定居下来再说。他们说这只是换朝代，几个月后就会平静下来了。可是父亲却坚持认为“绝非如此”，一定得离开，因为前景是不可预测的（这正是“混沌”的本质意义）。

李天岩母亲当时说：“我必须立即去台湾，因我丈夫在那里！”

多年后，当李天岩的学生丁玖（本文作者），听到他亲口讲述的这段往事时，感慨万千。

丁玖对他说：“如果你母亲当初做了相反的决定，那你就是大陆‘文化大革命’中众多命运多舛的五类分子之子。”

是呀，如果历史改写，难以想象那个未来出了大名的“李约克”混沌的“姓”会是哪个“张三李四”。

李天岩与母亲感情极深。他 1969 年离家赴美后的几十年内从不中断地给常年住在台湾的母亲寄信，一写一整页，直到她 2007 年以 89 高龄去世。有一天，他问丁玖：

“你多长时间给你母亲写一次信？”

“大约一个月一封，基本是双方收到信就很快回信。”他的学生不无自豪地答道，因为深知“烽火连三月，家书抵万金”的他相信二十年如一日坚持写家信给远在家乡扬州、“桃李满天下”的父亲丁一平和母亲王柳风，在大陆留学生当中也不会多见吧，因为打越洋电话既方便又便宜。

“我每周写一封。”

“那怎么可能？你妈妈还没有收到你的信呢。”

“一星期写一封反而好写多了，什么鸡毛蒜皮的事都可以写。若是半年写一封还真不知写什么好。”

李天岩在台湾读书直至大学毕业，1968 年为新竹清华大学数学系第一届毕业生，成绩名列前茅，踢过足球，也当过大学篮球队队长，是个全面发展的好学生。在按规定服役军队一年后，他赴美国马里兰大学数学系攻读博士学位。不久就通过博士资格考试，跟随约克教授做博士论文。

李天岩曾听约克说过他当年在哥伦比亚大学读本科时，“没有 B”。在中国式教育环境中长大的李天岩以为他“全是 A”。

约克却说：“全是 C 或 C 以下。”

看来约克和斯梅尔大学读书时差不多一样“差”，或许“更差”点。这令人想起 1976 年诺贝尔物理奖获得者、祖籍山东日照的麻省理工学院实验物理学家丁肇中（1936-）曾经说过的一句“俏皮话”：“我没有听说过哪一个诺贝尔奖获得者曾经是班上的第一名，倒是听说过是班上的倒数第一。”

2005 年 5 月在李天岩的母校台湾新竹清华大学主办的庆祝他六十周岁生日的“数值分析与动力系统国际研讨会”上，约克承认当初上大学时是“有一、两个 B”。“大概是体育课之类的，”他笑眯眯地对他昔日徒弟说。

詹姆斯 • 约克（1941-）这个纯粹的美国教授一生致力于数学与科学的联姻，他对上世纪上半叶领头的英国数学家哈代在其著名的随笔《一个数学家的自白》（A Mathematician's Apology）中以“无用”作为“美学标志”并引为自豪的纯粹数学家“象牙塔”式研究颇不以为然。1963 年本科一毕业，他就直奔马里兰大学读数学博士，只因那里有一个流体力学与应用数学研究所这一巨大的“非奇异吸引子”。倘若过去一百年来世界上最伟大的两名数学家庞加莱和希尔伯特（David Hilbert, 1862-1943）都在马里兰大学教书，约克会

毫不犹豫地选择庞加莱作为他的博士论文导师的，因他在言行上与前者那个法国人更为合拍，而至少在哲学上不太欣赏后者那个东普鲁士人更重视公理化、形式化的数学思想。

1972年，马里兰大学气象学教授费勒（Allen Feller）将洛伦茨关于气象预测模型的那四篇在气象学家眼里理论性太强、数学味太浓的论文递给了同在流体力学与应用数学研究所的约克教授，认为数学家们也许会感一点兴趣。多亏了费勒的“引见”，约克和他的博士研究生李天岩才能接触到洛伦茨发表在气象期刊上的论文。他们的确对此“甚感兴趣”，约克甚至将那篇最重要的一文“确定性的非周期流”复印一份，在首页贴上了自己的名字和地址，交给了来访的斯梅尔。后者惊奇地读到一位气象学家十年前就发现了自己一度认为数学上不大可能的一类混沌现象，接着他也复制了许多份给别人看看。因为约克的大名也被复印上了，这就是为何坊间曾经流传过“约克‘发现了’洛伦茨”这一说法。

约克从洛伦茨试图求解的那三个微分方程的解对长远时间的“不可预测性”，提炼成一个关于函数迭代最终性态的问题。他猜测，一个连续函数只要有一个周期为三的点，这个函数的迭代就大有玩头。所以，他要他的得意弟子试试能不能证明他的判断。

什么是“周期为三的点？”一个过程如果连续使用三次，又回到初始状态，这就是周期三现象。比如三个小朋友玩皮球。甲把球抛给乙，乙将球抛给丙，而丙又把球抛给了甲。这就完成了一个周期三循环。

中学生都知道什么叫函数。对于一个给定的函数f，如果存在三个互不相等的数a, b, c，使得函数f在a的值为b，在b的值为c，在c的值为a，那么我们就说函数f有一个周期为三的点，并有一个周期三轨道$\{a, b, c\}$。比如，让我们观察下面这个函数$f(x)$：

当x大于或等于0并且小于或等于1/2时函数值为2乘上x，而当x大于或等于1/2并且小于或等于1时函数值为2乘上1减去x。

这个“逐片线性函数”的函数图像就像第二次世界大战时，英国首相丘吉尔（Winston Churchill, 1874-1965）把他粗壮的食指和中指分开形成的那著名的英文单词“Victory”（胜利）大写第一个字母“V”，但是把它上下颠倒一下。它看上去又像远方的帐篷或我们头上戴的帽子，故想象力丰富的数学家们把这个函数也称之为“帐篷函数”或“帽子函数”。每一个人都能够算出函数值当x等于2/7时为4/7，当x等于4/7时为6/7，当x等于6/7时又回到2/7。这个最简单的非线性函数的确有周期为三的点。

稍微复杂一点的具有周期三点的例子是乌拉姆和冯•诺依曼研究过的那个抛物线函数$f(x) = 4x(1-x)$。喜欢动手算算的人可以验证，f把$\sin^2(2/7)$映到$\sin^2(4/7)$，把$\sin^2(4/7)$映到$\sin^2(6/7)$，把$\sin^2(6/7)$映回到$\sin^2(2/7)$。

两个星期之后，运用他得心应手的微积分技巧，李天岩完全证明了约克的想法真的是一个“good idea”。具体地说，巧妙不断地运用初等微积分中的“中间值定理”，李天岩证明了这个后来出了大名的**李-约克定理**：如果一个连续的函数有一个周期为三的点，那么对任意一个正整数n，这个函数有一个周期为n的点，即从该点起迭代函数n次后又第一次返回到这个点。更进一步，对于“不可数”个初始点，函数从这些点出发的“迭代点序列”既不是周期的，又不趋向于一个周期轨道，它们的最终走向将是杂乱无章的，无规律可循。

什么是“不可数”？一群对象，如果它们的“个数”比所有的自然数的“个数”还来得多，同时又至少和所有的无理数一样多，那么我们就说这群对象的个数“不可数”。所有的实数，即把所有的分数和所有的无理数放在一起，是不可数的。同样地，任意两个不同实数之间的所有实数也是不可数的。李天岩和约克的伟大发现是只要有“周期三”出现，就有数也数不清的初始点的“混沌轨道”出现，这些轨道的未来走向是“不可预测的”。

李天岩解释说：“理工科的大学生都学过‘中间值定理’。这个定理的几何意义十分显然：若用一条连续的曲线来连接位于一条直线一边的点A和另一边的点B，那么这条曲线一定穿过这根直线。用这条直观上人人理解的定理我们能进一步证明，如果一个连续函数把一个区间映成包含该区间的一个更大的区间，那么区间里一定有一个点，它在这个函数的作用下不会变。也就是说，这个点是这个函数的一个‘不动点’。这是整个定理证明的基本思想，大学生们都能看得懂。”

当文章写好后，尽管李天岩心里想到的是投给令人尊敬的高等专门杂志，但约克却有他自己的想法。正如英国“当代的爱因斯坦”霍金（Stephen W. Hawking, 1942-）的畅销书《时间简史》的责任编辑所云：“书中多一个公式，就会少一半读者。”同理，越是高深专门的杂志，读者越是稀少。约克决定要让天下的人都知道他的“好想法”。

这样，按照约克的意图，他们把这篇题目直截了当的论文“周期三意味着混沌”寄给了具有大量读者的《美国数学月刊》，文章列出的所有“参考文献”只有洛伦茨的那四篇论文。但投稿后不久，文章就被编辑

退回，理由很简单：该文过于研究性，不太适合此期刊所重点面向的大学生读者群。编辑建议作者把原稿转寄其他的杂志，但又加了一句话，若他们能把文章改写到一般学生都能看懂的地步，可以再投回《月刊》。

但是，李天岩太忙了。他正在做微分方程等方面的博士论文研究，又对数值实现荷兰大数学家布劳威尔（Luitzen E. Jan Brouwer, 1881-1966）名闻天下的“不动点定理”有了特大的兴趣，埋头苦干地开辟计算数学非线性方程组数值解另一片崭新的土地。他既没功夫改这篇文章，也不知道怎么改它。于是乎，这篇文章就在他桌上被搁置了将近一年。

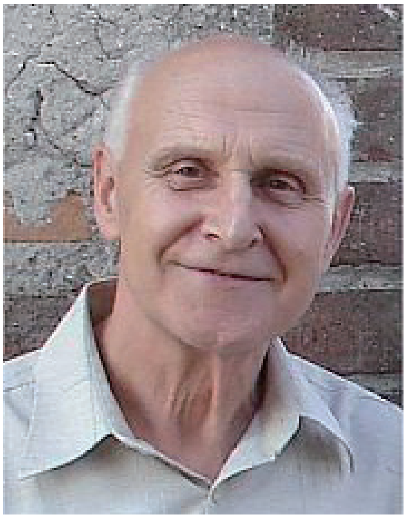
天赐的良机到了。1974 年是马里兰大学数学系生物数学的“特殊年”。在这一年里，每星期都要请“生物数学”这个领域里最杰出的学者来系里演讲。在五月份的第一个星期，他们请来了普林斯顿大学的梅教授演讲一周。在其最后一天的报告中，梅讲了令他着迷的种群生物学中那个带参数简单二次模型的迭代：当参数从小到大变化时其迭代点序列之性态将变得愈来愈复杂。他十分困惑于对这一现象的合理解释，想象中也许只是计算上的什么误差所造成的吧。约克听完梅的讲演后，在把他送去飞机场的时候，把李天岩桌上躺了将近一年的那篇关于李 - 约克定理的文章给他看。梅看到了文章的结果之后，极为吃惊，并认定此定理大大地解释了他的疑问。

约克从机场回来后立即跑到李天岩的办公室。

约克喊道：“我们应该马上改写这篇文章。”

文章在两个星期内改写完毕，三个月后被《美国数学月刊》接受，并刊登在 1975 年 12 月份的那一期上。

现今世界上稍微了解一点混沌学的人，无人不知李天岩与约克这



沙可夫斯基（1936-）

篇篇幅不长、令他们一举成名的论文。该文不光证明了现已众所皆知的“李 - 约克混沌定理”，并且第一次在数学上严格地引入了“混沌”的定义，因而首创了“混沌”这一数学名词。它承上启下、推陈出新，开拓了整个数学界、科学界对混沌动力系统理论和应用研究的新纪元。

梅教授那年夏天到欧洲到处演讲，也让“周期三意味着混沌”的作者名扬天下，后来约克也被邀请到处讲他们的“混沌”。几年后的某一天，在东柏林一个国际会议上做完报告后，约克和同行去逛市容。在一条游艇上，一个从未谋面、不期而至的苏联人突然走近了他，急于想与他交谈。在一位既懂英文、又通俄文的波兰朋友的帮助之下，约克才听懂对方这位名叫沙可夫斯基（Oleksandr M. Sharkovsky, 1936-）的乌克兰数学教授比他早十来年就证明了较李 - 约克定理第一部分似乎更为一般的结果，并发表在西方人几乎看不到的《乌克兰数学杂志》1964 年第 16 期上。相识四个月以后，约克收到了沙可夫斯基寄来的他那篇论文。

冷战时期，苏联一些数学家，尤其是那位不时挖苦一部分西方数学家、2010 年在法国因病突然去世的俄罗斯“首席数学家”、20 岁不到就因证明“任意一个多变量的连续函数都可以由有限多个两个自变量的函数构造出来”而解决了希尔伯特在 1900 年国际数学家大会上提出的第十三个“世纪问题”、1965 年就和他的老师、上世纪全世界最伟大的数学家之一柯尔莫果洛夫同获苏联最高荣誉“列宁奖”的阿诺德，生前有时冷嘲热讽地说道：

“你们美国人搞的东西，我们苏联人早就搞过了。”

这话有时部分地不假，沙可夫斯基定理便是一例。在这篇“线段连续自映射周期之共存性”的论文中，沙可夫斯基硬是把连小学生都熟知的自然数的“自然顺序”1, 2, 3, 4, 5, … 打乱重来，按如下的新方式排成一列：

3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, …，即除 1 以外的所有奇数

$2 \cdot 3$, $2 \cdot 5$, $2 \cdot 7$, $2 \cdot 9$, $2 \cdot 11$, $2 \cdot 13$, …，即 2 乘上上一行的每一个数

$2^2 \cdot 3$, $2^2 \cdot 5$, $2^2 \cdot 7$, $2^2 \cdot 9$, $2^2 \cdot 11$, …，即 2 乘上上一行的每一个数

$2^3 \cdot 3$, $2^3 \cdot 5$, $2^3 \cdot 7$, $2^3 \cdot 9$, $2^3 \cdot 11$, …，即 2 乘上上一行的每一个数

……………………………………，等等、等等

…, 2^7, 2^6, 2^5, 2^4, 2^3, 2^2, 2^1, 2^0。即由大到小排列 2 的所有次方

他严格地证明了他的现已广为人知的**沙可夫斯基定理**：如果一个连续的函数有一个周期为 m 的点，则对在上述次序中排在 m 后面的任意一个正整数 n，这个函数有一个周期为 n 的点。

因为自然数 3 在沙可夫斯基的排序中名列第一，即其余的自然数都排在它后头，所以如果在沙可夫斯基

定理中让 m 为 3, 那么对任意一个正整数 n，这个函数有一个周期为 n 的点。哈哈，这就是李 - 约克定理的结论之一。因而后者只是前者的特例，或者，按照数学教科书的一般写法，李 - 约克定理之第一部分是沙可夫斯基定理的一个“推论”。

如果连续函数有一周期为九的点，那么由沙可夫斯基定理可知，除了可能没有周期为三、五、七的点，该函数有周期为任何其它数的点。这却不包括在李 - 约克定理之中，尽管李天岩和约克在他们的论文中给出一个连续函数的例子，它有周期为五的点而没有周期为三的点。

但是严格地说，李 - 约克定理中“周期三推出所有周期”并不能看成是沙可夫斯基定理的特例。事实上，李 - 约克定理的假设是：存在一个点 a，函数在该点连续迭代两次都变大，但第三次迭代的结果不大于 a，或函数在 a 连续迭代两次都变小，但第三次迭代的结果不小于 a。用不等式表示，就是

$$f^3(a) \le a < f(a) < f^2(a) \text{ 或 }$$
$$f^3(a) \ge a > f(a) > f^2(a),$$

而“周期三点存在”的假定只是适合这些条件的一个特例。

李天岩评说道：“我们定理的更一般假设和沙可夫斯基的序列有一个很大的不同，可是这在应用上却有极大的差距。好比说在种群动力学上，种群的第一代和第二代都是在增长，但是在第三代却突然大降，于是乎什么‘鬼现象’都可能发生，但是第三代的种群数要降到和第一代一模一样（意指周期三点存在）恐怕不大可能。从这个角度来看，沙可夫斯基序列也许比较适合放在象牙塔里。”

由于沙可夫斯基定理关于周期点的结论看上去远较李 - 约克定理一般，在讲述函数迭代性质的“离散动力系统”这门学科的一些教科书里，作者干脆只介绍沙可夫斯基定理，而对李 - 约克定理只字不提。

尽管沙可夫斯基定理关于周期点的部分比李 - 约克定理更为一般，但只有李 - 约克定理特有之第二部分才深刻地揭示了混沌现象的本质特征：混沌函数的逐次迭代关于初始点的敏感依赖性，以及由此产生的迭代点序列最终走向的不可预测性。它向科学界给出了一个超乎于数学结果的信息：混沌无处不在，模拟自然系统的看似简单的非线性函数可能会展现极其复杂的动力学性质。根据统计，该文可能是数学界及物理学界被引述次数最多的当代重要论文之一，已经被引用了约两千六百次。

1985 年炎热的夏天，一身是病的传奇人物李天岩教授（他的故事可见《数学文化》杂志 2011 年 / 第 2 卷第 3 期）第一次回到祖国大陆，整整两个月，他南抵广州中山大学、北至长春吉林大学，东到浙江杭州大学、西临西安交通大学，中达北京中国科学院理论物理研究所，马不停蹄地讲解“混沌”或其他学术专题。在其学术演讲中，李 - 约克原始论文的英文题目“Period Three Implies Chaos”被他形象地翻译成“周期三则乱七八糟”。

具有五千年文明历史的中华民族从古到今不乏像十八世纪德国智者康德（Immanuel Kant, 1724-1804）那样“仰望星空”的哲人。自从“周期三”被它的作者、被“混沌”的传播者们带进中国，神州大地的哲学爱好者们掀起了一股数字“三”的考据热。只要在“百度”网站上打入“周期三与古代混沌思想的关系”、“周期三则乱七八糟”或者“混沌的哲学解释”诸如此类的关键词，就可看到“科学意义上的混沌”五花八门的中国式哲学解释：

老子（约前 571- 前 471）：“道生一，一生二，二生三，三生万物。”

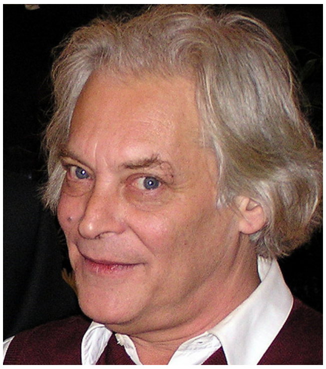
庄子（约前 369- 前 286）：“南海之帝为倏，北海之帝为忽，中央之帝为浑沌。”

王充（27- 约 97）：“元气未分，浑沌为一。”（《论衡 • 谈天篇》）

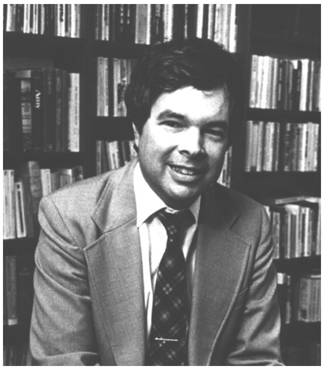
在西方学术界，类似的哲学解释颇为罕见，也许是因为西方文明是在古希腊的演绎推理法的地基上竖起的“埃菲尔铁塔”。当然，古希腊的神秘主义者和“数学证明”的引入者毕达哥拉斯（Pythagoras, 约前 569- 约前 500）学派认为“万物皆（整）数”。他们把一称为“神圣数”、二“女性数”、三“男性数”、四“公正数”、五“婚姻数”，然后有代表着“友善”、“完美”、“丰富”、“自恋”等等的数，这样，数字被人性化了。

东方文明则更爱好归纳法和类比法。在汉语里，三和九都和“多”这个概念有关系，但前者表示的“多”少于后者。包含“三”的常见成语有“三思而行”、“三申五令”、“三人成虎”、“三教九流”、“一而再、再而三”、“三人行必有我师”，“三个臭皮匠，赛过诸葛亮”。但它们与“周期三”的隐含风马牛不相及。其实，“周期三意味着混沌”只是一个被严格证明的“不朽”的数学定理，并没有什么“一脉相承”的人文历史渊源或者“牵强附会”的哲学理由。如果“三”这个数字值得“大书特书”，“五”为什么不能呢？它毕竟是写不出解公式的一般代数方程式的最低次数。

事实上，从数学上来看，仅仅“周期一”或“周期二”点的存在并不引起一些“波澜壮阔”的事发生。比如，对于“恒同函数” $f(x) = x$ 来说，它的每一个点 x 都是“不动点”，即周期为一的点，但这个函数没有任何周期为大于 1 的周期点，是一个完全“规矩”的函数。对于“变号函数” $f(x) = -x$，每一个数 x 被映到它的相反数 $-x$，所以，除了 0 这个周期为一的点以外，

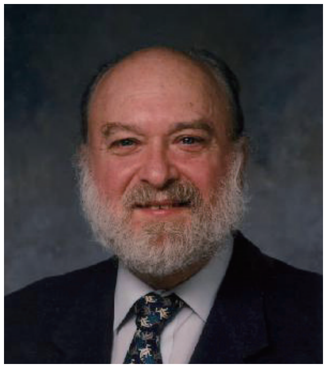


费根鲍姆（1944-）



威尔逊 （1936-）

费希尔 （1931-）



卡丹诺夫 (1937-)

每一个非零数都是周期为二的点。因而变号函数没有任何周期为大于 2 的周期点，也是一个特别“规矩”的函数。这两个函数的共同特点是，他们分别为严格递增或严格递减的“单调函数”，前者自变量越大函数值越大，后者自变量越大函数值越小。但当函数有了周期为三的点，它必定是一个非线性的非单调函数，它的函数图像上可以有山峰，可以有山谷。就像古诗“山重水复疑无路，柳暗花明又一村”描绘的那样，翻山而过，眼前一片姹紫山红、气象万千，一派“混沌”的满园春色出现了。

李 - 约克“混沌”定义的破土而出，不光让世人的焦点聚集在洛伦茨十年之前注意到的混沌天气微分方程以及近年来梅所考虑的混沌种群差分方程，更引发了物理、工程、甚至社会科学探索混沌动力系统的热潮。

但是，七十年代的中末期，另一场“革命”正从一个科学怪人的手指前端汩汩地流出，继而“飞流直下三千尺”，“不飞则已，一飞冲天”。

（八）洛斯阿拉莫斯的“幽灵”——

一百六十年前，马克思、恩格斯在《共产党宣言》中第一句开宗明义地描绘道：“一个幽灵，一个共产主义的幽灵，在欧洲徘徊。”1974 年，一个披着长发的“幽灵”，经常在洛斯阿拉莫斯深夜的街道上游荡。

七十年代的洛斯阿拉莫斯国家实验室，早已从三十年前奥本海默时代的战时紧张中缓和过来，尽管大部分科学家“像士兵从战壕撤退一样回到各自的大学教书”，但这个曾经一片荒凉的地方已成长为一个引诱年轻人的超级“吸引子”，也是拥有大型计算机最多的研究中心之一。由于乌拉姆等人的早期开创性工作奠定的基础，这里也建立了一个“非线性分析研究中心”。

洛斯阿拉莫斯理论部的新主任卡拉瑟斯（Peter Carruthers, 1936-1997）来自康奈尔大学，就像他的这个位置四十年代的前任贝特一样。1973 年到任后，他做的第一件事就是解雇了几位高级研究员，而代之以他精心挑选的新一代。当费根鲍姆（Mitchell J. Feigenbaum, 1944-）第二年被他雇用时，30 岁还差了几个月，已经戴了麻省理工学院基本粒子物理四年的博士帽子，分别在康奈尔大学和弗吉尼亚理工学院工作过。这位头发长长、不修边幅的地道的纽约城布鲁克林人，讲话时眼光急转、语速飞快、激情四射。从东部搬到西部后，同事们只看到他与众不同地干活、漫步、思考，一天“二十五”个小时工作好像还嫌太少。

然而，到此为止他只发表过一篇论文。在论文数量决定一切的中国，大概前景黯淡，拿不到研究基金，津贴也大减。在美国研究型大学新科助理教授的“三年考察”报告中也会收到一个“警告”，下一个三年后试用期结束时很可能要“卷铺走人”。“不发表则灭亡”似乎是天经地义的大学游戏规则，今日更甚。但是，卡拉萨斯不是那种只看文章数量的上级领导，他清楚地知道，创造性研究不会是什么“计划”之后的产儿。他还清清楚楚地记得康奈尔的美国物理学教授威尔逊（Kenneth G. Wilson, 1936-）似乎也写不出什么论文，但无人敢说他缺乏对物理的洞察力。一旦他的思想开了花，论文就会像潮水般地汹涌而来。

威尔逊 1982 年获得诺贝尔奖的工作包括他和同为美国同胞的卡丹诺夫（Leo P. Kadanoff, 1937-）以及英国物理学家、化学家兼数学家、现为约克同僚的费希尔（Michael E. Fisher, 1931-）关于相变问题的“重正化群”理论，他们研究物质在两种不同状态之间临界区域的奇妙性质，如流体的液态和气态，或金属的磁化和非磁化。这时的复杂现象必须用非线性的数学来描述，可从液体突然沸腾时在它和气体的界面上看到的一团乱象来想象。这三人在 1980 年共享了以色列总统颁发的沃尔夫（Ricardo Wolf, 1887-1981）物理奖。

六十年代卡丹诺夫处理“临界

现象”的重正化基本想法是把原子间的相互联系用“尺度变换”来刻画，即把一些看上去不变的物理量，譬如质量，看成似乎随观测尺度而上下浮动，这和七十年代初法国人波努瓦•芒德勃罗（Benoit Mandelbrojt, 1924-2010）关于英国海岸线长度的看法颇有异曲同工之处。但是，跨越尺度的变化并非任意，而是遵循某种“相似性”的规律。威尔逊的重大贡献在于运用不同尺度的“自相似性”从而提供了计算可能性。

费根鲍姆被威尔逊的深刻思想迷住了，他要用自相似性的方法来对付湍流问题。湍流的特点之一就是自相似性：大涨落带有小涨落，大漩涡包含小漩涡。有序流体进入混沌状态产生湍流，吸烟者看到袅袅上升的烟柱破碎成乱七八糟的漩涡。但是混沌之中是否存在有序？这可是个大问题。

当吸烟不止的费根鲍姆站在快要进入瀑布区域、开始加速的溪流前，他凝神注视着急速前进、颤抖不已的水流，左右摇晃着自己的头颅：

“你可以注视着某种东西，一堆泡沫或别的什么。如果头动得特别快，你可以突然辨认出表面的整个结构，你可以从心中感觉到它。但是对任何有数学背景的人，当他看到这东西，或者仰望着累累浮云，或者在风暴中站在海堤上，他知道对于这一切实际上什么也不懂。”

费根鲍姆要当“科学的弄潮儿”，研究新科学。他有一种坚定不移的信念：迄今为止的物理科学未能理解困难的非线性数学。作为物理学家，虽然只有一篇发表在他名下的论文，但他有“粒子物理”、懂“量子场论”，他已经积累了不同领域丰富的知识，他已经掌握了最新出现的计算技术，厚积薄发、潜力无穷。正如后来他的上司对此评价：

“费根鲍姆具有正确的背景。他在正确的时候做正确的事，而且做得很出色。他不是做局部的事情，而是把整个问题弄清楚了。”

作为第一步，费根鲍姆找到最简单的非线性函数，就从梅考虑过的那个描写种群数目变化的带参数二次函数开始了他的数值试验。他不知道洛伦茨的工作，但在 1975 年夏天科罗拉多州的一个会议上，他听了斯梅尔讲了同一个带参数函数的迭代从周期变到混沌的某些尚未解决的问题。斯梅尔敏锐的直觉让他感觉到有进一步探索的必要。

为此，费根鲍姆摆弄起了当时流行的 HP-65 型手用计算器，把数学分析和数值实验结合起来研究有序和混沌之间的桥梁。这个桥梁类似于流体中层流和紊流之间的通道。梅这样的生态学家已经看到随着参数变化的种群数目倍周期律，例如，在某一个分叉点只要稍稍改变一点点长江“中华鲟”的出生率，它们的数目变化规则就会从四年周期变到八年周期。费根鲍姆决定先算出这些分叉点参数的精确值。

慢腾腾的计算器好几分钟才能算出周期加倍的精确参数值，参数越往前走，计算就越费时。这反而帮了费根鲍姆的大忙。他可以从容不迫地把数据记下，在等待下一个结果时可以思索一番，甚至还有余暇猜猜下一个答案会在哪里。如果三十年后的他重新开始，用的是“克雷”超级计算机，说不定一些有趣的结果“稍纵即逝”，某个重要的模式“逃之夭夭”，他也许有可能什么也发现不了。在科学的探索上，“慢工出细活”也一点不假。

几个回合下来，费根鲍姆眼睛突然一亮，就好比是“哥伦布发现了新大陆”。这些分叉参数出现了某种规律性：它们似乎是几何序列般地向前进，即目前值和前一个值的差与下一个值和目前值的差之比值最终趋向一个固定常数。倍周期的来临不光越来越快，而且以恒定的“加速度”越来越快。这种几何收敛的迹象暗示他，某种尚未人知的东西在不同的尺度上重复。

这个“收敛常数”在费根鲍姆计算器上最高精度为三位小数，他看到的是 4.669。这个奇怪的新数和那些数学上大名鼎鼎的绝对常数 π = 3.14159 … 或 e = 2.71828 … 等有亲戚关系吗？他找来找去，“家谱“上没发现什么。

过了两个月，他突然想起他的三个实验室同事：米特罗波利斯（Nicholas C. Metropolis, 1915-1999）、保罗•斯坦（Paul R. Stein）及迈伦•斯坦（Myron L. Stein）。他们 1971 年研究过类似函数的迭代，并警告过他这些迭代“吓人的复杂性”，也曾经考察过其他带参数的函数，并发现它们共享某些模式。事实上，就是前一个斯坦过去曾经告诉过他，倍周期分支的现象不只发生在二次函数上，它也发生在带有参数的正弦函数 $r\sin(\pi x)$ 上。一个念头飞了出来，何不再瞧瞧这族正弦函数？说干就干，他又拿起 HP-66 计算器进行了新一轮倍周期计算。没想到，新的分叉值依然是几何收敛的，但不可思议的是，其不变的收敛速率还是那个数：4.669。

两个家谱相距甚远的函数族，一为三角函数，另一为二次多项式，一个是“超越的”，另一个是“代数的”，却有某种一致的规律性，导致了同样的结果。费根鲍姆激动得打电话给他父母，告诉他们他也许因此名满天下。接下来，他不辞劳苦、马不停蹄试验了他能想得到的其他带参数的函数，分叉点产生的几何常数无一例外地仍是同一个数：4.669。

费根鲍姆又打电话给保罗•斯坦报告这一消息，但后者持怀疑态度，毕竟只有三位小数的精度，谁知道第

四位或到第八位是否都一样呢？洛斯阿拉莫斯有的是大型计算机，过去他像其他理论家一样不大看得起计算机的机械性运行，从未去学计算机语言。现在，为了证明谁更正确，费根鲍姆开始学编计算机 FORTRAN 程序。借助计算机的帮助，第一天对这些函数他就得到同一个有五位精度的常数：4.66920。当晚他又学会了怎样用“双精度”，第二天就得到如下的精度：4.66920160910，对所有试验过的函数都一样。

费根鲍姆发现了“普适性”。这个“放之四海而皆准”的普适常数是他强烈的“计算好奇心”催生的宠儿。计算，给了他发现自然界宝藏的极佳机会，带给他“阿里巴巴”的“芝麻开门”。难怪约克 2005 年 5 月在台湾新竹清华大学参加庆祝李天岩六十岁生日的国际研讨会之后，通过采访他的台湾数学界人士，对年轻一代的数学爱好者语重心长地说：

“研究就是去发现叫人赞叹的想法，动手计算则可能导致伟大发现。”

中国当今的计算数学权威之一石钟慈 (1933-) 二十年前就认为：

“计算已成为一种基本的科学方法。它与从牛顿、伽利略以来发展起来的两种传统科学方法——理论和实验——形成鼎足而立之势，大大改变了现代科学技术的面貌。人们现在已把计算称为‘第三种科学方法’。”

费根鲍姆的工作并没有立刻得到“一呼百应”，没有像李 - 约克定理的深刻思想和严格证明一下子被人“全盘接受”。他由此写成的论文两年内被学术期刊频频拒绝，编辑们认为他的文章“不宜发表”。

在科学史上，出乎意料的独创性工作常遭厄运，权威们经常武断地判处一个新思想的死刑，直至它“死而复生”。贫病而逝的挪威人阿贝尔（Niels Abel, 1802-1829）和决斗丧生的法国人伽罗瓦（Evariste Galois, 1811-1832）之高次代数方程、倒霉的匈牙利人鲍耶（Janos Bolyai, 1802-1860）和幸运的俄罗斯人罗巴切夫斯基（Nikolas Lobatchewsky, 1793-1856）之非欧双曲几何，都是众所周知的例子。“日本吸引子”的发现者、日本京都大学电机系当时的研究生上田皖亮（Yoshisuka Ueda）1961 年 11 月 27 日在研究电子线路的非线性微分方程时发现了十分混乱的现象，却被自己的导师视为“不合常理”而痛失了“发现权”的良机，直到 1970 年才让他报告这一重要发现。正如李天岩 1988 年登在台湾通俗数学杂志《数学传播》上的一篇短文中所惋惜的那样：

“头彩已经被洛伦茨抢走了。”

数学家们对费根鲍姆也有些疑虑，原因之一是他并未提供一个严格的证明。1976 年 9 月当他在洛斯阿拉莫斯召开的一个国际数学会议上向听众介绍他的理论时，刚刚起讲，乌拉姆的“老乡”、知名的数学家卡茨（Mark Kac, 1914-1984）就站起来毫不客气地问：

“先生，您想给出数目字还是给出证明？”

费根鲍姆回应道：“比前者多点，比后者少点。”

卡茨再次诘问道：“是任何讲道理的人都称作证明的东西吗？”

做完报告之后，当费根鲍姆征求卡茨的评述时，带波兰口音的后者有点挖苦意味地拖着颤动的 r 音说：

“是的，这果然是一个讲道理的人的证明，细节可以留给 r-r-rigorous（严格的）数学家们。”

过后不久，一位大体上还算“比较严格的”数学家果然不负“卡茨”们的众望。1979 年，美国人兰福特（Oscar E. Lanford III, 1940-）给出了“费根鲍姆定理”用计算机辅助证明的细节，虽然这个“土法炼钢”法不见得那么严格。这个普适数对所有的带参数“单峰函数”都一样地成立。单峰函数，顾名思义，它们的函数图像看上去像单峰骆驼的驼峰或公园里的土丘。

当然，费根鲍姆的开创性工作很快就获得了绝大多数人的承认和赞赏。尤其是 1979 年当大家听说一名意大利物理学家和一名法国物理学家通过实验证实了倍周期分支的确是依照他所预测的那样发展，他一下子就大红大紫起来。他前几年的发现分别在 1978 年和 1979 年连续两年都发表在《统计物理杂志》上。在 1977 年召开的那个第一届混沌国际会议上，福特评述道：

“费根鲍姆看到了普适性，发现了怎样作尺度变换，并且给出了一条走向混沌的道路。它是直觉上诱人的。这是我们第一次有了一个人人都能理解的清楚模型。”

然而，一些科学家仍然认为对费根鲍姆的贡献估计太高，“虽然漂亮，但不及李 - 约克的工作那样影响深远”。最持否定态度的是“分形之父”芒德勃罗 。当成名之后的费根鲍姆 1984 年应邀向瑞典的诺贝尔讨论会发表演讲时，芒德勃罗发表了讲话，被听众们形容为一个“反费根鲍姆演说”。他不知从什么地方居然挖出一位名为麦堡（P. J. Myrberg）的芬兰数学家二十年前所写的一篇关于倍周期现象的论文，并挑衅式地一直把“费根鲍姆序列”另外叫做“麦堡序列”。

不管怎么说，正是芒德勃罗这个人在七十年代初发出的一个“地问”，开创了一门新的几何学，研究具有分数维数“点的集合”的几何学。

未完待续