几何之美 3

宗传明

本文受到国家 973 项目 2011CB302400，国家自然科学基金项目 11071003 和长江学者奖励计划的资助。
作者感谢贾朝华教授和项武义教授的润色建议。
通讯地址：cmzong@math.pku.edu.cn

引言

按照许多数学先哲（如庞加莱，哈代和冯 • 诺依曼等）的观点，数学不仅是一门科学，也是一门艺术。即数学也是一门追求独创和美的学问。

数学中确有一些艺术杰作：自然优美的问题，巧夺天工的构思，荡气回肠的结局。其独创性和优美程度绝不亚于柴科夫斯基的芭蕾舞剧或者雷诺阿的名画，只是对大众来说更难理解和欣赏而已。在这一系列短文中，我们将展示几何学中的几件“艺术珍品”。

对于一个数学家来说，欣赏学习他人的杰作不仅是为了（有可能）直接用到自己的工作中去，更重要的是为了提高修养，开阔眼界。从而使我们远离平庸，接近伟大。

本文将介绍 8 维球和 24 维球的牛顿数问题。这原本是一个百分之百的几何问题，经过看似风马牛不相及的联系，却最终由线性规划的方法完美解决。方法之巧妙，结果之意外，都不能不让人叹为观止。

Gregory-Newton 问题

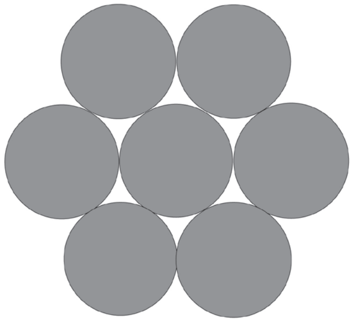
根据牛津大学 Christ Church 学院的文献记载，Gregory（1638-1675）和 Newton 在 1694 年讨论过如下问题：

> 一个球能同时跟 13 个同样大且内部互不相交的球相接触吗？

Gregory 相信“能”；Newton 则认为“不能”。那是在三个世纪以前，当时基督教几乎是每个欧洲人的信仰，所以有些作者也把这一学术讨论引申为“耶稣是否该有第十三个门徒”的争论。在有些文献中，这一问题也被称为十三球问题。

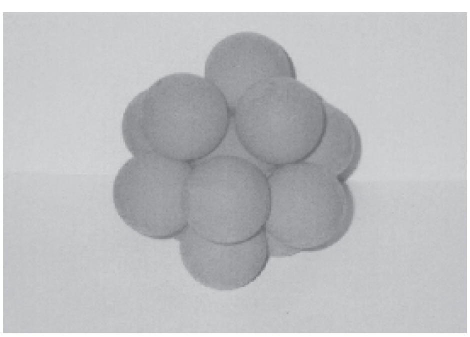
> Gregory 是一位杰出的数学家，对微积分有重要贡献。展开式
> $$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots$$
> 就是由他首先发现的（参见 [5]）。

在桌面上摆放一角的硬币。容易看出，一个硬币能并且最多只能跟六个同样大小的硬币同时相切。



在此基础上，如下图所示我们很容易排放 12 个乒乓球同时跟一个乒乓球相切。容易看到，图中 12 个外切球的位置是相对固定的。

下图中也有 12 个球同时跟中间的一个相切。所不同的是，这 12 个球相互都不接触。这样，就有理由相信，通过适当移动这 12 个球可能会腾出足够的空间再加一个跟中间的球也相切的球。这就是 Gregory-Newton 问题的困难所在，也是 Kepler 猜想的困难所在。



2 难产的答案

在许多数学文献中，Hoppe 常被引述为第一个解决 Gregory-Newton 问题的数学家。事实上，他在 1874 年的证明是不完整的。直到 1953 年，通过运用图论的一些想法，Schütte 和 van der Waerden 才第一次解决了这一问题。答案如 Newton 所预言，是“不能”。

1956 年，Leech（1926-1992）发表了一个只有两页的证明。他的想法非常巧妙。

在三维空间，用 B 表示以坐标原点为中心的一个单位球，用 S 表示它的表面。假设最多有 v 个两两内部互不相交的单位球 $B+2\mathbf{x}_1$，$B+2\mathbf{x}_2$，…，$B+2\mathbf{x}_v$ 可以同时与 B 相切。显然 $\mathbf{x}_i$ 都在 S 上。对于 S 上的任意两点 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$，我们用 $\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|'$ 表示它们之间的球面距离。由前面的假设容易看出

$$\|\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\|' \geq \pi/3$$

对所有不同的指标 i 和 j 都成立。

在 S 上构造一个以 $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_v\}$ 为顶点的网络，其中 $\mathbf{x}_i$ 和 $\mathbf{x}_j$ 用大圆弧（测地线）相连当且仅当

$$\|\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j\|' < \arccos\frac{1}{7}.$$

不失一般性，我们假设该网络不存在孤立点（否则可以移动孤立点至不孤立的位置）。这时，网络将球面 S 划分成了一系列球面多边形。容易验证网络中的每个角都大于 $\pi/3$。所以，在每一顶点最多有 5 条边相遇。

假设 P_n 是网络中的一个 n 边形，P 是一个最小可能面积的三角形（即每条边的长度都是 $\pi/3$），可以验证面积 $s(P_n)$ 满足

$$s(P_3) \geq 0.5512\cdots,$$
$$s(P_4) \geq 1.3338\cdots,$$
$$s(P_5) \geq 2.2261\cdots, \tag{1}$$

并且

$$s(P_n) \geq (n-2)s(P). \tag{2}$$

用 v，e，f 分别表示网络的点、线、面的个数，且用 f_n 表示其中 n 边形的个数。由 Euler 定理我们得到

$$\begin{aligned} 2v-4 &= 2e-2f \\ &= 3f_3+4f_4+\cdots-2\,(f_3+f_4+\cdots) \\ &= f_3+2f_4+3f_5+\cdots \end{aligned}$$

然后，比较球面的面积与多边形的面积之和，我们得到

$$\begin{aligned} 4\pi &\ge 0.5512f_3+1.3328f_4+2.2261f_5+\cdots \\ &= 0.5512\,(f_3+2f_4+3f_5+\cdots)+0.2314f_4 \\ &\quad +0.5725f_5+\cdots \\ &= 0.5512\,(2v-4)+0.2314f_4+0.5725f_5+\cdots \end{aligned}$$

由此容易得出 $v\le 13$，并且 $v=13$ 时必有 $f_4\le 1$ 以及对所有 $n\ge 5$ 都有 $f_n=0$。

如果 $v=13$ 并且 $f_4=0$，这时得到的网络是一个三角刨分。比较所有的线数和点数，可以得到在某一点至少有 6 条边相遇。这与前面所得的结论相矛盾。

如果 $v=13$ 并且 $f_4=1$，通过比较线数和点数可以得出网络只在一个点有 4 条边，在所有其它点都有 5 条边。而这样的网络是不存在的。

所以，我们得到 $v\le 12$，Newton 的预言是正确的。

1998 年，Aigner 和 Ziegler 出版了畅销书 Proofs from THE BOOK，其中有一章介绍了 Leech 的这一证明。不久作者收到了一封读者来信，求教如何导出 (1)，(2) 等等。作者开始认为很简单，但是马上就陷入了困境。其实它们的证明细节写下来远比原来的证明还长。所以，在该书第二次印刷时作者把这一章删掉了。

进入新千年以来，Anstreicher，Böröczky，Ericson，Hsiang，Maehara，Musin 和 Zinoviev 又分别发表了对这一问题的新证明，其中有些就是对 Leech 证明的补充。

3 Delsarte 引理

1930 年，荷兰植物学家 Tammes 提出了如下问题：

Tammes 问题 *在单位球的表面取 m 个点，试确定它们之间最小距离的可能最大值。*

换句话说，在单位球的表面放置 m 个两两内部互不相交的等半径球冠，试确定球冠的最大半径。

这一问题有几种不同的解释。例如，在球面上放置 m 个相同的带电体。假设它们之间有极强的排斥力（该排斥力随距离增加而迅速减小）。在排斥力的作用下，这些带电体沿球面自由移动，最后达到一个平衡状态。试确定这些带电体在平衡状态时的相对位置。

Tammes 问题貌似简单，实际上却非常复杂。至今为止已知的精确结论仅有 $n\le 12$ 和 $n=24$ 的情况。也许有人会奇怪，为什么一下从 12 跳跃到了 24。原因很简单，在三维空间存在具有 12 个顶点和 24 个顶点的正规多面体，而不存在具有 13 － 23 个顶点的正规多面体。即便如此，$n=24$ 情况的论证还是非常复杂。它是由 Robinson 于 1961 年解决的。论文发表在德国的《数学年刊》，长达 31 页。至于 $n=13$ 的情况，匈牙利数学家 Böröczky 和 Szabó 于 2003 年发表了一篇长达 73 页的论文也只能得到一个估计，可见其复杂程度。

在数学界，Robinson 是一个非常著名的姓氏。非标准分析的奠基人是 Abraham Robinson（1918-1974）；美国数学会第一任女主席，美国科学院第一位女院士是 Julia Robinson（1919-1985）。这里提到的是 Raphael M. Robinson（1911-1995），他是 Julia 的丈夫，是一位杰出的数学家，对逻辑学、数论、组合学、几何都做出过本质性的贡献。生前曾任加州大学伯克利分校教授，美国科学院院士。如下结论就是他的杰出数学贡献之一：

> *n 维空间中存在一个没有共面对的立方体 k 重格平铺当且仅当下面的情况之一发生：*
> **1.** $n=4$ 且 k 能被一个奇素数的平方所整除。
> **2.** $n=5$ 且 $k=3$ 或 $k\ge 5$。
> **3.** $n\ge 6$ 且 $k\ge 2$。

用 E^n 表示 n 维欧氏空间，B^n 表示以坐标原点为中心的 n 维单位球，S^n 表示它的表面，k_n 表示能与 B^n 同时相切且两两内部互不相交的 n 维单位球的最大个数，即 B^n 的牛顿数。显然，确定 k_n 的值即 n 维的 Gregory-Newton 问题。

假设 θ 是一个介于 0 和 $\pi/2$ 之间的实数。我们定义 $m(n,\theta)$ 为在 S^n 上两两之间的球面距离都不小于 θ 的点的最大个数。显然，

$$k_n = m\left(n, \tfrac{\pi}{3}\right). \tag{3}$$

设 α 和 β 均为大于 -1 的给定实数。那么由

$$p_k^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} k+\alpha \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k+\beta \\ k-i \end{pmatrix}(x+1)^i(x-1)^{k-i}$$

所定义的一系列函数被称为 Jacobi 多项式。这是一类非常重要的特殊多项式，有许多好的性质。1972 年，Delsarte 发现了如下结论：

Delsarte 引理 取 $\alpha = (n-3)/2$ 并且定义

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} c_i p_i^{\alpha,\alpha}(x),$$

其中 c_i 均非负且 $c_0 > 0$. 如果当 $-1 \le x \le \cos\theta$ 时均有 $f(x) \le 0$, 那么

$$m(n,\theta) \le \frac{f(1)}{c_0}.$$

这是一个天才的发现。这一引理主导了堆球理论近四十年的发展。其中的多项最主要进展都是建立在它的基础之上，从而形成了一套独特的方法——堆积理论中的线性规划方法。由于它的证明非常复杂，再加上我们希望给这一伟大发现增加一些神秘色彩，所以本文对此不作任何介绍。

这里的 Delsarte 并不是布尔巴基学派中的 Jean Delsarte，而是当代比利时数学家 Philippe Delsarte。他在比利时菲利普研究实验室工作，也在鲁汶大学任教。

4 Levenšhtein - Odlyzko - Sloane 定理

假设在 B^n 的格堆积（即平移向量构成一个格）中最多有 k_n^* 个单位球同时跟 B^n 相切。确定 k_n^* 的值是一个著名的数论问题。显然，我们有

$$k_n \ge k_n^*.$$

在 1970 年前后，Watson 通过研究正定二次型得到了如下结论。

Watson 定理

n	4	5	6	7	8	9
k_n^*	24	40	72	126	240	272

1964 年，John Leech 在 24 维欧氏空间发现了后来以他的名字命名的格（Leech 格）。这是一个伟大的发现，其重要性绝不亚于四元数。Leech 格有 196560 个最短向量，并有极好的对称性。它不仅导致了 8，315，553，613，086，720，000 阶单群（Conway 群）的发现（参看 Thompson 名著中的动人故事），也提供了 E^{24} 中最密和最紧的球堆积。

用 Leech 格的格点作为平移向量并以其最短向量长的一半作为球的半径构造一个球堆积，可以发现该堆积中每一个球与 196560 个球相切。这样，我们得到了

$$k_{24} \ge k_{24}^* \ge 196560. \tag{4}$$

John Leech 于 1926 年生于英格兰，早年求学于剑桥大学，获博士学位。之后，他从事数字计算机的研制和应用工作。1960 至 1980 年，他先后在苏格兰的格拉斯哥大学和斯特林大学任职。Leech 格是他在格拉斯哥大学任讲师时发现的，发表在 Canadian Journal of Mathematics。John Leech 于 1992 年在苏格兰去世。生前他没有得到应有的学术地位。但是，毫无疑问他的名字将伴随着 Leech 格在数学界流芳百世。

1979 年，Levenšhtein（1935-），Odlyzko（1949-），和 Sloane（1939-）证明了下面两个结论。其方法之精妙，结论之意外，让几乎所有的专家都目瞪口呆。

Levenšhtein - Odlyzko - Sloane 第一定理 在 E^8 中，一个单位球能且最多仅能跟 240 个两两内部互不相交的单位球同时相切。也就是说

$$k_8 = k_8^* = 240.$$

取 $\alpha=(8-3)/2=2.5$，并且将 $P_i^{\alpha,\alpha}(x)$ 简写为 P_i。定义

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{320}{3}(x+1)(x+\tfrac{1}{2})^2x^2(x-\tfrac{1}{2}) \\ &= P_0 + \tfrac{16}{7}P_1 + \tfrac{200}{63}P_2 + \tfrac{832}{231}P_3 + \tfrac{1216}{429}P_4 \\ &\quad + \tfrac{5120}{3003}P_5 + \tfrac{2560}{4641}P_6. \end{aligned}$$

容易验证，当 $\theta = \frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 满足 Delsarte 引理的条件。所以，

$$k_8 = m(8, \tfrac{\pi}{3}) \le \frac{f(1)}{C_0} = 240.$$

莱文斯坦

Vladimir I. Levenšhtein（右）

这样，由 (3) 和 Watson 定理，我们就得到了

$$k_8=k_8^*=240.$$

Levenshtein - Odlyzko - Sloane 第二定理 *在 E^{24} 中，一个单位球能且最多仅能跟 196560 个两两内部互不相交的单位球同时相切。即*

$$k_{24}=k_{24}^*=196560.$$

取 $\alpha=(24-3)/2=10.5$，并且将 $P_i^{\alpha,\alpha}(x)$ 简写为 P_i。定义

$$\begin{aligned} f(x) &= \tfrac{1490944}{15}(x+1)(x+\tfrac{1}{2})^2(x-\tfrac{1}{16})^2x^2(x-\tfrac{1}{2}) \\ &= P_0+\tfrac{23}{48}P_1+\tfrac{1144}{425}P_2+\tfrac{12992}{3825}P_3+\tfrac{73888}{22185}P_4 \\ &\quad +\tfrac{2169856}{687735}P_5+\tfrac{59062016}{25365285}P_6+\tfrac{4472832}{2753575}P_7 \\ &\quad +\tfrac{23855104}{28956015}P_8+\tfrac{7340032}{20376455}P_9+\tfrac{7340032}{80848515}P_{10}. \end{aligned}$$

容易验证，当 $\theta=\frac{\pi}{3}$ 时 $f(x)$ 满足 Delsarte 引理的条件。所以，

$$k_{24}=m(24,\tfrac{\pi}{3})\le\frac{f(1)}{C_0}=196560.$$

由 (3) 和 (4)，我们得到了

$$k_{24}=k_{24}^*=196560.$$

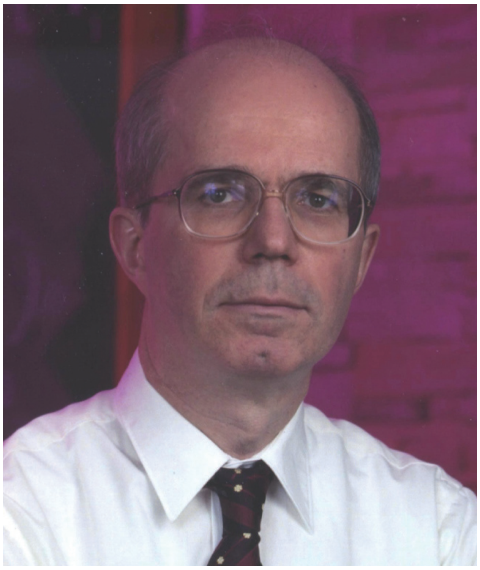
也许有读者会认为，Levenšhtein，Odlyzko 和 Sloane 真是太幸运了。其实，在数学研究中，幸运只垂青那些努力做好了准备并且积极进取的人。水平不够是绝对不会成为幸运儿的。

Vladimir I. Levenšhtein 是一位杰出的数学家，任职于俄罗斯科学院应用数学研究所。它主要研究信息通讯中的数学问题，组合问题等。用 $\delta(B^n)$ 表示 n 维欧氏空间中球堆积的最大密度。1978 年，他与 Kabatjanski 合作证明了

$$\delta(B^n)\le 2^{-0.599n(1+o(1))}.$$

这是堆积理论中最重要的结论之一。三十多年来，没人能够进一步改进。

Andrew Odlyzko 于 1949 年生于波兰。曾在加州理工学院和麻省理工学院学习并于 1975 年获麻省理工学院博士学位。他是一位杰出的数学家，在数论、组合、密码、计算复杂度等领域都做出重要贡献。例如，1985 年他与荷兰数学家 H.J.J. te Riele 否定了 Mertens 于 1897 年提出的一个著名猜想。这一结果是近代数论最重要的成就之一。Odlyzko 曾任贝尔实验室数学与密码部的主任，现任明尼苏达大学数字技术中心主任。



欧德里考

Andrew Michael Odlyzko

注 1

对于堆球理论来说，8 维空间和 24 维空间确实非常特别。首先，当 $n \geq 5$ 时我们至今仅仅知道 k_8 和 k_{24} 的精确值。其次，在这两个空间中 $k_8 = 240$ 和 $k_{24} = 196560$ 所对应的最佳结构在旋转和对称等价的意义下都是唯一的。这是由 Bannai 和 Solane 证明的。值得注意的是，如第一节中所说，在三维空间中 $k_3 = 12$ 所对应的最佳结构在旋转和对称等价的意义下不是唯一的。

注 2

近半个世纪以来，人们难以确定四维球的牛顿数是 24 还是 25。直到 2008 年，Musin 才最终证明 $k_4 = 24$。这一工作的核心方法也是 Delsarte 引理，但技巧却异常复杂。

后记

许多年前，在维也纳的一次舞会上约翰•施特劳斯的夫人遇到了勃拉姆斯。寒暄之余，施特劳斯夫人递给勃拉姆斯一把纸扇，请他题字留念。勃拉姆斯略加思索，在扇面上飞快地写下了《蓝色多瑙河》的主旋律。正当施特劳斯夫人惊愕之际，他又在下面写道“可惜不是我作”。

参考文献

1. M. Aigner, G.M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
2. P. Delsarte, Bounds for unrestricted codes by linear programming, *Philips Res. Rep.* **27** (1972), 272-289.
3. V.I. Levenštein, On bounds for packings in *n*-dimensional Euclidean space, *Soviet Math. Dokl.* **20** (1979), 417-421.
4. A.M. Odlyzko, N.J.A. Sloane, New bounds on the unit spheres that can touch a unit sphere in *n*-dimensions, *J. Combinat. Theory (A)* **26** (1979), 210-214.
5. W. Sharlau, H. Opolka, *From Fermat to Minkowski*, Springer-Verlag, New York, 1985.
6. T.M. Thompson, *From Error-Correcting Codes Through Sphere Packings to Simple Groups*, Math. Assoc. Amer., 1983.
7. C.M. Zong, *Sphere Packings*, Springer-Verlag, New York, 1999.

全文完