
# 期权的数学

刘小清

早就许诺为《数学文化》的读者介绍数学在金融中的应用，待提起笔来，我才意识到，现代金融业发展至今日，所采纳和发展的数学工具和方法已经如此丰富多彩，绝非拙笔可以一文尽述的了。于是决定且先介绍关于期权的数学，抛砖引玉，激发好奇的读者去进一步了解数学在金融中更多的应用。

《数学文化》曾载文《华尔街最著名的数学家》，介绍日本概率学家伊藤清 (Kiyoshi Itō)。他建立的随机微分方程及伊藤公式是解决期权定价、对冲等问题的数学法宝。 伊藤的名字响彻了华尔街，这是不争的事实。然而说到影响华尔街的数学家，则他既非前无古人也非后无来者。历史上开启现代数理金融学先河的，当推一百多年前法国巴黎的博士生路易斯 • 巴舍利耶（Louis Bachelier）。与伊藤并非以解决金融问题作为研究初衷不同，巴舍利耶主动地跟踪当时巴黎交易所股市的跌宕起伏，希望创造出行之有效的数学工具来描述和分析股票价格变动的过程。有概率修养的读者都明白，中心极限定理是概率论的核心成果。它说的是：大量独立随机变量的平均数是以正态分布为极限的。深谙此定理之精髓，巴舍利耶巧妙地构造出一种增量独立的随机过程：布朗运动。提起布朗运动，物理学家和数学家往往联想到爱因斯坦和维纳（布朗运动也称维纳过程），其实巴舍利耶的工作比他们来得更早。如果记布朗运动在时间 $t$ 时的位置为 $W_t$，则 $W_t$ 必须满足以下性质：

(1) $W_{t_1}-W_{t_0}, W_{t_2}-W_{t_1}, \cdots, W_{t_{n+1}}-W_{t_n}$ 相互独立；

(2) 任意增量 $W_{t_{n+1}}-W_{t_n}$ 服从如下正态分布

$$E(W_{t_{n+1}}-W_{t_n})=0,\quad Var(W_{t_{n+1}}-W_{t_n})=t_{n+1}-t_n,$$
$$t_0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n.$$

巴舍利耶通过布朗运动

$$S_t=S_0+\sigma W_t$$

来描述股票价格，使得股票的若干近似性质比如马尔科夫性（即未来的价格与历史无关）、增量的独立正态分布等，都得到了简洁的刻划。巴舍利耶敏锐地意识到了随机过程与偏微分方程之间的联系。通过高斯概率密度函数

$$f(t,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}},$$

他把布朗运动和热传导方程沟通了起来。而这其中的奥妙其实就在于 $f(t,x)$ 恰好是热传导方程的基本解。巴舍利耶所推导的偏微分方程，便是日后随机分析理论中著名的福克 -

路易斯•巴舍利耶
Louis Bachelier

普朗克 - 柯尔莫哥洛夫（Fokker-Planck-Kolmogorov）方程。布朗运动的引入，大大方便了巴舍利耶进一步研究股票期权的定价问题。股票期权是一种衍生证券合约，合约确定了一个执行价格 $K$。以看涨期权为例，等时间来到期权的到期日 $T$ 时，假如股票的价格 $S$ 高于 $K$，期权的持有人将获得 $S–K$ 的收益，假如股票的价格 $S$ 低于或等于 $K$，则收益为零。假如你是个投资者，判断牛市来临，你可以买看涨期权，如果最终股价真的上涨了，则你和买股的人一样有钱赚，如果下跌，则你不必继续跟着买股的人输钱，而你的投资成本，即期权的价格，相对于直接购买股票要低，此可谓四两拨千斤。

那么期权的价格怎么确定才合理呢？这就是现代金融理论和实务中最为引人入胜期权的定价问题。我个人的看法是一百年前的巴舍利耶已经基本破解了这个难题，他的结果距离荣膺诺贝尔奖的布莱克 - 舒尔茨（Black-Scholes）公式仅一步之遥。当年巴氏这份博士论文的评审，是经过了现代最伟大的数学家之一庞加莱之手的，并且受到这位数学大师的慧眼赏识，然而金融数学的研究却未因此而蔚然成风。尽管随后的几十年是概率论和随机过程研究发展的黄金时期，成果丰硕，而且在今天看来，这些成果有不少与巴舍利耶论文的工作是一脉相承的，但令人遗憾的是巴舍利耶本人却被忽视了。

学术界对巴舍利耶的再发现要一直等到上世纪的 50 年代。曾在二战中协助冯•诺依曼发明第一台计算机的美国统计学家伦纳德•萨维奇（Leonard Savage），在 1955 年前后向包括麻省理工学院的保罗•萨缪尔森（Paul Samuelson）在内的著名经济学家们寄出了半打明信片，激赏巴舍利耶的博士论文，提醒他们关注巴氏的工作。明信片如一石激浪，从麻省理工开始，迅速波及其他重要学术机构，促使包括萨缪尔森、莫顿（Robert Merton）、布莱克（Fischer Black）和舒尔茨（Myron Scholes）等顶尖人才进一步研究数理金融学，尤其是期权的定价问题。这终于导致了布莱克 - 舒尔茨期权定价公式的诞生。布莱克和舒尔茨的推导过程大致如下：

1. 假设股票价格遵从以下随机微分方程：

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

其中 $\mu$ 是股票的期望回报率，$\sigma$ 是股价波动率，$W_t$ 是布朗运动。该方程的解为带漂移项的几何布朗运动

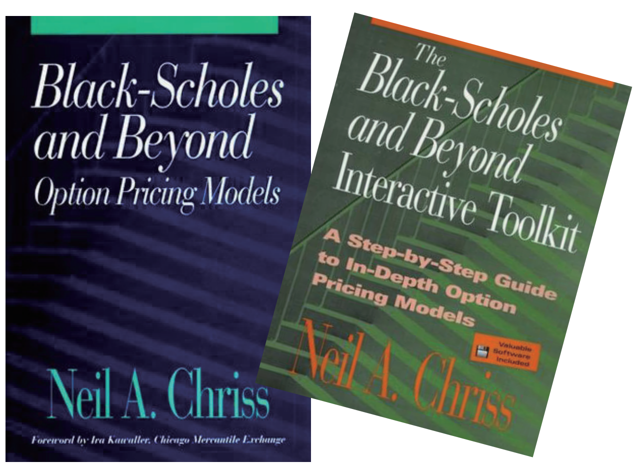
$$S_t = S_0 e^{\left(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2\right)t+\sigma W_t}.$$

2. 构造投资组合：买入一份期权，沽空一定数目的股票。股票沽空的数目随股票价格的变动而调节，目标是使得投资组合变成无风险，即当股价稍微走低时，期权的损失正好为沽空股票的获利所弥补，而当股价稍微走高时，期权获利也正好为股票空头的损失所抵消。用数学的语言表达就是：使得投资组合的价值对股价的偏导数时刻为零。

3. 既然这是一个无风险的投资组合，那么它的回报应该等于无风险的利率（比如说储蓄利率）$r$，再利用伊藤公式，便可以导出期权价格 $f$ 所满足的偏微分方程（BS 方程）：

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf.$$

4. 由于看涨期权价格即为满足 BS 方程以及终值条件




介绍布莱克 - 舒尔兹公式的参考书

$$f(T,S)=\max(S-K,0)$$

的特解，利用热传导方程的基本解便可得到期权在时间 $t$ 时的价格

$$f(t,S)=SN(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2).$$

其中函数 $N$ 为正态分布的概率分布函数。这就是著名的布莱克 - 舒尔茨公式（BS 公式），其中

$$d_{1,2}=\frac{\ln(\frac{S}{K})+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

多么精妙的推导和漂亮的结果啊！可惜好事多磨：布莱克和舒尔茨将他们的研究成果投稿给《政治经济期刊》（Journal of Political Economy），却惨遭退稿；转投《经济与统计评论》（Review of Economics and Statistics），再次被拒。幸亏芝加哥大学经济学大师米勒（Merton Miller）和法玛（Eugene Fama）相助一臂之力，文章的修改稿才最终获得《政治经济期刊》重新审稿并通过，发表于 1973 年。无巧不成书，文章发表后一个月，芝加哥期权交易所开张，期权交易员这下有了数学公式来计算自己心仪合约的价格了。德州有家电子仪器公司索性把 BS 公式编进专门的计算器，让交易员们揣着它进场交易。数学模型破天荒变成了金融市场一个不可分割的组成部分。到了 1984 年，若以交易量计，芝加哥期权交易所已经跃居第二，仅次于纽约股票交易所了。1997 年斯坦福大学的舒尔茨和哈佛的莫顿分享了该年度诺贝尔经济学奖，而加盟了高盛投资银行的布莱克却不幸已于 1995 年因病辞世，令人扼腕！

现在我们不妨来追究一下巴舍利耶的结果距离 BS 公式到底有多远呢。如果沿用上述数学符号，则巴舍利耶的定价公式其实是这样的：

$$f(0,S)=\int_{K-S}^{\infty}(S+x-K)\frac{1}{S\sigma\sqrt{2\pi T}}e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2S^2T}}dx.$$

也就是说，如果他把这个积分积出来的话，便可得到 BS 公式在假设股价分布正态并忽略利率折现时的情形了！为了纪念巴舍利耶，彰显他对现代数理金融学里程碑式的贡献，全世界数理金融界决定成立以他的名字命名的金融学会，旨在通过国际交流来促进随机过程理论、统计方法以及其他数学理论在金融中的应用，推动金融业的发展。巴舍利耶金融学会每两年在地球上一处美丽的风景地举行学术大会。笔者有幸于 2002 年在希腊风光旖旎的克里特岛参加了学会的第二次年会，一睹该领域大师们的学术风范和魅力。

细心的读者可能已经注意到：股票的期望收益率 $\mu$，明明是作为所谓“漂移项”出现在股价的随机微分方程里的，可在 BS 公式里它却悄然消失了。直觉上人们容易认为期权的价格应该等于它在到期日可能得到的各种回报的折现值的

舒尔茨
Myron Scholes

布莱克
Fischer Black

平均，因此股票具有较高的“期望”收益难道不应该导致看涨期权具有较高的价值吗？如果你有这样的困惑，请别对自己的直觉和理解力感到不安。初学时这个问题也折腾过我的脑袋。就连布莱克和舒尔茨二位鼻祖对此也曾感到费解，尽管其偏微分方程的数学推导已然是天衣无缝的了。究竟直觉与理论的断裂发生在哪里呢？原来它就在我特意加上引号的期望二字上头。BS 公式诞生许多年之后，金融数学家哈里森（Michael Harrison）、克雷布斯（David Kreps）和普利斯卡（Stanley Pliska）才证明了期权定价的确可以通过求取回报函数折现值的数学期望而获得，但求取期望时所采用的测度却并非现实世界的原概率，而必须是使可交易资产（比如股票以及期权）与所选取的计价单位之商成为鞅过程的一个新的概率测度。

为了透彻地把他们的结论和 BS 公式关系演绎清楚，我不得不提及另一位概率学家吉尔萨诺夫（Igor Vladimirovich Girsanov, 1934-1967）和他的一个定理。吉尔萨诺夫应该算是莫斯科概率学派中的一位天资聪慧的后生。他的研究工作以随机过程和随机分析为主，在应用数学上也有独到贡献。值得一提的是，吉尔萨诺夫对经济现象与巴舍利耶有着几乎相同的强烈兴趣，曾经力排众议，倡导在经济学中运用定量方法和数学模型从事研究。吉尔萨诺夫 1960 年发表了一个关于测度变换的定理：

在测度 $P$ 下带漂移项的布朗运动

$$\tilde{W}_t=W_t+\int_0^t\theta_s ds,$$

可以通过以

$$Z_t=\exp\left(-\int_0^t\theta_s dW_s-\frac{1}{2}\int_0^t\theta_s^2 ds\right)$$

作为拉东 - 尼古丁导数的测度变换

$$\frac{dQ}{dP}=Z_T$$

转变成测度 $Q$ 下的标准布朗运动。

借助这个定理我们可以来解释期权定价时所做的概率测度变

吉尔萨诺夫
Igor Vladimirovich Girsanov

换到底是怎么一回事了。假设市场中另有一只股票，其价格 $\tilde{S}_t$ 满足如下随机微分方程：

$$d\tilde{S}_t = \tilde{\mu}\tilde{S}_t dt + \tilde{\sigma}\tilde{S}_t dW_t .$$

现在我们构造一个投资组合策略 $\pi_t = (\tilde{\sigma}\tilde{S}_t)S_t - (\sigma S_t)\tilde{S}_t$，即始终持有 $\tilde{\sigma}\tilde{S}_t$ 份的第一只股票和卖空 $\sigma S_t$ 份的第二只股票。如果该策略自负盈亏，即保障策略输赢纯粹由股价的涨跌决定而没有额外资金进出，那么该投资组合便能消去随机项，且它的回报率应该等于无风险利率：

$$\begin{aligned} d\pi_t &= (\mu\tilde{\sigma} - \tilde{\mu}\sigma)\tilde{S}Sdt \\ &= r(\tilde{\sigma} - \sigma)\tilde{S}Sdt \end{aligned}.$$

于是我们得到

$$\mu\tilde{\sigma} - \tilde{\mu}\sigma = r(\tilde{\sigma} - \sigma),$$

或者

$$\frac{\mu - r}{\sigma} = \frac{\tilde{\mu} - r}{\tilde{\sigma}}.$$

可见股票期望收益率与无风险利率之差除以股价波动率之后是一个常数，与具体是哪家公司无关，我们记之为 $m$。$m$ 通常称为风险的市场价值，体现了市场对风险的好恶。如果 $m>0$，则 $\mu > r$，表示倘若投资者若冒了风险 $\sigma$，他便希望平均回报率要高于无风险利率，高出的量以系数 $m$ 与 $\sigma$ 成正比。在风险厌恶心态下，期权投资者对于到期日正好得到低回报甚至零回报的害处会故意放大；相反对于到期日正好得到高回报的好处会故意打个折扣。如果我们不把"折扣"打在回报的效用之上，而是打在概率上，便导致了概率测度的变换。

如果说"根据伊藤公式（by Itō's formula）"是华尔街数理专家的第一口头禅的话，那么第二口头禅恐怕就要数"根据吉尔萨诺夫定理（by Girsanov's Theorem）"了。测度变换的技术之于分析师犹如魔棒之于魔术师，挥之而化繁复的难题为精巧的解答。天妒英才，1967 年吉尔萨诺夫三十出头便死于意外。邓肯（Evgenii Dynkin）和柯尔莫哥洛夫（Andrey Kolmogorov）等人在期刊《概率论及其应用》（Teoriya Veroyatnostei i ee Primeneniya）为他撰写讣文，选择性地介绍了吉氏的学术佳作，其中却并不包括发表于 1960 年关于随机过程测度变换理论的这一篇。笔者毫不质疑柯尔莫哥洛夫科等大师在数学尤其是概率论上高瞻远瞩的洞察力，但也不禁为数学在自然科学、生产技术以外的领域里能有出乎先辈意料的应用潜力而惊叹。

关注股市的读者可能会有一个疑问：股价的波动率，即股价方程中的所谓"扩散项"$\sigma$，怎么可能保持常数呢？这回你可是问中要害了。我们不再能够用一两个强有力的定理便把这个问题轻而易举地化解掉了。布莱克、舒尔茨和莫顿自然也明白常数波动率是一个过于简单化的理想假设。幸好在 1987 年 10 月华尔街股市大崩盘之前，相对稳定的资本市场容忍了这项假设的缺陷，BS 公式几乎一路无惊无险地服务着期权交易。

对于不同的敲定价格 $K$、不同的到期日 $T$，通过相应期权的市场价格 $P(K, T)$，我们可以由 BS 公式的逆运算得到股票的波动率

$$\sigma = \sigma(K,T).$$

它被简称为隐含波动率（Implied Volatility），意指由期权价格所隐含的波动率。87 股灾之后，$\sigma(K,T)$ 不再保持是一张平面，而是开始呈现弯曲。若暂时固定 $T$，则 $\sigma(K)$ 常见的形状接近于开口向上的二次曲线，有如一抹微笑之嘴型。波动率微笑（Volatility Smile）故此得名。隐含波动率的微笑，意味着不存在一个常数 $\sigma$，能使得具有不同敲定价或到期日期权的市价同时得到满足。这迫使我们去寻找波动率的某种数学模型，以便整个隐含波动率曲面所对应的全部期权价格都能得到满足，或者至少尽量逼近。这样的手段业界称为波动率的校准（Volatility Calibration）。成熟的衍生交易台往往是先读入市场流动性较高的标准交易产品的价格，用以校准自己的标的模型，再拿校准后的模型对即将与客户或专业对手交易的特种期权（Exotic Options）进行定价。

波动率的校准，在数学性质上其实就是求随机微分方程或者它所对应的偏微分方程的反问题。我的同学张宇曾在《数学文化》上撰文介绍地球物理中的反问题。他在《张关泉先生文集》序言中谈到："对于传统的正演问题，椭圆型方程和抛物型方程有比较简单的数学性质，研究上比较容易。而以波动方程为代表的双曲型方程则无论在理论和计算上都比较困难。反问题的研究恰好相反。研究椭圆型、抛物型方程的反问题就如同和一个喜怒不行于色的人打交道，很

难从他的外在表现判断其所思所想。而反演双曲型方程则类似给病人切脉诊病，虽然困难，却还有迹可寻。”期权的 BS 方程恰好是抛物型热传导方程，正解的性质良好，但波动率微笑的校准作为 BS 方程的反问题，解决起来就相当棘手。在股票、利率、外汇等各个资产类别市场中隐含波动率的微笑各有特点，对付起来需要量体裁衣，避免顾此失彼。银行里顶尖的衍生品数理分析师和学术界高明的金融数学家为此创造的方法和模型层出不穷。尽管结果未必尽善尽美，有时难免头痛医头脚痛医脚，但是针对特定问题的偏方往往还是十分行之有效的。

伊曼纽尔•德曼（Emanuel Derman）是布莱克在高盛的下属，他俩曾和同事比尔•托依（Bill Toy）合作建立了著名的 BDT 短期利率模型，促进了固定收益衍生产品的发展。德曼发明了隐含二叉树的方法，用以处理股票波动率的微笑。二叉数其实是随机微分方程

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

的一种离散化结构。如图 1 所示，水平方向是时间，竖直方向是股价。在每个离散化时间区间上，股价 $S_{n-1}$ 以概率 $p_u$ 上涨至价位 $S_n = uS_{n-1}$，其中

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}},\quad P_u = (e^{r\Delta t} - d)/(u-d)\ ;$$

而以概率 $p_d = 1 - p_u$ 下跌至价位 $S_n = dS_{n-1}$，其中 $d = 1/u$。这样，到期日的股价 $S_N$ 形成如下离散分布

$$P(S_N = u^k d^{N-k} S_o) = C_N^k P_u^k P_d^{N-k}.$$

当时间离散的步长足够小时，此离散分布充分地逼近随机微分方程的解。


从物理学家成功变为计量金融大师的伊曼纽尔•德曼

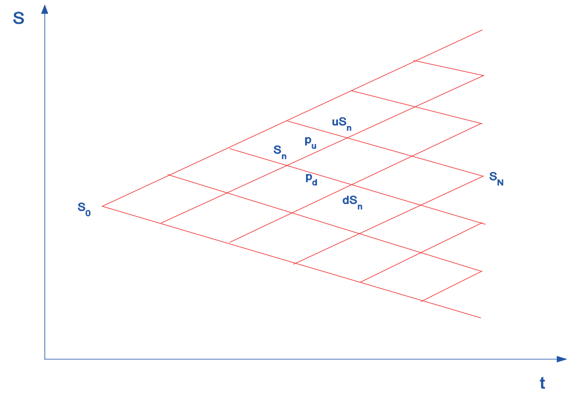



图 1 二叉树模型

二叉树方法与 BS 偏微分方程的差分方法紧密联系，异曲同工。读者请注意：由于波动率 $\sigma$ 为常数，故股价变动系数 $u$ 和 $d$ 为常数，整棵二叉树呈现规则的形状。为了产生波动率微笑，德曼巧妙地允许二叉树发生变形（如图 2 所示），并且还随时随地调整上涨和下跌概率 $p_u$ 和 $p_d$，使形变后的二叉树在时间方向上递进地满足市场上的隐含波动率微笑。德曼把 $n$ 时刻上 $S_n$ 的 $n$+1 个可能价位以及从 $S_{n-1}$ 上涨达到相应的 $S_n$ 的 $n$ 个概率值 $p_u$ 当成 2$n$+1 个待定变量，要求它们满足 2$n$+1 个方程，当中一部分方程由以 $n$ 时刻为到期日的不同敲定价的期权的价格所订立。隐含二叉树故此得名。

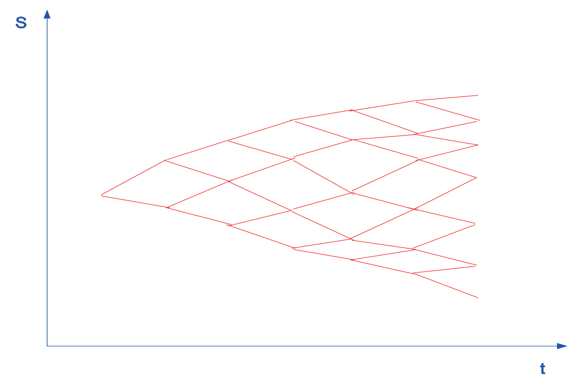



图 2 隐含二叉树模型

德曼系哥伦比亚大学物理学博士，曾在美英名校从事粒子理论研究。1985 年他离开 AT&T 贝尔实验室，加入高盛银行。BTD 模型和隐含二叉树模型分别是他在高盛固定收益部和股票部量化策略组的作品。德曼荣获国际金融工程协会颁发的“年度金融工程师”大奖，他的专业成就和江湖地位当然不可小觑，然而德曼却是在四十岁后才正儿八经地学习随机微积分的。他的工作少硬拼而多巧思，对于数

学的运用宁精勿滥。德曼认为物理模型面向自然界客观的变量，而金融模型面向金融市场主观的变量，前者力求用眼前信息精确推测未来，后者则往往只能从流动性高的证券的价格估计流动性低的产品的价值；物理学也许存在斯蒂芬 • 霍金（Stephen Hawking）曾追求的万有理论（Theory of Everything），但金融学和社会科学则是倘若能够取得一个一个有用的理论就值得庆幸了。

前文提及隐含波动率微笑的校准也可以作为偏微分方程的反问题来处理。布鲁诺 • 迪皮尔（Bruno Dupire）便是循着这条途径取得了十分漂亮的结果。为方便起见，我们姑且假设利率为零。迪皮尔把股价方程里的扩散系数 $\sigma$ 当成时间 $t$ 和股价 $S$ 的函数 $\sigma(t,S)$，称之为局部波动率。如此一来，按照哈里森、克雷布斯和普利斯卡求风险中性测度下数学期望的方法，看涨期权价格可以表示为

$$C(T,K)=\int_0^\infty \max(S-K,0)\varphi_T(S)dS,$$

其中

$$\varphi_T(S)=\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}(T,K).$$

从福克 - 普朗克 - 柯尔莫哥洛夫方程出发，可推导出如下关系：

$$\frac{\sigma^2(T,K)}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial K^2}=\frac{\partial C}{\partial T},$$

即著名的迪皮尔方程。原则上局部波动率可以由这个方程直接解出，但实际操作起来却不轻松，因为市场上观察到的隐含波动率并非一个光滑完整的曲面，人们必须调用各种精细的数值方法以实现这个模型。

华尔街有一份高品位专业月刊叫做《风险杂志》。它在金融风险管理、衍生品业务以及金融监管等内容上具有极高的权威性。该杂志设有“前沿”专栏，刊登面向衍生品及量化风险管理的技术性文章，金融数学于此常登大雅之堂。迪皮尔关于局部波动率的文章便是刊登在 1994 年 1 月的“前沿”专栏。文章影响深远，似乎至今仍然独占该刊技术论文最高引用率之鳌头。《风险杂志》每年除了评选出各类业务的年度最佳金融机构以外，还专门评选出一位年度最佳数量分析师（Quant of the Year）。对于华尔街，这些奖项的意义就好比奥斯卡之于好莱坞。2008 年《风险杂志》给迪皮尔颁发了终身成就奖（Lifetime Achievement Award）。

布鲁诺 • 迪皮尔（Bruno Dupire）
2008 年被《风险杂志》授予终生成就奖

在局部波动率模型中，波动率 $\sigma(t,S_t)$ 的随机性是由股价 $S_t$ 携带进来，间接产生的。在理论上它的优点是保持市场的完备性，就是说没有引入股价以外其他需要另外对冲的风险；在数值实现上它的优点是计算量小。波动率建模的另一种思路是，索性为股价瞬时的波动率引入新的随机性，甚至赋予它一个新的随机微分方程。这样的模型我们称为随机波动率模型，到今天已发展出各种各样的变化形式。但建立较早、应用广泛的是如下的斯蒂文 • 赫斯顿（Steven Heston）随机波动率模型：

$$dS_t=\mu S_t dt+\sqrt{\upsilon_t}S_t dW_t,$$
$$d\upsilon_t=\theta(\omega-\upsilon_t)dt+\xi\sqrt{\upsilon_t}dB_t$$

这里赫斯顿假设波动方差（即波动率的平方）$\upsilon_t$ 是一个均值回归过程，$\omega$ 为 $\upsilon_t$ 长期的平衡值，$\theta$ 为回归速率，$\xi$ 为波动率之波动率。通过解概率分布特征函数所满足的微分方程，他推导出了该模型下期权价格的解析解公式（公式较长，此略去）。随机波动率模型的校准，是通过调整 $\omega$，$\theta$，$\xi$ 以及布朗运动 $W_t$ 和 $B_t$ 的相关系数来实现的。这是一个多元非线性最小化问题，解析解的获得大大提高了目标函数赋值计算的效率。

多年前笔者和同事因工作需要动手对赫斯顿模型进行数值实现，碰到了两件事：一是如何把解析解扩展到系数随时间变化的情形，以便让模型能够吻合二维隐含波动率曲面；二是如何对解析解表达式中复变量对数函数进行赋值，因为算法若不精心设计，复对数的多值分支便会破坏解的连续性。当时距离赫斯顿模型的发表已经 10 年有余了，然而我们发现还有不少其他银行也正设法解决着同样的问题。这些问题的解法近年来有关文献已经将之公诸于众，不是本文重点。我想说的要点是：把数学应用于金融实践是具有颇深的工程性的，从基本理论到实际生产，有很多细腻的技术问题要解决，挑战着金融工程师的耐心和创造性。华尔街爱把金融数理分析家比作火箭科学家。这固然是美誉，但也应该视为鞭策：纸上谈兵不够，火箭飞上天才称得上名副其实。

对付波动率微笑，还有一种十分独特的方法，它和蒙特卡罗模拟（Monte Carlo simulation）紧密联系。蒙特卡罗模拟是用于定价特种期权的普适性最强的数值方法。它

首先在时间方向上对 $S_t$ 的随机微分方程进行离散化，再按照方程所确定的转移概率分布，模拟出 $M$ 条 $S_t$ 的样本轨道 $S_n^{(m)}, m=1,\cdots,M$，如图 3 所示。这里 $n$ 代表第 $n$ 个时间离散点。

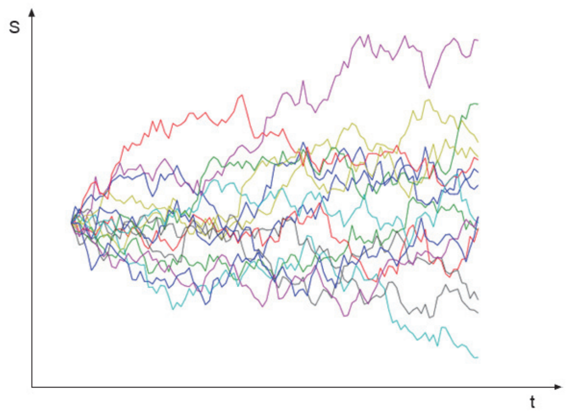



图 3　模拟特卡罗模拟的股价样本轨道

马可 • 阿韦亚内达（Marco Avellaneda）
2010 年《风险杂志》“年度数量分析师”

记期权的回报函数为 $h$，相应轨道的折现因子为 $D^{(m)}$，则期权的价格 $P$ 可以逼近如下：

$$P=\frac{1}{M}\sum_{m=1}^{M}D^{(m)}h(S_n^{(m)},n=1,\cdots,N).$$

$h$ 可以为 $S_n^{(m)}$ 的一个特殊的泛函，相应的期权可以比常规的看涨、看跌期权复杂得多，称为特种期权。蒙特卡罗方法的优点就在于回报函数的复杂性本质上不太增加定价的难度。而其他数值方法，包括有限差分方法和分叉树方法等，在这一点上则望尘莫及。上述期权价格 $P$ 的表达式其实默认了每条样本轨道发生的概率均为 $p^{(m)}=\frac{1}{M}$。对此，纽约大学库朗数学研究所马可 • 阿韦亚内达（Marco Avellaneda）教授创造性地提出可以通过重新调整样本轨道的概率分配来使得轨道所代表的离散分布能够满足市场隐含波动率的要求。这是一个聪明的主意，可是为了取得充分的收敛效果，样本轨道数目 $M$ 必须很大，而提供隐含波动率信息的高流动性期权合约的数目 $N$ 通常却相对有限，用代数的语言讲，就是方程的数目远小于未知量的数目。为了使问题适定化，阿韦亚内达科学地引入了概率测度之间相对熵的度量（即测度间的“距离”），并对它进行带约束的最小化，即求解样本轨道新概率的 $q^{(m)}$，使得

$$\begin{cases}\min\limits_{q} D(p/q)\equiv\min\limits_{q} D\left(\ln M+\sum\limits_{m=1}^{m}q^{(m)}\ln q^{(m)}\right)\\ \sum\limits_{m=1}^{m}p^{(m)}Q_{mn}=C_n,\quad n=1,\cdots,N,\end{cases}$$

其中 $D(p/q)$ 表示概率测度 $p$ 与 $q$ 之间的相对熵，$\ln M$ 正好是 $p$ 的熵，$Q_{mn}$ 为第 $n$ 件市场标准产品在轨道 $m$ 发生时的收益。

阿韦亚内达不久前获颁《风险杂志》“年度数量分析师”的桂冠。《风险》将此头衔授予一位数学教授，无疑证明了学术界在数理金融学上的研究成果已经对业界产生了举足轻重的作用。

作者介绍：

刘小清，中国科学院应用数学博士，新加坡国立大学金融工程博士，曾于新加坡国立大学执教金融数学，目前在星展银行财资市场部任董事总经理。