



西塞罗发现阿基米德之墓（本杰明·威斯特的油画，1797年作）

# 数学奖章上的 数学故事

欧阳顺湘

有许多用著名数学家的名字来命名的数学奖，如费马奖、康托奖和欧拉奖等等。其中许多是“单项奖”，奖励在某些方面（往往是用来命名的数学家有所建树的领域）成就卓越的数学家。如欧拉奖（Euler Prize）自1993起在每年的国际组合数学年会上颁发给在组合数学领域有突出贡献的数学家。也有不少“终身成就奖”，著名的有2001年设立的阿贝尔奖。该奖由挪威王室一年一度颁给杰出数学家，奖金达80万美元，媲美诺贝尔奖奖金，是世界上奖金最高的数学奖。

这里我们聊聊国际数学家大会和国际数学教育大会上颁发的奖项，欣赏奖章，了解相关的数学家和数学知识。



菲尔兹



菲尔兹奖章（正）



菲尔兹奖章（反）

## 国际数学家大会上四大奖项

在德国数学家联合会（Deutsche Mathematiker-Vereinigung, 简称 DMV）主席康托的积极努力下，首届国际数学家大会（International Congress of Mathematicians, 缩写为 ICM）于 1897 年在瑞士苏黎世召开。自 1900 年在巴黎召开了第二次会议后，每四年举行一次。但因二战而停办。1950 年国际数学联盟（International Mathematical Union, 缩写为 IMU）成立，国际数学家大会的传统才得以恢复。现在国际数学家大会最令人瞩目的要事之一便是开幕式上颁发的四大奖项：菲尔兹奖、奈望林纳奖、高斯奖和陈省身奖。

### 菲尔兹奖

菲尔兹奖由加拿大数学家约翰·查尔斯·菲尔兹（John Charles Fields, 1863-1932 年）建议设立。菲尔兹早年游学美国、欧洲，与诸多大数学家共事。其后返回加拿大致力于提升数学的地位。如在他努力下，1924 年世界数学家大会在加举行。他自上个世纪 20 年代末开始筹备该奖，并遗嘱捐赠 \$47,000 给奖项基金。菲奖在 1936 年首颁；后从 1950 年起每隔 4 年颁发一次，奖励 40 岁以下数学成就杰出者，且旨在鼓励获奖者进一步的研究。获奖者一般为 2 至 4 人。该奖有“数学界中诺贝尔奖”之称，其实它早期并无今日如此声誉，这很大程度上源于历届获奖者给它带来的荣耀。

菲尔兹奖包括一面金质奖章和一笔不算多的奖金（目前为 15,000 加元）。奖章正面有古希腊数学家阿基米德的头像（Archimedes, 前 287- 前 212 年）和希腊文“ΑΡΧΙΜΗΔΟΥΣ”，意为“阿基米德的（头像）”；头像周边刻拉丁文“TRANSIRE SUUM PECTUS MUNDOQUE POTIRI”，此来源于一世纪罗马诗人马尼利乌斯（Manilius）的著作《天文学》，意为“超越他的心灵，掌握世界”。此外奖章设计者（Robert Tait McKenzie）名字之缩写 RTM 及设计年份 MCNXXXIII（即 1933 年，第二个 M 字母以 N 代）也刻在奖章上。获奖者的名字则会被刻于奖章边轮。

菲奖章背面刻有意为“聚全球数学家，为杰出著作而颁”的拉丁文“CONGREGATI EX TOTO ORBE MATHEMATICI OB SCRIPTA INSIGNIA TRIBUERE”。文字和树枝的背景为球体嵌进圆柱体（“圆柱容球”）的示意图，这象征着阿基米德的得意之作《论球与圆柱》中最著名的一个结果：球与其外切柱体的面积（体积）之比为 2 : 3。阿基米德对此如此骄傲，以致他希望人们在他的墓碑上刻下球与圆柱体的关系图。确实，阿基米德计算各种面积所用的“穷竭法”可以被视作后世微积分学所用“无穷小分析”的起源。

传说正沉思于几何问题的阿基米德被鲁莽无知的罗马士兵杀死之后，罗马将军马塞勒斯悲伤不已，不但给阿基米德立墓，备极哀荣，并按他生前的愿望在碑上刻球内切于圆柱的图形。在公元前 73 年，时任西西里岛财务官的罗马著名政治家、哲学家西塞罗（Marcus Tullius Cicero, 前 106- 前 43 年）去叙拉古（Syracuse）探访阿基米德之墓。其时阿基米德去世才 137 年，当



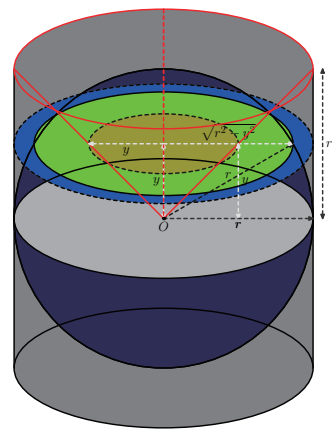
今日意大利西西里岛阿基米德家乡叙拉古的“阿基米德的坟墓”遗址

地人却已对阿基米德之墓一无所知，否认有这样一个墓。通过一番搜索，西塞罗终在杂草丛中凭此球内切圆柱图案辨认出阿基米德的墓，并派人去清理繁芜，铺砌道路。西塞罗在他的文章中写道，找到阿基米德之墓后，他告诉叙拉古人，此刻他和叙拉古最杰出的人在一起，而这正是他一直在寻求的。后来一些画家还将此刻情景凝固在油画中。其中著名的有美国画家本杰明·威斯特（Benjamin West, 1738-1820）1797 所作的油画“西塞罗发现阿基米德之墓”（1804 年他另作一幅稍有差别的画）。两个名人穿时空的重逢确是值得纪念的。这种对文明的尊重弥足珍贵的另一个原因是对数学家的尊重在西塞罗那个时代是少见的。西塞罗曾写道“几何学在希腊人中享有极高声誉，没有什么比数学更加荣光的了；但我们（罗马人）却只满足于那些用来计算和测量的数学知识”。

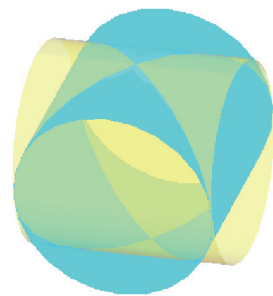
类似于阿基米德的“穷竭法”和圆柱容球的比例 2 : 3，我国三国时代魏国数学家刘徽也应用类似的极限思想求出了圆面积、一些锥体（如阳马与鳖臑）的体积。而且他还在评注我国算术名著《九章算术》时正确地猜测了球体积与其外切牟合方盖体积之比等于圆与其外接正方形的面积之比（即  $\pi : 4$ ）。这里所谓的“牟合方盖”是一个立方体从纵横两个方向做内切圆柱的共同部分，因其外型酷似上下相对（牟合）的方伞（盖）。中国家庭日常生活中常用的食物罩就类似牟合方盖的一半。

原来在《九章算术》的“少广”章中记有“开立圆术”，认为直径为  $D$  的球体积公式为

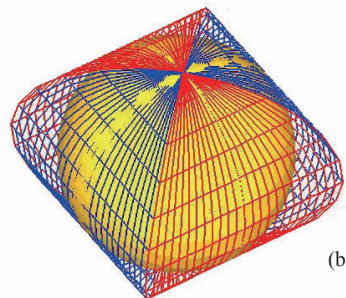
$$V = \frac{9}{16} D^3。$$



球与其外切柱体的面积（体积）之比为 2 : 3；若设球半径为  $r$ ，则球面积为  $4\pi r^2$ ，体积为  $\frac{4}{3}\pi r^3$ ；而其外切柱体面积为  $6\pi r^2$ ，体积为  $2\pi r^3$ （本图附圆锥及截面图，可作为 64 页图的参考）



(a)



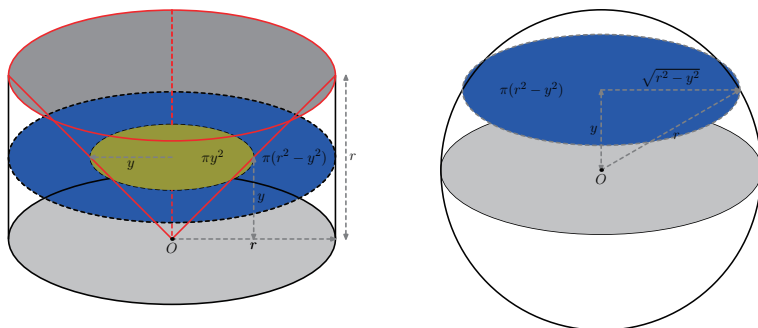
(b)

(a) 直交圆柱 (b) 内切圆球  
牟合方盖



(a) (b)

祖暅原理示意图



半球体积与圆柱体去掉锥体剩余部分体积相同（横截面（图中蓝色部分）面积相同）

如果将  $\pi$  取值为 3，则该公式相当于认为球体积与其外切圆柱体积之比为 3:4。刘徽指出这是错误的，但他自己没能求出牟合方盖的体积从而得出正确的球体积计算公式，而是将这个问题留给了后人，“以俟能言者”。

刘徽去世之后 200 余年，南北朝时期的祖冲之、祖暅父子共同提出了祖暅原理：所有等高处横截面积相等的两个同高立体，其体积也必然相等（“缘幂势既同，则积不容异”）。该原理在西方常被称为卡瓦列里原理，因由意大利几何学家卡瓦列里（Bonaventura Francesco Cavalieri, 1598 年 -1647 年）重新发现。这可以看作是微积分学发展历程中自阿基米德的穷竭法之后的一大进步。祖氏父子正是利用此原理算出牟合方盖的体积从而得出球体体积。

刘徽提出的球体体积与牟合方盖的体积之比则是祖暅原理的直接推论：因为我们可将球体当作由横截的圆累积而成；若将这些横截圆改为外接该圆的正方形，则所得立体即是牟合方盖。我们这里仅简单介绍如何用祖暅原理来理解阿基米德提出的比例。

在底面半径和高均为  $r$  的圆柱体中倒立一个以圆柱体上表面为底，下底面圆心为顶点的圆锥。易由勾股定理得知半径为  $r$  的半球“赤道”上方  $y$  处横截面（半径为  $\sqrt{r^2 - y^2}$  的圆）的面积为  $\pi(r^2 - y^2)$ ；而等高处圆柱体的横截面的面积（恒为  $\pi r^2$ ）去掉锥体的横截面积（ $\pi y^2$ ）为  $\pi(r^2 - y^2)$ 。由祖暅原理，半球体积等于圆柱体中除去圆锥体所剩部分之体积。我们知道内嵌圆锥体体积是柱体体积的三分之一，因此半球体积是  $\frac{2}{3}$  倍此圆柱体体积。

### 奈望林纳奖

奈望林纳奖由国际数学联盟于 1981 年设立，奖励在信息科学的数学方面有突出贡献的年轻数学家。它类似于菲尔兹奖，得奖者必须在获奖那一年不大于 40 岁。该奖包括一枚奖章和部分奖金，每四年在国际数学家大会颁发，且获奖者的名字也会被刻在奖章边轮。奈望林纳奖于 1982 年首颁，有“计算机科学中诺贝尔奖”之称。奈望林纳奖是以纪念在 1980 年去世的芬兰最著名的数学家之一罗尔夫·奈望林纳（Rolf Herman Nevanlinna, 1895-1980 年）。奈望林纳在函数论方面贡献卓著，且在 20 世纪 50 年代开启了



奈望林纳奖章（正）



奈望林纳奖章（反）



意大利米兰的卡瓦列里的雕像

芬兰的计算机项目。

1982年，国际数学联盟接受赫尔辛基大学对该奖的资助。奖章正面为奈望林纳的头像以及文字“ROLF NEVANLINNA PRIZE”（“奈望林纳奖”）以及很小的字符“RH 83”（示意此奖章由设计者 Raimo Heino 于1983年首次铸造），反面的两个图案都和赫尔辛基大学有关。奈望林纳是赫尔辛基大学的教授，并曾任校长。右下角是赫尔辛基大学的校徽，环绕校徽有赫尔辛基大学的名字“UNIVERSITAS HELSINGIENSIS”。左上角是文字“Helsinki”的编码，这和该奖的表彰内容相得益彰。例如，2010年获得奈望林纳奖的 Daniel Spielman 的一个主要贡献即是关于编码理论的。

## 高斯奖

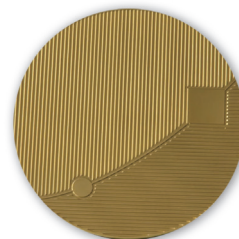
高斯奖由德国数学家联合会和国际数学联盟共同设立，以纪念“数学王子”高斯（Carl Friedrich Gauss, 1777-1855），主要用于奖励在数学之外的应用领域，如经济、技术乃至日常生活中有深刻影响的数学家。

高斯奖设立于2002年，并于2006年在马德里召开的第25届国际数学家大会上首次颁发。高斯奖包含一笔奖金和一枚奖章；奖金目前为一万欧元，资金来源于1998年在柏林召开的ICM的结余。高斯奖章正反图案均以数学中的基本元素点、线、曲线来构图。正面勾勒出高斯的头像，并刻文“FOR APPLICATIONS OF MATHEMATICS”（“为应用数学”）；反面为一曲线、一点和一方框组成的图以表示高斯的伟大成就之一：以最小二乘法来确定行星的轨迹。这是应用数学的典范。

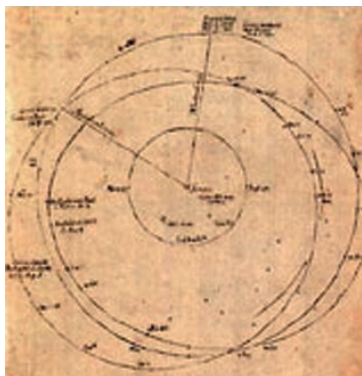
1801年元旦，意大利天文学家皮亚齐（Giuseppe Piazzi）发现了后来被命名为谷神星的小行星。皮亚齐跟踪观测了40天后由于谷神星运行至太阳背后



高斯奖章（正）



高斯奖章（反）



高斯绘谷神星的轨迹图



2006年9月，国际数学联盟主席鲍尔爵士前往日本将首届高斯奖颁给伊藤清



陈省身奖章（正）



陈省身奖章（反）

而丢失。科学家们开始了利用皮亚齐的观测数据来预测谷神星出现位置的竞赛。时年只有 24 岁的高斯运用早在 1794 年就创立的最小二乘法理论，准确地预测了谷神星的轨迹。同年底，天文学家 Zack 在很接近高斯预测的位置上重新发现了谷神星。

1809 年高斯在题为《围绕太阳沿圆锥曲线轨道公转的天体的运动理论》一文中，正式发表了最小二乘法理论。此前法国的勒让德（Adrien-Marie Legendre）也独立发现了最小二乘法原理。不过高斯对最小二乘法的贡献确实很大。他在 1822 年证明了回归分析中最小二乘法在一定意义上是最优的。他还利用最小二乘理论，得出了拉普拉斯等人苦思不得的误差分布——现在常称的高斯分布。德国曾经流通的 10 马克纸币，以及一枚纪念高斯的纪念币上，都有象征正态分布密度函数的“钟形”曲线图。

获得首届高斯奖的日本著名数学家伊藤清（Kiyoshi Itō, 1915-2008）的工作即是高斯奖表彰对象的范例。伊藤清揭示了随机王国的牛顿定律，开创了“随机分析”学。获得 1997 年的诺贝尔经济学奖的美国经济学家 Robert Merton 和 Myron Scholes 提出进行期权定价的 Black-Scholes 模型即基于伊藤清的工作。虽然早在 1900 年，法国数学家 Bachelier 就已经在他的博士论文中应用布朗运动来研究金融问题了，但伊藤清还是对他自己所研究的纯粹概率理论能在金融数学里有着深刻的应用感到吃惊。

### 陈省身奖

陈省身奖是首个以华人名字命名的国际数学大奖，它由陈省身基金和国际数学联盟共同设立，以纪念我们都很熟悉的数学家陈省身（Shiing-



天津南开大学陈省身楼旁的陈省身先生及其夫人郑士宁女士的纪念碑（附：左下角为碑顶）（王龙 摄）

Shen Chern, 1911-2004), 奖励给那些在数学领域有杰出终身成就的个人。陈省身奖于 2010 年在印度海德拉巴市 (Hyderabad) 举行的第 26 届国际数学家大会上首颁。

陈奖含一笔奖金和一枚奖章。奖金为 50 万美元, 一半奖励给数学家本人, 另一半奖金由获奖人捐助给一些支持数学的研究、教育和其它活动的社会机构, 以推动数学的发展。

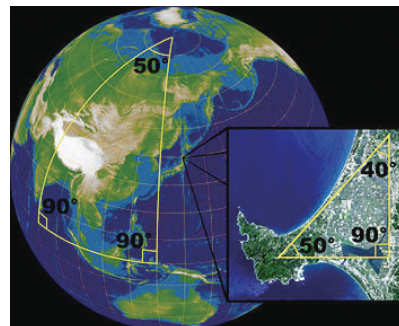
陈奖也获得哈里斯·西蒙斯基金的支持。西蒙斯 (James Harris Simons, 1938 年出生) 算是陈省身先生的学生, 也是他数学上的“六个朋友”(参《陈省身传》)之一, 他们曾合作得到几何理论对理论物理学具有重要意义的 Chern-Simons 理论。西蒙斯在 1970 年代放弃数学去经商, 现为著名的投资家。他还大力支持科学事业, 特别是数学事业。

陈省身奖章正面为时年 73 岁的陈省身头像, 左为陈先生的中文签名, 右为英文签名, 右边签名下方刻“1911-2004”, 表明他的出生和去世年份。奖章反面为陈省身 1944 年证明的广义高斯-博内定理 (又名陈-高斯-博内定理)

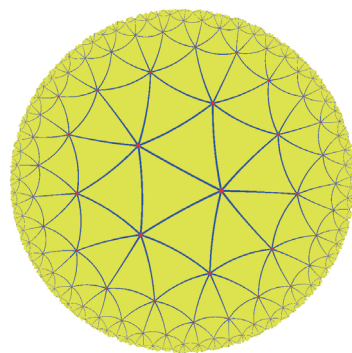
$$\chi(M) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_M \text{Pf}(\Omega)。$$

这个公式的最简单情形就已经足够有趣: 曲面上测地三角形的总曲率 (高斯曲率的曲面积分) 等于它的三角之和与  $\pi$  的差。因此正曲率曲面 (如球面) 上的三角形三角之和大于  $\pi$ , 而负曲率曲面 (如双曲几何曲面) 上的三角形三角之和小于  $\pi$ 。零曲率曲面 (欧几里得平面) 上, 三角之和正好为  $\pi$ 。

与陈奖章类似的是最近在南开大学省身楼旁揭幕的陈氏夫妇纪念碑 (今



地球上大范围三角之和大于  $\pi$ , 而局部三角可以近似看作平面三角形, 其和等于  $\pi$



双曲三角之和小于  $\pi$



克莱因奖（正）



弗赖登塔尔奖（正）



克莱因奖章、弗莱登塔尔奖章的反面

年为陈省身诞辰 100 周年)。纪念碑正面为黑色花岗岩造“黑板”，上刻陈手书高斯 - 博内公式的证明，下刻陈省身夫妇的姓名。纪念碑整体横截面为（双曲几何曲面上的）曲边三角形，示意前述高斯 - 博内公式的简单情形。

## 国际数学教育大会上两大奖项

2004 年，在丹麦哥本哈根举行的第十届国际数学教育大会上，首次颁发了国际数学教育的两项大奖：克莱因奖与费赖登塔尔奖，以纪念两位分别在二十世纪上、下半世纪为数学教育做出巨大贡献的著名数学家和数学教育家克莱因和费赖登塔尔。这两个奖每两年颁发一次，并在国际数学教育家大会上宣布。奖章正面分别为被命名者的头像，反面同为国际数学教育委员会的标志。

### 克莱因奖

菲利克斯·克莱因（Christian Felix Klein, 1849-1925）是德国数学家和数学教育家，他最著名的工作是发表爱尔兰根纲领（将各种几何用它们的基础对称群来分类）。他在晚年致力于数学教育，并任于 1908 年成立的国际数学教育委员会的第一任主席。是他曾建议函数概念和微积分应成为中学的必修课。他的《高观点看初等数学》（Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus I, 1908, II, 1909）影响深远，被译为多种文字（含中译）。

### 弗赖登塔尔奖

弗赖登塔尔（Hans Freudenthal, 1905-1990）是荷兰数学家和数学教育家。他年轻时就以拓扑学和李代数方面成就著称，分别为大数学家霍普夫（Heinz Hopf）、布劳威尔（L. E. J. Brouwer）的学生和助手。1951 年起他成为荷兰皇家科学院院士。

和许多著名数学家到晚年才开始关注数学教育不同，早在 1936 年，刚取得博士学位时年 31 岁的弗赖登塔尔就在荷兰组织了著名的“数学教育研究小组”。他从 1954 年起担任了荷兰数学教育委员会主席，并于 1967-1970 年间任国际数学教育委员会的主席，召开了第一届国际数学教育大会，创办了《数学教育研究》。弗赖登塔尔发表了几百篇（部）关于数学教育的著述。其中重要的有：《作为教育任务的数学》、《播种和除草》、《数学结构的数学现象》。他的工作奠定了现实数学教育的理论和实践基础，明确了现代数学教育改革的目標和方向。

写于德国比勒费尔德

2011 年 7 月