几何之美 2

宗传明

本文受到国家 973 项目 2011CB302400, 国家自然科学基金项目 11071003 和长江学者奖励计划的资助。
作者感谢贾朝华教授和项武义教授的润色建议。
通讯地址：cmzong@math.pku.edu.cn

引言

按照许多数学先哲（如庞加莱，哈代和冯 • 诺依曼等）的观点，数学不仅是一门科学，也是一门艺术。即数学也是一门追求独创和美的学问。

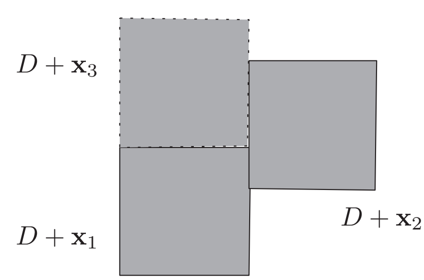
数学中确有一些艺术杰作：自然优美的问题，巧夺天工的构思，荡气回肠的结局。其独创性和优美程度绝不亚于柴科夫斯基的芭蕾舞剧或者雷诺阿的名画，只是对大众来说更难理解和欣赏而已。在这一系列短文中，我们将展示几何学中的几件“艺术珍品”。

对于一个数学家来说，欣赏学习他人的杰作不仅是为了（有可能）直接用到自己的工作中去，更重要的是为了提高修养，开阔眼界。从而使我们远离平庸，接近伟大。

本文将介绍关于立方体的闵可夫斯基猜想和 Keller 猜想。前者由闵可夫斯基（Minkowski，1864-1909）于 1907 年提出，于 1942 年被 Hajós 证明。Hajós 的证明是如此美妙，以至于被 S. K. Stein 比喻为“就像蚕蛹变成蝴蝶的过程一样神奇”。后者由 Keller 于 1930 年提出，是闵可夫斯基猜想的推广，其高维情况于 1992 年被 Lagarias 和 Shor 所否定。Keller 猜想的研究过程比 Hajós 的证明更神奇。

观察

假定 D 是一个单位方块，$X=\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots\}$ 是平面 E^2 中的一个离散点集合，$D+X=\{D+\mathbf{x}_i: \mathbf{x}_i\in X\}$ 是 E^2 的一个平铺 (tiling)。也就是说，方块 $D+\mathbf{x}_i$ 两两内部互不相交且 $E^2=\bigcup_{\mathbf{x}_i\in X}(D+\mathbf{x}_i)$。如果 $\mathbf{x}_1$ 和 $\mathbf{x}_2$ 是 X 中的两个点并且 $D+\mathbf{x}_1$ 与 $D+\mathbf{x}_2$ 有公共点，那么 $(D+\mathbf{x}_1)\cap(D+\mathbf{x}_2)$ 将是 $D+\mathbf{x}_1$ 的一条边或者是一条边的一部分。如果是后者，由于 $D+X$ 是 E^2 的一个平铺，如下图所示一定存在另一个正方形 $D+\mathbf{x}_3$ 与 $D+\mathbf{x}_1$ 相交于一条完整的边。



这样我们证明了如下结论：

如果 $D+X$ 构成 E^2 的一个平铺，那么其中必有两个方块具有一条完整的公共边。

在三维欧氏空间 E^3 中。我们假设

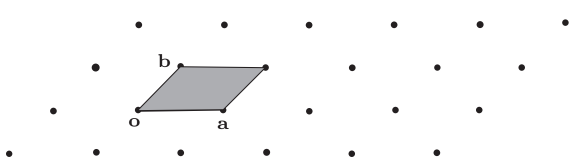
$$C=\{(x_1, x_2, x_3): |x_i| \le 1/2\},$$

X 是一个离散点集合（为了叙述方便，我们假定 $\mathbf{o}\in X$），$C+X$ 是 E^3 的一个平铺。如果 $C+\mathbf{x}$ 碰到 C 的一个顶点 $\mathbf{v}$, 那么 $\mathbf{v}$ 可能是 $C+\mathbf{x}$ 的一个面的一个相对内点，或者是它的一条边的一个相对内点，或者是它的一个顶点。如果是第一种情况，通过投影来考虑 $C+X$ 中所有含 $\mathbf{v}$ 的单位立方体（$C+\mathbf{x}$ 除外）可以证明其中必有一个与 C 有一个完整的公共面。这样，假设 $C+X$ 中不存在单位立方体既包含 $\mathbf{v}=(1/2, 1/2, 1/2)$ 又与 C 共面，那么其中一定存在三个立方体 $C+(1, 0, t_1)$，$C+(0, t_2, 1)$ 和 $C+(t_3, 1, 0)$，其中 $0<t_i<1$。这时，$C+(0, t_2, 1)$ 的顶点 $(1/2, t_2-1/2, 1/2)$ 一定是 $C+(1, 0, t_1)$ 的某个面的相对内点。所以 $C+X$ 中一定有一个立方体与 $C+(0, t_2, 1)$ 共面。这样我们证明了如下结论：

如果 $C+X$ 构成 E^3 的一个平铺，那么其中必有两个立方体具有一个完整的公共面。

2 闵可夫斯基猜想

我们先介绍几个概念。如果 $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ 是 n 维欧氏空间中的 n 个线性无关向量，Z 表示所有整数构成的集合，我们称 $\Lambda=\left\{\sum_{i=1}^n z_i\mathbf{a}_i : z_i\in Z\right\}$ 为一个格并记其基本方体 $P=\left\{\sum_{i=1}^n \lambda_i\mathbf{a}_i : 0\le\lambda_i\le 1\right\}$ 的体积为 $d(\Lambda)$。格是由高斯为推广整数而引入的一个概念。显然，它是非常有规律的集合。在平面中，所有的格（局部）都有如下形状：



如果 K 是一个几何体，X 是一个格并且 $K+X$ 是一个平铺，我们就称其为一个格平铺。我们称两个立方体为一个共面对如果它们有且仅有一个完整的公共面，并且定义单位立方体 $C^n=\{(x_1, x_2, \dots, x_n): |x_i|\le 1/2\}$。

1907 年，闵可夫斯基基于以上观察提出了如下猜想：

闵可夫斯基猜想 E^n 的每一个格平铺 $C^n+\Lambda$ 中都有共面对。

依照上一节的观察，这一猜想很自然，甚至还太保守。实际上，相关的历史非常曲折复杂。也许这正是它的美妙所在。早在 1896 年，闵可夫斯基证明了如下结论：

如果 $A=(a_{ij})$ 是一个没有整数列且行列式为 1 的实系数 2×2 矩阵，那么

$$\begin{cases} |a_{11}z_1+a_{21}z_2|<1 \\ |a_{12}z_1+a_{22}z_2|<1 \end{cases}$$

一定有非平凡整数解。

在此基础上，他断言类似的结论对 $n\times n$ 矩阵也是正确的。也就是

闵可夫斯基猜想 * 如果 $A=(a_{ij})$ 是一个没有整数列且行列式为 1 的实系数 $n\times n$ 矩阵，那么

$$\begin{cases} |a_{11}z_1+a_{21}z_2+\cdots+a_{n1}z_n|<1 \\ |a_{12}z_1+a_{22}z_2+\cdots+a_{n2}z_n|<1 \\ \qquad\cdots \\ |a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+\cdots+a_{nn}z_n|<1 \end{cases}$$

一定有非平凡整数解。

他自己没有给出这一断言的证明。11 年后，他又将这一分析形式的猜想转述为前面所说的几何形式。下面，我们简要说明一下它们的等价性。

首先，我们定义一个格 $\Lambda=\{\mathbf{z}A: z_i\in Z\}$。由于格点 $\mathbf{z}A$ 的第 i 个坐标即

$$x_i=a_{1i}z_1+a_{2i}z_2+\cdots+a_{ni}z_n,$$

$C^n+\Lambda$ 是一个堆积[注 1]当且仅当分析形式中的不等式组没有非平凡的整数解。另一方面，由于

$$\frac{v(C^n)}{d(\Lambda)}=\frac{v(C^n)}{\det(A)}=1,$$

$C^n+\Lambda$ 将是 E^n 的一个平铺一旦它是一个堆积。

如果分析形式成立并假设几何形式在 $n-1$ 维空间也是对的，那么只要 $C^n+\Lambda$ 是 E^n 的一个格平铺 A 就一定有一整数列且满足

$$(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})=1.$$

假设 $z_1, z_2, \ldots, z_n$ 为满足

$$a_{1i}z_1+a_{2i}z_2+\cdots+a_{ni}z_n=1$$

的一组整数[注 2]，我们定义

$$\mathbf{u}=\sum_{j=1}^{n} z_j\mathbf{a}_j,$$

$$U=\bigcup_{z\in Z}(C^n+z\mathbf{u})$$

以及

$$H=\{\mathbf{x}\in E^n : x_i=0\}.$$

由于 $(a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{ni})'$ 是一个整列，容易看出 $C^n\cap H+\Lambda\cap H$ 是 H 的一个格平铺。基于前面的归纳假设，容易看出 n 维的几何形式也一定是对的。

反过来，如果几何形式的猜想是对的，那么通过多次递归我们可以导出 Λ 对应着一个如下形式的矩阵：

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ a_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1\end{pmatrix}.$$

也就是说，A 一定有一个整数列。所以，如果 A 没有整数列那么 $C^n+\Lambda$ 就不是一个堆积，从而

$$\begin{cases}|a_{11}z_1+a_{21}z_2+\cdots+a_{n1}z_n|<1\\ |a_{12}z_1+a_{22}z_2+\cdots+a_{n2}z_n|<1\\ \qquad\cdots\\ |a_{1n}z_1+a_{2n}z_2+\cdots+a_{nn}z_n|<1\end{cases}$$

一定有非平凡整数解。

赫尔曼•闵可夫斯基
Hermann Minkowski (1864-1909)

赫尔曼•闵可夫斯基是历史上最著名的天才数学家之一。他以 18 岁荣获巴黎科学院竞赛大奖（确定了将一个自然数表示为五个平方和的不同种数）成就了一位数学天才的美名。在随后的数学生涯中，他以创立了数学分支“数的几何”而名垂青史。在求学时期闵可夫斯基是一个幸运儿：他曾受教于 Weber，Voigt，Kummer，Kronecker，Weierstrass，Helmholtz 和 Kirchhoff，他的获奖论文曾得到 Jordan 和 Bertrand 的推崇，他与希尔伯特结下的友谊更是数学史中的佳话。可惜他与伽罗华（Evariste Galois，1811-1832），阿贝尔（Niels Henrik Abel，1802-1829）和黎曼（Georg Friedrich Bernhard Riemann，1826-1866）一样英年早逝，给数学史留下了悲壮的一页。去世前，他任哥廷根大学教授，成为哥廷根数学名人中的一员（高斯，狄利克雷，黎曼，克莱因，希尔伯特，闵可夫斯基……）。

注 1

K 是一个几何体，X 是一个离散点集合，如果平移体 $K+x_i$，$x_i\in X$，两两内部互不相交我们就称 $K+X$ 是 E^n 中的一个堆积。

注 2

它们的存在性是初等数论的一个基本结论。

数的几何起源于拉格朗日，高斯和埃尔米特关于正定二次型在整点取值的研究。闵可夫斯基观察到一个正定二次型确定了一个椭球和一个格（lattice），椭球是凸几何体的特例，格则是所有整点集合的推广。基于天才的几何直觉，他证明了如下结论：

> 假设 C 是 n 维欧氏空间中一个中心对称的凸几何体（以原点为中心）。如果 C 的体积不小于 2^n，那么除原点外它一定还包含一个整点。

这就是数的几何这一数学分支的基石。这一定理不仅可以导出几乎所有经典丢番图逼近的结论以及关于代数数域中单位元的狄利克雷定理，改进埃尔米特常数的估计，也可以导出拉格朗日的四平方和定理。可见其重要性。

3 Hajós 定理

在历史上，许多著名数学家通过分析的方法研究过这一猜想并证明了 $n \le 9$ 的情况，他们包括 T. Schmidt，O.H. Keller 和 O. Perron。然而，这一方法很难在维数上取得突破。基于 T. Schmidt 等人的工作，匈牙利数学家 Hajós 于 1941 年将这一猜想转换成了如下的代数形式并成功地给出了一个完美的证明。

闵可夫斯基猜想* 假设 G 是一个有单位元 $\mathbf{1}$ 的有限阿贝尔群。如果 $\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n$ 是 G 中的 n 个元素，$q_1, \cdots, q_n$ 是 n 个正整数使得 G 中的每一个元素都可以唯一地表示为

$$\prod_{i=1}^{n} \mathbf{g}_i^{z_i}, \quad 0 \le z_i \le q_i - 1,$$

那么 $\mathbf{g}_i^{q_i} = \mathbf{1}$ 对某一个指标 i 成立。

由于形式上的差异，人们很难想象这一代数形式与原来的猜想会是等价的。的确，导出它们的等价性也确实是非常困难。但道理上也不是完全不着边际。

注 3

> 这里 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$ 表示 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的最小公倍数。

首先，如我们介绍格的定义时所说，格本身是一个阿贝尔群。如果 Λ 是一个有理格，也就是它的基的坐标都是有理数

$$\mathbf{a}_1 = \left(\frac{q_{11}}{p_{11}}, \frac{q_{12}}{p_{12}}, \cdots, \frac{q_{1n}}{p_{1n}}\right),$$

$$\mathbf{a}_2 = \left(\frac{q_{21}}{p_{21}}, \frac{q_{22}}{p_{22}}, \cdots, \frac{q_{2n}}{p_{2n}}\right),$$

$$\cdots$$

$$\mathbf{a}_n = \left(\frac{q_{n1}}{p_{n1}}, \frac{q_{n2}}{p_{n2}}, \cdots, \frac{q_{nn}}{p_{nn}}\right) \cdots$$

其中 $(q_{ij}, p_{ij}) = 1$。那么我们定义 [注 3]

$$d_i = [\, p_{1i}, p_{2i}, \cdots, p_{ni}\,],$$

$$\mathbf{v}_i = \frac{1}{d_i}\, \mathbf{e}_i,$$

$$P = \left\{ \mathbf{x} \in E^n : 0 \le x_i \le \frac{1}{d_i} \right\},$$

以及

$$\Gamma = \left\{ \sum_{i=1}^{n} z_i \mathbf{v}_i : z_i \in Z \right\}.$$

可见 $P + \Gamma$ 是 E^n 的一个格平铺，并且 Λ 是 Γ 的一个子格。所以我们得到了一个商群

$$G = \Gamma / A = A_1 + A_2 + \cdots + A_n,$$

其中

$$A_i = \left\{ \bar{\mathbf{o}}, \bar{\mathbf{v}}_i, 2\,\bar{\mathbf{v}}_i, \cdots, (d_i - 1)\,\bar{\mathbf{v}}_i \right\},$$

$\bar{\mathbf{v}}_i$ 表示 $\mathbf{v}_i$ 产生的陪集。如果某一 A_i 是 G 的一个子群，那么 $C^n + \Lambda$ 中就出现共面对。 这是理解这两种形式的等价性最关键的一点。当然，我们还需要证明：

> 如果存在一个无共面对的格平铺 $C^n + \Lambda$，那么一定存在一个没有共面对的有理格平铺。

这是由 Schmidt 发现的。

要证明闵可夫斯基猜想的代数形式，我们还需要引进一个重要的概念。假设 G 是一个阿贝尔群，在它的基础上我们定义一个环

$$\mathfrak{R}(G) = \left\{ \sum z_i \mathbf{g}_i : z_i \in Z\,;\, \mathbf{g}_i \in G \right\},$$

其中加法和乘法分别定义为

$$\sum z_i \mathbf{g}_i + \sum z_i' \mathbf{g}_i = \sum (z_i + z_i') \mathbf{g}_i$$

和

$$\left(\sum z_i \mathbf{g}_i\right)\left(\sum z_i' \mathbf{g}_i\right) = \sum \left(\sum_{\mathbf{g}_j \mathbf{g}_k = \mathbf{g}_i} z_j z_k'\right) \mathbf{g}_i .$$

通常它被称为由 G 所导出的*群环*（group ring）。Hajós 正是通过对这个环的深刻研究（解方程）从而证明了闵可夫斯基的猜想。在此我们很难介绍证明的细节，也很难进一步介绍它的优美想法。感兴趣的读者可参看 [7]。

本文没有介绍这一猜想的证明，读者感受不到 Hajós 的高超技巧。但是，仅仅从这三种等价形式的互换，也许你已经感受到了这一问题的魅力。按照 S. K. Stein 的评论，这一过程“就像蚕蛹变成蝴蝶的过程一样神奇”。

György Hajós, 匈牙利著名数学家，曾任 Eötvös Loránd 大学教授，匈牙利科学院院士，匈牙利数学会主席，以证明了著名的闵可夫斯基猜想而著称。他曾经是匈牙利数学竞赛的优胜者，从而成为著名数学家 L. Fejer 的学生。相传，当他将博士论文提交给 Fejer 时，后者的评语是“对一个才智一般的学生来讲，它是一篇好的博士论文；而对 Hajós 这样优秀的学生来讲则是一篇不合格的文章”。后来他发奋图强，证明了著名的闵可夫斯基猜想从而奠定了他一个世界著名数学家的地位。我从未考证过这一故事的真实性。但它是我最喜欢的数学故事之一。

4 Keller 猜想

早在 1930 年 , O. Keller 在他的博士论文中证明了闵可夫斯基猜想的几个低维情形。同时他提出了如下更为大胆的猜想。其实，许多读者在看到第一节中的实例时可能就已经想到这一猜想了。

Keller猜想 *在 n 维空间的每一个平铺 C^n+X 中都有共面对。*

1937 年，Keller 发表了一篇摘要式的文章声称证明了 $n \le 6$ 的情况。1940 年，著名数论学家 Perron 用了 40 多页的篇幅澄清 Keller 文章中的细节。该方法是初等的，但非常复杂，所以难以推广到高维。

Keller-Perron 定理 *如果 $n \le 6$, 那么 E^n 中的每一个平铺 C^n+X 都有共面对。*

Ott-Heinrich Keller 于 1906 年生于德国的法兰克福，曾在法兰克福，维也纳，柏林和哥廷根求学，于 1929 年在 Max Dehn 的指导下获博士学位，于 1933 年取得大学讲师资格。他关于立方体平铺的结果和猜想主要是博士学位期间的工作。二战期间，他就职于柏林工业大学和海军学校。战后，德国被分为西德和东德。Keller 先后任东德的德累斯顿大学和马丁路德大学教授。他发表的论著不多，主要集中在代数和数论领域。他是东德最著名的数学家之一，曾任东德数学会主席，是东德科学院的院士。1990 年 12 月 5 日 Keller 去世。

György Hajós (1912-1972)

Ott-Heinrich Keller (1906-1990)

5 Corrádi-Szabó 判别法

为了证明他的猜想，Keller对一般平铺 C^n+X 的结构作了深入的研究。他研究了平铺 C^n+X 的周期性和可调整性从而归结为局部团的结构。在这些工作的基础上，与闵可夫斯基猜想类似，Hajós 于 1950 年发现 Keller 猜想也有一个代数形式：

Keller 猜想 * 假设 G 是一个由 $\mathbf{g}_1, \cdots, \mathbf{g}_n$ 生成的阿贝尔群，其中 $|\mathbf{g}_i| = 2q_i$。如果 G 可以分解为一个直积

$$G = HA_1 \cdots A_n,$$

其中 $|H| = 2^n$ 以及 $A_i = \{1, \mathbf{g}_i, \cdots, \mathbf{g}_i^{q_i-1}\}$，那么

$$\{\mathbf{h}^{-1}\mathbf{h}' : \mathbf{h}, \mathbf{h}' \in H\} \cap \{\mathbf{g}_1^{q_1}, \cdots, \mathbf{g}_n^{q_n}\} \neq \varnothing.$$

但是，这次他没有能够证明这一代数形式。在几十年无果的正面尝试后，人们开始怀疑该猜想的正确性并试图找出反例。在这一过程中，S. Szabó 做出了本质性的贡献。1986 年，他证明了如下结果：

> 如果 Keller 猜想在 E^n 中存在反例，那么一定存在一个特殊的反例 C^n+X 其中 X 以 $2\mathrm{e}_1, 2\mathrm{e}_2, \cdots, 2\mathrm{e}_n$ 为周期，X 的每个点的坐标都是有理数且分母都是 2 的方幂。

并且导出了代数形式：

> 假设阿贝尔群 G 是 n 个四阶循环群（分别由 $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \cdots, \mathbf{g}_n$ 生成）的直积。如果 G 也能表示为
>
> $$G = HA_1A_2 \cdots A_n,$$
>
> 其中 $|H| = 2^n$，$A_i = \{1, \mathbf{g}_i\}$，且满足
>
> $$\{\mathbf{g}_i^2 : i = 1, 2, \cdots, \mathrm{n}\} \cap \{\mathbf{h}^{-1}\mathbf{h}' : \mathbf{h}, \mathbf{h}' \in H\} = \varnothing$$
>
> 那么 Keller 猜想在 E^n 中就有反例。

在此基础上，Corrádi 和 Szabó 于 1990 年发现了一个探测 Keller 猜想反例的图论判别法。用 Γ 表示集合 $\{0, 1, 2, 3\}$ 并定义一个抽象图 G_n 如下：

1. 它的点集合为 $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \Gamma\}$。

2. 两个点 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 相连当且仅当存在两个不同的指标 i 和 j 分别满足 $u_i - v_i \equiv 0 \pmod 4$ 和 $u_j \neq v_j$.

S. Szabó 出版的两本专著

容易看出，G_n 共有 4^n 个点。这时，他们的判别法可以陈述如下：

Corrádi-Szabó 判别法 Keller 猜想在 E^n 中存在反例当且仅当 G_n 有一个具有 2^n 个点的团子图。

6 Lagarias-Shor-Mackey 定理

尽管 Corrádi 和 Szabó 迈出了最关键的一步，但是他们并没能继续走下去。1992 年，贝尔实验室的两位数学家 J.C. Lagarias 和 P.W. Shor 通过计算机辅助找到了这样的图从而对 $n \geq 10$ 的情况否定了 Keller 猜

想。这是那一年最轰动的数学成就之一，发表在 *Bull. Amer. Math. Soc.* 上。十年后，J. Mackey 改进到了 $n \geq 8$。

Lagarias-Shor-Mackey 定理 当 $n \geq 8$ 时，E^n 一定存在没有共面对的平铺 $C^n + X$。

容易证明如果 Keller 猜想在 E^n 有反例，那么它在 E^{n+1} 也一定有反例。所以我们只需证明 $n = 8$ 的情况。

用 J_8 表示 G_8 的具有以下 2^8 个点的子图。

(3,1,1,1,0,2,1,1), (3,1,1,1,1,1,3,2), (3,1,1,1,2,3,0,3), (3,1,1,1,3,0,2,0),
(3,3,2,1,0,2,1,1), (3,3,2,1,1,1,3,2), (3,3,2,1,2,3,0,3), (3,3,2,1,3,0,2,0),
(1,0,0,3,0,2,1,1), (1,0,0,3,1,1,3,2), (1,0,0,3,2,3,0,3), (1,0,0,3,3,0,2,0),
(1,2,3,3,0,2,1,1), (1,2,3,3,1,1,3,2), (1,2,3,3,2,3,0,3), (1,2,3,3,3,0,2,0),

(0,0,0,0,0,0,0,0), (0,0,0,0,0,2,3,0), (0,0,0,0,2,1,1,2), (0,0,0,0,2,3,2,2),
(0,2,3,0,0,0,0,0), (0,2,3,0,0,2,3,0), (0,2,3,0,2,1,1,2), (0,2,3,0,2,3,2,2),
(2,1,1,2,0,0,0,0), (2,1,1,2,0,2,3,0), (2,1,1,2,2,1,1,2), (2,1,1,2,2,3,2,2),
(2,3,2,2,0,0,0,0), (2,3,2,2,0,2,3,0), (2,3,2,2,2,1,1,2), (2,3,2,2,2,3,2,2),

(1,0,1,1,0,2,1,1), (1,0,1,1,1,1,3,2), (1,0,1,1,2,3,0,3), (1,0,1,1,3,0,2,0),
(1,3,3,1,0,2,1,1), (1,3,3,1,1,1,3,2), (1,3,3,1,2,3,0,3), (1,3,3,1,3,0,2,0),
(3,1,0,3,0,2,1,1), (3,1,0,3,1,1,3,2), (3,1,0,3,2,3,0,3), (3,1,0,3,3,0,2,0),
(3,2,2,3,0,2,1,1), (3,2,2,3,1,1,3,2), (3,2,2,3,2,3,0,3), (3,2,2,3,3,0,2,0),

(3,2,1,0,2,2,1,1), (3,2,1,0,1,1,3,0), (3,2,1,0,0,3,0,3), (3,2,1,0,3,0,2,2),
(1,3,0,2,2,2,1,1), (1,3,0,2,1,1,3,0), (1,3,0,2,0,3,0,3), (1,3,0,2,3,0,2,2),
(0,0,2,1,2,2,1,1), (0,0,2,1,1,1,3,0), (0,0,2,1,0,3,0,3), (0,0,2,1,3,0,2,2),
(2,1,3,3,2,2,1,1), (2,1,3,3,1,1,3,0), (2,1,3,3,0,3,0,3), (2,1,3,3,3,0,2,2),

(0,1,3,1,0,2,1,1), (0,1,3,1,1,1,3,2), (0,1,3,1,2,3,0,3), (0,1,3,1,3,0,2,0),
(2,0,2,3,0,2,1,1), (2,0,2,3,1,1,3,2), (2,0,2,3,2,3,0,3), (2,0,2,3,3,0,2,0),
(1,2,1,2,0,2,1,1), (1,2,1,2,1,1,3,2), (1,2,1,2,2,3,0,3), (1,2,1,2,3,0,2,0),
(3,3,0,0,0,2,1,1), (3,3,0,0,1,1,3,2), (3,3,0,0,2,3,0,3), (3,3,0,0,3,0,2,0),

(0,1,0,2,0,0,0,0), (0,1,0,2,0,2,3,0), (0,1,0,2,2,1,1,2), (0,1,0,2,2,3,2,2),
(0,2,2,2,0,0,0,0), (0,2,2,2,0,2,3,0), (0,2,2,2,2,1,1,2), (0,2,2,2,2,3,2,2),
(2,0,1,0,0,0,0,0), (2,0,1,0,0,2,3,0), (2,0,1,0,2,1,1,2), (2,0,1,0,2,3,2,2),
(2,3,3,0,0,0,0,0), (2,3,3,0,0,2,3,0), (2,3,3,0,2,1,1,2), (2,3,3,0,2,3,2,2),

(1,2,1,0,3,1,1,1), (1,2,1,0,3,3,2,1), (1,2,1,0,1,0,0,3), (1,2,1,0,1,2,3,3),
(3,3,0,2,3,1,1,1), (3,3,0,2,3,3,2,1), (3,3,0,2,1,0,0,3), (3,3,0,2,1,2,3,3),
(0,0,2,3,3,1,1,1), (0,0,2,3,3,3,2,1), (0,0,2,3,1,0,0,3), (0,0,2,3,1,2,3,3),
(2,1,3,1,3,1,1,1), (2,1,3,1,3,3,2,1), (2,1,3,1,1,0,0,3), (2,1,3,1,1,2,3,3),

(1,2,1,0,3,0,1,3), (1,2,1,0,3,3,3,3), (1,2,1,0,1,1,0,1), (1,2,1,0,1,2,2,1),
(3,3,0,2,3,0,1,3), (3,3,0,2,3,3,3,3), (3,3,0,2,1,1,0,1), (3,3,0,2,1,2,2,1),
(0,0,2,3,3,0,1,3), (0,0,2,3,3,3,3,3), (0,0,2,3,1,1,0,1), (0,0,2,3,1,2,2,1),
(2,1,3,1,3,0,1,3), (2,1,3,1,3,3,3,3), (2,1,3,1,1,1,0,1), (2,1,3,1,1,2,2,1),

(0,1,3,3,0,2,1,3), (0,1,3,3,3,1,3,2), (0,1,3,3,2,3,0,1), (0,1,3,3,1,0,2,0),
(2,0,2,1,0,2,1,3), (2,0,2,1,3,1,3,2), (2,0,2,1,2,3,0,1), (2,0,2,1,1,0,2,0),
(3,2,1,2,0,2,1,3), (3,2,1,2,3,1,3,2), (3,2,1,2,2,3,0,1), (3,2,1,2,1,0,2,0),
(1,3,0,0,0,2,1,3), (1,3,0,0,3,1,3,2), (1,3,0,0,2,3,0,1), (1,3,0,0,1,0,2,0),

(0,0,0,0,0,0,1,2), (0,0,0,0,0,3,3,2), (0,0,0,0,2,1,0,0), (0,0,0,0,2,2,2,0),
(0,2,3,0,0,0,1,2), (0,2,3,0,0,3,3,2), (0,2,3,0,2,1,0,0), (0,2,3,0,2,2,2,0),
(2,1,1,2,0,0,1,2), (2,1,1,2,0,3,3,2), (2,1,1,2,2,1,0,0), (2,1,1,2,2,2,2,0),
(2,3,2,2,0,0,1,2), (2,3,2,2,0,3,3,2), (2,3,2,2,2,1,0,0), (2,3,2,2,2,2,2,0),

(3,2,1,0,1,0,1,1), (3,2,1,0,1,3,3,1), (3,2,1,0,3,1,0,3), (3,2,1,0,3,2,2,3),
(1,3,0,2,1,0,1,1), (1,3,0,2,1,3,3,1), (1,3,0,2,3,1,0,3), (1,3,0,2,3,2,2,3),

Peter Shor 和 Jeff Lagarias

(0,0,2,1,1,0,1,1), (0,0,2,1,1,3,3,1), (0,0,2,1,3,1,0,3), (0,0,2,1,3,2,2,3),
(2,1,3,3,1,0,1,1), (2,1,3,3,1,3,3,1), (2,1,3,3,3,1,0,3), (2,1,3,3,3,2,2,3),

(3,2,1,0,1,1,1,3), (3,2,1,0,1,3,2,3), (3,2,1,0,3,0,0,1), (3,2,1,0,3,2,3,1),
(1,3,0,2,1,1,1,3), (1,3,0,2,1,3,2,3), (1,3,0,2,3,0,0,1), (1,3,0,2,3,2,3,1),
(0,0,2,1,1,1,1,3), (0,0,2,1,1,3,2,3), (0,0,2,1,3,0,0,1), (0,0,2,1,3,2,3,1),
(2,1,3,3,1,1,1,3), (2,1,3,3,1,3,2,3), (2,1,3,3,3,0,0,1), (2,1,3,3,3,2,3,1),

(3,0,1,3,0,2,1,3), (3,0,1,3,3,1,3,2), (3,0,1,3,2,3,0,1), (3,0,1,3,1,0,2,0),
(3,3,3,3,0,2,1,3), (3,3,3,3,3,1,3,2), (3,3,3,3,2,3,0,1), (3,3,3,3,1,0,2,0),
(1,1,0,1,0,2,1,3), (1,1,0,1,3,1,3,2), (1,1,0,1,2,3,0,1), (1,1,0,1,1,0,2,0),
(1,2,2,1,0,2,1,3), (1,2,2,1,3,1,3,2), (1,2,2,1,2,3,0,1), (1,2,2,1,1,0,2,0),

(0,1,0,2,0,0,1,2), (0,1,0,2,0,3,3,2), (0,1,0,2,2,1,0,0), (0,1,0,2,2,2,2,0),
(0,2,2,2,0,0,1,2), (0,2,2,2,0,3,3,2), (0,2,2,2,2,1,0,0), (0,2,2,2,2,2,2,0),
(2,0,1,0,0,0,1,2), (2,0,1,0,0,3,3,2), (2,0,1,0,2,1,0,0), (2,0,1,0,2,2,2,0),
(2,3,3,0,0,0,1,2), (2,3,3,0,0,3,3,2), (2,3,3,0,2,1,0,0), (2,3,3,0,2,2,2,0),

(1,1,1,3,0,2,1,3), (1,1,1,3,3,1,3,2), (1,1,1,3,2,3,0,1), (1,1,1,3,1,0,2,0),
(1,3,2,3,0,2,1,3), (1,3,2,3,3,1,3,2), (1,3,2,3,2,3,0,1), (1,3,2,3,1,0,2,0),
(3,0,0,1,0,2,1,3), (3,0,0,1,3,1,3,2), (3,0,0,1,2,3,0,1), (3,0,0,1,1,0,2,0),
(3,2,3,1,0,2,1,3), (3,2,3,1,3,1,3,2), (3,2,3,1,2,3,0,1), (3,2,3,1,1,0,2,0),

(1,2,1,0,2,2,1,3), (1,2,1,0,3,1,3,0), (1,2,1,0,0,3,0,1), (1,2,1,0,1,0,2,2),
(3,3,0,2,2,2,1,3), (3,3,0,2,3,1,3,0), (3,3,0,2,0,3,0,1), (3,3,0,2,1,0,2,2),
(0,0,2,3,2,2,1,3), (0,0,2,3,3,1,3,0), (0,0,2,3,0,3,0,1), (0,0,2,3,1,0,2,2),
(2,1,3,1,2,2,1,3), (2,1,3,1,3,1,3,0), (2,1,3,1,0,3,0,1), (2,1,3,1,1,0,2,2).

可以验证，J_8 确实是一个团图。由 Corrádi-Szabó 判别法，Lagarias-Shor-Mackey 定理得证。

Jeff Lagarias 是一位杰出的数学家，在数论，算法，小波，几何，组合等领域都做出过重要贡献。已发表论文 180 余篇。他曾长期在贝尔实验室工作，现任密西根大学教授。Peter Shor 是一位杰出的计算机专家，在量子计算领域做出了杰出贡献，曾荣获 Navanlinna 奖和 Gödel 奖。他曾长期在贝尔实验室工作，本项工作就是两位作者同在该实验室工作时取得的。Peter Shor 现任麻省理工学院教授。Keller 猜想的意外解决是当年轰动数学界的事件。美国数学会 1993 年出版的大事记（What's Happening in the

卡内基梅隆大学的 J. Mackey

Mathematical Sciences）就以 Disproving the Obvious in Higher Dimensions 为题介绍过这一成果。

至此，Keller 猜想只剩 $n=7$ 的情况没有解决。

也许有人会问：为什么闵可夫斯基没有猜测一般形式，而只是针对格平铺？这里有两种可能的解释。第一，作为数的几何的创始人，他对格情有独钟。第二，作为一位有高超直觉的天才，他可能早就料到一般情况不对。

后记

许多年前，在维也纳的一次舞会上约翰•施特劳斯的夫人遇到了勃拉姆斯。寒暄之余，施特劳斯夫人递给勃拉姆斯一把纸扇，请他题字留念。勃拉姆斯略加思索，在扇面上飞快地写下了《蓝色多瑙河》的主旋律。正当施特劳斯夫人惊愕之际，他又在下面写道“可惜不是我作”。

未完待续

参考文献

G. Hajós, Über einfache und mehrfache Bedeckung des n-dimensionalen Raumes mit einem Würfelgitter, Math. Z. 47 (1941), 427-467.

J.C. Lagarias, P. Shor, Keller's cube-tiling conjecture is false in high dimensions, Bull. Amer. Math. Soc. 27 (1992), 279-283.

J. Mackey, A cube tiling of dimension eight with no facesharing, Discrete Comput. Geom. 28 (2002), 275-279.

S.K. Stein, Algebraic tiling, Amer. Math. Monthly, 81 (1974), 445-462.

S.K. Stein, S. Szabó, *Algebra and Tiling: Homomorphisms in the Survice of Geometry*, Math. Assoc. Amer., Washington DC, 1994.

C.M. Zong, What is known about unit cubes, Bull. Amer. Math. Soc. 42 (2005), 181-211.

C.M. Zong, *The Cube: A Window to Convex and Discrete Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 2006.