从左至右：庄歌，罗懋康，贾朝华，汤涛，项武义，刘建亚，邓明立，张英伯，付晓青

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者。

本期刊欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com; 或mc@global-sci.org

本期刊欢迎教育界，出版界，科技界的广告
本期刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本期出版时间：2011年5月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持。

Contents | 目录

入门须引路　功夫法自修

——王元院士谈数学教学

蒋文燕

编者按：王元院士是国际知名数学家，他在数学的诸多领域中都做出了杰出的贡献。他开创了中国在哥德巴赫猜想“a+b”命题研究上的先河，他与华罗庚先生共同提出计算高维数值积分的方法，国外称为“华—王方法”。王元先生还曾担任中国数学会理事长，积极推动中国数学的整体发展。几十年的学术生涯，使他对于数学、教育、社会和人生都有深刻的见解。我们特邀蒋文燕博士对王元先生进行了深度采访。

蒋文燕于2002年在北京大学中文系获得博士学位，同年任教于北京外国语大学中文学院，目前在匈牙利罗兰大学孔子学院担任中方院长。蒋文燕博士从数学圈外人的角度，就数学教育等问题向王元先生请教，谈话的内容相信对于读者会很有启发。

与王元院士的交谈实际上是从2009年秋天陆续开始的。当时元老在晨兴数学中心领导着一个“数论讨论班”，每周六早上九点他都会准时开讲。我完全是数学的门外汉，在旁听的那一个多小时的时间里，元老所讲的与其他数学家所讨论的东西对我来说无疑形同天书。我诧异和感动的，是元老讲课时的体态神情。他的眼神炯炯，带着笑意；字迹娟秀，透着童心。而且无论是自己讲课，还是与人讨论，元老都面带笑容，或颔首微笑，或会心大笑，那股子精神气让人很难相信

他是一位八十岁的老人，一年多前还动过大手术。

在元老完成授课和讨论后，他会提前告退，由我陪着他走回家。一路上，我们穿过宝马车与三轮车并驰的街道。过马路时，我扶着元老，心里却多少有些紧张，在我所见，没有车辆会为这样一位身躯瘦弱、衣着朴素的老人稍稍减缓车速。而元老判断通过马路的时机却比我坚定，他果断又慎重地走走或停停，穿行在这片已经走了五十八年的街区。

天气好时，我们会在途中的“新科祥园”小区坐一会儿。元老说他常在这里休息。在秋天温暖阳光的照耀下，看着眼前玩耍的孩童，聆听元老的谈话是极令人享受的时光。他谈到令他尊敬的师长，“中国的数学家中，华罗庚先生是比较特别的。他的工作特点有两条，一是深刻，在上个世纪三四十年代，中国人对数学的理解还比较肤浅，而华老搞解析数论比一般的东西要深刻很多，所以他的工作持久性就比较强。二是华老的解析数论已经搞得很好了，但他可以把它抛开，重新来起，这是了不起的。”在元老看来，中国没有第二个数学家能像华罗庚先生这样，这一转变也使得华罗庚先生成为一个全面的数学家，而这对元老自己年轻时专业方向的改变也曾产生过积极的影响。在年轻的数学家中，元老赞赏张寿武的独立性，“我不赞成学生跟在老师的后面做文章，最好连我的书也不要读，他一定要自己去做。”在元老看来，身为老师，应该给学生一个宽松自由的环境，“高素质的人才都是自己奋斗出来的”。而元老谈得最多的，是希望年轻的数学家们不要读死书，死读书，一定要去做问题，无论大小，一定要去做。

这样每周一次的聆听与交谈，一直持续到2009年初冬几场雪后。正式的采访分两次在元老的办公室进行。初进元老的办公室时，我诧异于他办公室的狭小和简朴，“元老，您的办公室还没有大学里某个学院院长的大。”

“院士不是官啊。”元老平静地说。

蒋文燕（以下简称蒋）：元老，因为有关您的数学研究工作已经有许

1930 年，王元与母亲

1937 年，王元与家人，第二排中间为王元，三排中间为祖母，后排右二为父亲，三排右为母亲

多文章谈过了，所以这次我想主要请您谈谈您对数学教学的认识。

王元：好的。

蒋：您曾在《我的数学生活》（见王元：《王元论哥德巴赫猜想》，山东教育出版社，1999 年）一文中提到，在浙江大学读书时，大三您参加了陈建功、苏步青两位数学大师组织的学生数学讨论班，在讨论班上您报告过英革姆（Ingham）的《素数分布理论》，陈老、苏老在讨论班上是如何指导学生的？这样一种研讲方式对您日后的学习、研究产生了什么样的影响？

王元：我是 1949 年进浙大的，1951 年的下学期和 52 年的上学期参加了这个读书班，1952 年的夏天就毕业了。我到浙大去的时候是 1949 年底，在那之前在英士大学，是一所比较普通的大学，后来解放以后这个学校被合并到浙大，所以就到浙大去读书。这个研究班是浙江大学数学系的一个特点，很有它的特色。

现在的大学教育都跟幼儿园的教育有点儿像，老师在上面讲，学生在下面记笔记，参加考试。所谓的读书班是一个自学，自学有什么好处呢？就是普通的大学生毕业以后没有老师再教他了，统统要自学，如果你在学校里面已经养成一点自学的习惯，毕业以后就方便多了，自学是很自然的事情，所以就不需要经过一个转变，就会自学了。做研究之前都要自学，因为要找文献，如果你在大学里面就学会了自学，就太好了。所以，浙江大学在旧中国培养了很多高等学校比较好的老师，很大一部分都是通过读书班来培养的。另外学生好不好，读书班里面比较能够看得出来，因为是自学嘛，有没有专心，有没有自己的想法，比较容易看到了。所以呢，老师可以看得出来，哪些学生好，哪些学生不适合做研究。所以读书班对浙大来讲是一个很成功的经验。我在浙大的时候听老同学讲，浙大的精华就是读书班。

蒋：它的历史很长了？

王元：对，从一九三几年开始的。

蒋：搞讨论班的时间也挺长的？

王元：我们不是第一次，我们前面已经十几届了。经过讨论班的考验，哪些学生是块什么料，就可以知道了。我们那个时候，1951 年的夏天，我们进入到四年级了，要参加讨论班，那时候苏老师、陈老师他们不领导，是他们的学生领导。实际上从今天的眼光看，他们并不老。当时也不知道为什么，觉得他们老得不得了，用今天的眼光看，当时苏先生的年龄，我想一想不到 50 岁，觉得老得不得了了，他往那儿一坐，大家都不敢讲话了。陈建功先生也不到 60，所以都不领导了，就让下面的学生领导。领导我的老师叫卢庆骏，还有一个是张素诚，是这两个人来领导。卢庆骏是解放前原来浙大的一个老师，解放后刚从美国回来，是芝加哥大学的博士，后来的张素诚是牛津大学的博士，也是刚刚回来。所以他们两个人都是 30 岁左右，我年纪很轻了，22 岁。最早是卢庆骏给我指点了一篇文章，这篇文章是温纳（N. Wiener）写的，他是控制论的创始人。

除此之外，他还给我指了一本书，就是英革姆的《素数分布理论》。实际上现在看温纳的那篇文章并不难，它是傅立叶（Fourier）级数这方面的东西。因为当时我对这方面没有接触过，所以那篇文章看不懂，看不懂就

1953 年华罗庚和学生们在数学所门外。左起前排：王元、许孔时，后排左一：李开德，左三：华罗庚，右一：万哲先

青年王元（1958 年）

不愿意看，而是把英革姆的书看完了，一个暑假就看完了。

蒋：您是暑假的时候先看，到了开学的时候参加的讨论班？

王元：对，看完了后都写成了笔记。所以到开学的时候，我们就去参加讨论班。实际上最初这个讨论班是分层的，也就是有两个讨论班，“甲种讨论班”是报告论文的，“乙种讨论班”是报告书的，每班大概 5、6 个学生，一个人上去讲一次，这个礼拜你讲，下个礼拜他讲，讲的东西也不一样。老师坐在下面听，听听你讲的怎么样。等我参加时，讨论班已经不分甲种、乙种了，就是一个讨论班，你看完了以后去报告就行了。我把书都吃透了，至少形式上怎么推导都知道，就这样报告了一个学期。

蒋：这本书报告了一个学期？

王元：实际上并没有报告多少内容，因为不止我一个人报告，轮到我我就报告这个东西。老师觉得我还是可以的，有自学的能力，第一学期就是这些内容。第二学期，张素诚是搞拓扑学，他就指导我念拓扑学的文章。这时候就不念书了，只念文章，这是四年级下学期的事情，大概他也觉得还可以的。可能是到了四年级讨论班，好像我显得在我们班里面比其他的学生都强一些，我们班也就 3、4 个学生，老师对我更满意一点，所以毕业以后我就被分配到了科学院。

蒋：当时这个讨论班学生是自愿参加吗？

王元：不是自愿参加的，到了四年级这就是一门课，你不参加就毕不了业，但是这门课不是老师讲，而是由学生讲，实际上相当于我们现在的研究生一样。其实我们在大学四年级就当了研究生。那时候我不爱听课，觉得自学的效率更高，听课太慢了，而且学习被动，不如自己主动学。所以我现在教学生，不太喜欢让学生听我讲的，让他们自己看去。我们很年轻的时候就养成了这个好习惯。

蒋：这样受了前辈的影响。

王元：对，这一段学习对我很有好处，我就提前进入了做研究这个轨道，否则毕了业以后，两三年还不知道该怎么搞，从幼儿园到大学一直是一个样，老师教你，教多少学多少。我们那时候四年级就等于是自学了，和老师没有太多的关系了。这样毕业以后，独立性很强，对我好处很大，自己知道该怎么搞研究。所以即使我是名师指导的，像华罗庚先生指导我，我也可以跟他研究方向完全不一样，因为我自己已经有一个独立的、该怎么走的思维。如果当时我不来科学院的话，估计也不会太坏，因为我自己已经知道该怎么搞，自己会搞下去了。来这里当然更好一点，因为老师会在大方向上有更好的指点，但华老并不会给你讲具体的知识，你还得自己看，所以先前的训练会带来很大的好处。

我在大学里面获益最大的就是自学，养成了一个独立的习惯，养成了一个不依靠老师的习惯。因为你要做学问早晚要走上这条路，不能总等着老师教你，像幼儿园的小朋友一样。总有一天你要离开这个阶段，能适当地早一点最好。当然太早也不行，因为自己容易乱来，会走上邪路。如果总是按部就班的话，那你比较晚才能进入研究，很可能错过了创造力最旺

盛的时期。

蒋：那个讨论班当时卢庆骏老师和张素诚老师有没有一些具体的指导？

王元：就是听听你讲得不对，给你指出来。实际上可能对我讲的东西，他们还没有我熟悉，这是不奇怪的，不见得指得出多少错来。

蒋：为什么呢？

王元：因为这是很专门的东西，他也不见得有多高，像英革姆的《素数分布理论》，他懂一点。那时候他们在外国刚得了博士回来，就像是我们的博士后差不多。

蒋：等于一个刚毕业的博士生在指导你们。

王元：对，他们自己的研究也不是这个，就是附带指导一下，你讲给他听，等于他也学了。

蒋：当时那个课陈先生和苏先生去听吗？

王元：他们不去，他们有自己的事。他们那个时候就叫老前辈了，五、六十岁都是老前辈了，不干这些事情了。像我们读的英革姆的《素数分布理论》，华罗庚先生是个大内行，卢庆骏懂得不多，这是说实在话，因为卢庆骏是搞傅立叶分析的，也可能他看过这本书。反正对我的帮助是很大的，使得我到了数学所之后，自学的能力很强，独立工作的能力也很强。

蒋：那对您以后指导学生也有影响吗？

王元：这个方式是很重要的，跟我以后指导学生有关系，因为我教学生不是太像教小学生、中学生、幼儿园那样的教法，而是培养他们自己的独立意识。现在有一个错误的观念，就是我们要培养高素质的人才，这个提法是错误的，因为高素质的人才绝对不是培养出来的，是自己奋斗出来的，哪一个高素质人才是培养出来的？

华罗庚与王元（1980 年代）

你就给他一个环境，顶多你指一条路，他对你这一条路没有兴趣就免谈，他要能成才，他是靠自己奋斗。实际上我在大学里通过讨论班就明白了这个道理，我要再深入地搞下去，就得靠自己，老师不可能再指导你了。

蒋：对。

王元：当然毕了业之后，碰到华罗庚先生，他当然是这方面的大专家，像英革姆的书他很熟悉，他当然知道的比我多。但是我搞的是筛法，他也是一个外行，他没有我知道的多，这是显然的事情。

蒋：看来自学能力特别重要。

王元：独立特别重要，依靠老师是错误的观念，这种错误观念不纠正的话，这个人是不能成才的。

蒋：是。

王元：现在你对学习数学有一点印象了吧？

蒋：嗯，有一些印象了。

王元：我要强调一点的是，在大学里面，我就已经知道怎么去查文献，怎么去自学，怎么去找方向。毕业以后，你找到一个名师也好，找到一个不太有名的老师也好，都是要靠自己搞，不需要别人判断。如果这个过程不早养成的话，毕业以后要耽误很多年，才有可能成才。有的学生很奇怪，经常问我到底该干什么啊，这不是天大的笑话嘛。你自己连干什么都不知道，那你还呆在这儿干什么？这种笑话真是太多，从我毕业一直到现在都有很多。有一次我在电梯里还碰到一个年轻人，他问我，王老师，我们到底怎么才能够把数学学好啊？我说这在电梯里一言难尽啊。后来他也觉得不是一两句话可以说得清楚的。你怎么学好数学你都不知道，还需要我来告诉你吗？

蒋：他可能是没有办法了。

王元：他看来是没有办法了，所以见到一个有名的人就赶紧取取经，但这是没有经好取的。我也是运气好，如果我在大学里受的教育就像现在幼儿园和中学、小学这种教育，那就惨了，毕了业以后还要重头来起，不知道什么叫自学，也不会查文献，什么都得依靠老师。尤其你遇到的老师又是华罗庚，他轻易不跟你讲话的，他没有那么多时间跟你废话，那你怎么办？所以他手下的学生有将近一百个，成才的才有几个。成才要靠自己，不能靠他。

蒋：您知道浙大这种本科生的演讲制度现在是否还保持着？

王元：现在浙大肯定没有这个东西了，因为浙大数学系后来就被撤掉了。

蒋：解放后把它撤掉了？

王元：1952 年撤掉的。不过现在也不像以前，从前我们同班就四个人，后来走掉一个，剩下三个，全系不到二十个人，那你当然可以精耕细作。现在一来就是几百个人，老师认不得学生，学生也认不得老师，估计用这

华罗庚和他的学生们（1980 年代）
第一排左起：潘承洞、陆启铿、华罗庚、陈景润、越民义。第二排左起：李志杰、万哲先、吴方、龚升、王元。第三排左起：陈德泉、陆洪文、计雷

个办法也不好弄。现在的大学是一种普及教育，我们过去是精英教育，这是不同的概念、不同的方式。现在素质好的学生没有那么多，这也是一个问题。

蒋：所以数学的人才……

王元：就不容易出来了。我和华老搞不同的方向，他搞他的，我搞我的，完全是不同的领域。如果我走他的路，那就惨了，那就没有现在的成绩了，我不能走他的路，我也鼓励我的学生不走我的路。。

蒋：您当年给华老当高等数学的助教，当时班里很多同学日后都成为著名的数学家，您能否谈谈当时的教学情况，以及当年的那些学生们呢？

王元：这个情况可能不全像你说的这样。当时科大刚建立，华罗庚先生就到科大去教微积分。他是很想通过教微积分来写一套书，这套书大概有五六卷，把整个数学的基础都重新写一遍，让学生来听一听。当时他拉我去，我已经是讲师了，并不是给他当助教，他算是跟我联合开这门课。但是讲义是他自己写的，只有百分之二、三十是我写的，那部分就是抄书。微积分不管谁来教，材料都已经定型，只是讲法不同而已，或者自己有一点点小小的创造，所以有许多抄书的东西他当然就让我替他补充一下。这个课完全要他一个人讲，老实讲他也讲不下来，他不是一条龙嘛，一条龙实际上他讲数学分析，还有一个人开代数。分析他一个人也讲不下来，因为一个礼拜讲八个钟头，他哪吃得消。实际上我讲 4 个钟头，他讲 4 个钟头。因为他外面的会多得很，人大常委会什么的，如果他去开会的话，我就替他代课。

蒋：您曾在《华罗庚》一书中提到，当时华老是讲主要的部分，您是讲教材里面技巧、问题和习题这些东西。

王元：对，当时我们还有助教，助教就是出习题、改习题、答疑。前后有三个人当过我们的助教，第一个助教韩京清，去世了，第二个助教周永佩，第三个助教邓诗涛，这三个助教帮我们管这事。他们不管讲义的事，讲义的事是我管。当然后来华罗庚先生还挺客气，在他书里还写了这个事，说我帮他写讲义什么之类，甚至他还说我跟你合写。我说不能合写，你干了百分之七十以上，我不能跟你合写。而且这也不是什么大事，写微积分，何必合写。第一卷弄完后我就没有再参加这个工作了，我离开了。第二卷是别人在搞，第二卷没有搞完，“文化大革命”就开始了，他的计划就没了。

至于我们班的同学，说实在话，我觉得他们平均水平都较高，但是要

左图：王元17岁时的画和字。右上图：书法创作，左三起依次为欧阳中石、王元、严加安。右下图：书法创作，左一为欧阳中石（2000年代）

说特别好的，我还没有发现。从现在来看的话，当时那班孩子中有十来个人还是可以的。

蒋：还都在做数学工作？

王元：这十来个人毕业以后还是有较好成绩的，特别好的也没有，因为他们毕了业以后，没有几年就“文化大革命”了，把他们给冲了，所以他们也是受害者。

蒋：看来我的问题不太准确。

王元：这个班我主要是帮华老写讲义，配合他教书。关于他那个讲义的特点，在最近出版修订他的书的时候，我写了一个导言，这上面都有。

蒋：是《高等数学引论》这本书。

王元：这上面把那些经过都写了。当时华罗庚先生有一个特点，他有时候也偶尔自己来上一两次习题课，他的习题课就是把微积分的习题换成初等数学，这是他厉害的地方。微积分可以得到一些应用，用初等数学的东西也可以做出来，这是他很有特点的地方，所以他上习题课也很快乐，并不是用现成的方法做，他用初等的方法做一些高等的数学。

蒋：这样做更简单了？

王元：对，更简单了，这是他的特点。他的书有自己的想法。他的另外一个特点，我没写，这里做一点补充，就是华老讲课的起点比较低，起点不高。就说他用比较容易接受的语言，让你好懂一点。他写的《数论导引》也好，《高等数学引论》也好，都是比较容易念的，便于自学，不太难，这是他的一个特点。他的起点低，起点低并不是说内容简单，就是说我不是从很复杂的抽象的框架出发，而是从一些具体的例子慢慢深入进去，这是他的一个特点。

蒋：教学上也是这样的？

王元：对，讲义上也是这样的，尽量讲得很直观很通俗，这是他的一个特点，一大特点。

蒋：当时华老讲课的时候，您也去听吗？

王元：我不去。

蒋：为什么没有去呢？

王元：我没有去听他讲课，是因为他的讲义我都看了，都知道怎么回事了。他这样一位大教授讲课，我也没去听，说起来比较奇怪。如果你什么都听，你就把时间都搞没了。我也不希望我讲课的时候谁都来听，如果你觉得这个东西很简单，觉得你都会

了的话，你不来听是你的自由。如果都不来了，我就不用讲了，是不是？

蒋：您在《华罗庚》一书中提到，当时华老花了很多时间撰写《高等数学引论》，您在想这样做是不是有必要，现在您对这个问题怎么看？

王元：现在还不好说，要历史来判断，因为他培养出来的学生也不见得比北大的好，北大也来了很多学生到我们所来，科大也来了一些。北大的学生程度也很好，并不是按照他的这个方法讲的。学生好不好是由他本身的素质决定的，不是老师决定的，老师起的作用有限的很。所以现在说老师培养学生，这话听着好笑，学生是自己奋斗出来的，跟你培养有什么关系，你给他一个好的环境就行了，你不要成天找他去开会啊，弄这些没用的事。当时班上现在看来也有一些人做了不错的贡献，肖玲就是我们班的，是一个好的女数学家。（注：元老此时在记者的本子上一一写下了当年那些他觉得不错的学生名字）这些人还都是可以的。什么叫作还可以，我得给你定义清楚，就是他毕了业以后，如果搞理论的，他能够经常发表文章，在好一点的杂志上发表文章，像国外的一些杂志，还有《中国科学》这些。搞理论这样就行了，他们自己有一个方向在那儿走，带带学生。搞应用的话，他能解决一些事，这也就可以了。

蒋：徐广善老师也是那个班的？

王元：对，他们那个班没有数论专业的，不是计算数学就是微分方程。没有人搞基础数学，徐广善是由微分方程转入数论的，所以这些人后来搞理论的都能够独立发表文章，独立工作，像肖玲到外国访问了很多次，去工作一年半年的，达到这个水平，也就不错。

蒋：这是您教的第一批学生吗？

王元：第一批学生，我可能教了他们两年基础课。

蒋：除了和华老合作以外，还教了别的课？

王元：别的没有。

蒋：和华老合作了三年？

王元：两年。这两年的讲义就是这次高教出版社出版的《高等数学引论》第一册、第二册。

蒋：元老，您曾和胥鸣伟老师翻译了哈佛大学的教材《高等微积分》，这是出于什么考虑？现在华罗庚先生的《高等数学引论》也刚刚再版，您能否结合这两套教材，讲讲您对高等数学教材和教学的认识？

王元：我跟胥鸣伟翻译的哈佛大学这本书，正好跟华老的风格是截然相反的，华老讲得很简单，这是起点低。这本书起点比较高，起点高不是说就好，起点低不是说就不好。起点高的意思是说，里面讲了很多的东西都是从一些抽象的概念出发，用抽象的公式来定义，定义了半天，可能你脑子就发昏了。但是这也很有必要，数学发展到后来，总是要跟逻辑有更严格的关系。中国没有人按照这个方式讲过高等分析，所以我们觉得它还是有特点的，就把它翻译出来了。翻译出来看着这个书，分析的语言都知道了，否则的话，很多近代数学的语言都不知道。过去没有同类型的书，所以有必要把它翻译出来。这个书我只翻译了百分之二十，百分之八十是胥鸣伟翻的。

蒋：最后是您来统稿的？

王元：统稿也是他统的，我只翻译了 12 万字。最近不是搞了很多的教材嘛，其中这本书的起点就很高，里面有些东西华老的书都不写的，像逻辑量词，逻辑的连接词，基本上第一章就是数理逻辑的一些基本概念，第二章是向量空间，一般书上也不会讲这些东西的，它是一种抽象数学的讲法。

蒋：您是翻译的第几章？

王元：我记不起来了，第一、第二章肯定是我翻的，我可能就翻到第二章。里面有一些数理逻辑，过去数理逻辑没有人讲，国内所有的书起点都很低。

蒋：为什么选哈佛大学的教材呢？

王元：丘成桐先生介绍的，我们看了看觉得还不错，国内没有同类型的书，供大家参考一下，所以我们就翻译出来了。我感觉，我们国家搞了

王元与陈省身（1990 年代）

王元与数论专家廖明哲的合影，廖明哲曾是香港大学的讲座教授（1990 年代）

王元与菲尔兹奖和沃尔夫奖的得主 Selberg（1990 年代）

这么多年运动，高等学校的教材已经极端地落后了，都是些 50 多年前的东西了。现代的东西对于老师是很重要的，他们应该知道现在的教材。所以胥鸣伟做了很大的贡献，他翻译了苏联的教材，苏联的教材已经跟我们那个时候学的都是两回事了。我觉得现在高等教育最重要的事情之一就是引进教材，不要自己编，也不要一天到晚胡思乱想，先要弄清楚国际上在搞什么。引进就是拿来主义，把人家的好东西拿过来，这是最理想的，所以我们翻译了一些。其实我自己真正亲自翻译的就这么一点，另外还有一本是从德文翻译过来的。

蒋：从德文翻译过来的？

王元：有英译本，我是参照着德文原著，从英文本翻译过来的。

蒋：是什么书？

王元：赫克的《代数数论》。

蒋：这个可以做高等数学的教材？在大学讲过吗？

王元：可以做。在浙大讲过一遍，在科学院也讲过一遍，给研究生讲，讲浅一点的东西。

蒋：这些教材跟教学有什么样的关系？

王元：中国现在的高等数学要改革，不是一天到晚开会空谈，而是要把教材改一改，怎么改呢？最好的办法是拿来主义，把他们的东西拿来。因为我们太落后了，老师先学会，再教给学生就好了。不需要讨论，一天到晚讨论出不了成绩，没有时间空谈。

蒋：我们现在教材是比较落后啊。

王元：很多教材都是 50 年、60 年以前的，上个世纪 50 年代从苏联引进来的东西。现在基本上我们每个学校写一本微积分，都是抄的，大同小异，而且内容都很过时。当然现在有很多新的东西，他不可能讲的，所以现在我们要引进一些新的教材。现在翻译了很多，高等学校的老师如果很努力的话，他们就有很多事情可以做，比如说教一点新的教材，就学会了很多新的知识，这不是很好嘛。

蒋：但是这个东西得有人翻译过来。

王元：已经翻译了这么大一堆了，我这一柜子都是。

蒋：啊，《高等数学翻译丛书》。

王元：他们研究好了，还有一系列。

蒋：它的推广性怎么样？

王元：跟过去的都不一样。

蒋：没有在高校比较广泛地推广开来吧。

王元：出版了，可以自己去买，自己去讲啊。

蒋：对，老师可以决定教材。

王元：我们对教育改革也做了一些工作，只是不愿意空谈就是了，翻译教材就是实实在在的贡献，空谈有什么意思。现在一天到晚就是空谈应当怎么改，改来改去不就是原来那点东西嘛。你知道现在变化太大了，跟过去完全不一样了。讲有用的，没有用的东西先不讲。写书的人就是苏联科学院院士、美国科学院外籍院士，以他们为首的编辑，高屋建瓴。像多复变函数论，过去没有这门课的，现

王元与方开泰（左）在香港合影（1990 年代）

在书都有了，大学里都要讲的。

蒋：您知道您与胥鸣伟翻译的这本书有没有在高校用呢？

王元：听说首师大讲过。肯定还有别的学校，它的销路不会太坏。如果这个工作停滞不前，停留在原来的教材基础上，那就很惨了，再过几年就更不好改了。科研人员的研究方向老是不变，推动力就很小。这本书其实是我们一系列的翻译当中的一本，而我只参与了这一本高校教材。过去我们所有的书起点都比较低，现在这个时代永远起点低也不行，起码你要把起点高的介绍一些过来，让大家比较比较。

蒋：可以分出不同的层次。

王元：对。数学严格性也是不同的时期有不同的要求，所以现在把这个融进来的话，数学的严格性跟过去相比可能更高。这是一个比较，不见得非要大家都来用这本书，但是大家可以来参考参考，除了你那个讲法外还有别的讲法。像我们学解析数论的人，这些东西都不大懂，你看一看，翻译翻译，也就知道了。

蒋：翻译这书难不难？

王元：不难。我只译了十二万字，现在老了不做研究了，这些事还是要做一做，不做事的话就只能等死了。现在引进教材是我关注的一项事情，至少对于干这件事情的人，我还是要给他们鼓励，尽量地打打气，因为干这些事情也是挺麻烦的。

蒋：对，比如说翻译这些教材，对于评职称什么的没有帮助吧？

王元：对，而且对经济收入也没有多少帮助。

蒋：那么，花这个时间…

王元：就算休息休息吧。当然这也是一种服务，一种奉献，所以我要给大家鼓鼓气。可能若干年以后来看这个工作，确实是真正干了一点事情。

蒋：至少留下了书了。

王元：对，留下了书了，而且很多的青年人可以从这些书上成长起来。现在不改怎么得了。我看现代几何学跟我们过去学的都不一样，现在几何如果离开了物理的话，还谈什么几何。过去几何是几何，物理是物理，两者之间没有什么关系。这个教材将几何和物理联在一起，对我们来讲也是再学习的过程。现在要翻译出来很多好书，如果连这个事情都不做，大家都去空谈，这样下去怎么行。

蒋：总是得有人做事情。

王元：我要是一天到晚反对空谈，可能弄不好上面对我意见一大堆，也说不清。

蒋：现在在您这个年龄，是不惧也不惑，会不会有这样感觉？

王元：主要是不惧了，因为都活到八十了，就是死掉了也就这么回事了。

蒋：在咱们国家，不知道为什么，好象在年轻的时候，反而是惧，因为惧，缩住了手脚，该做的事情没有去做，该说的话没有去说，到了老了不惧的时候，时间也就有限了。

王元：时间没有了。

蒋：一个人可能也有一个人的命。

王元：这就是命运决定的。

蒋：您相信这个吗？

王元：当然，这个事情当然是有关系的。

蒋: 您觉得您这一生的命好不好？

王元：应该说是不错的。

蒋：为什么？有哪几次重要的转折？

王元：在浙大的经历当然是不错的，到了毕业以后，因为我做研究运气比较好，文章都做出来了。要是一上来就碰一个钉子，哥德巴赫问题做不出来的话，那么下面的信心就没有了，所以第一炮打中了之后，我心里就比较有底了。

蒋：元老，从招收第一批研究生到现在，在您的教学中最主要的原则是什么？您能不能谈谈您的学生们？

王元：我最早的研究生应该是陆洪文、谢盛刚。

蒋：那是哪一年？

王元：很早，是文化大革命以前的事了，大概是 1962 年或者 1963 年吧。

王元与北京大学数学系前主任段学复（1990 年代）

蒋：您那个时候多大？

王元：大概也就三十一、二岁。本来陆洪文是华罗庚先生的研究生，当时华先生忙得没有时间带学生，所以我实际上就是主动帮忙。给了他一个题目，他做了这个题目以后，自己就上路了，会找题目，会做了，后来就成了比较好的数学家。谢盛刚是分到数论组来的，就属我管了。再下面就是冯克勤他们那一班。1958 年我教基础课，但没有指导过他们。后来他们那一班的人，没有人搞数论，他们是搞了专门化，微分方程专门化，计算数学专门化这些东西，但没有数论专门化。下一班就有数论专门化。

蒋：也是中科大的？

王元：是的，属于冯克勤他们那一班，算是正式的，他们的专门化是由我来教。我和吴方联合起来教。

蒋：那还是本科的时候。

王元：是本科。因为那个时候是五年毕业，到了第四年、第五年，也就等于研究生一样，做毕业论文这些事情。我觉得我教学生，跟现在很多老师一个很大的不同，就是我比较发挥他们的自由度，他们有一个自由活动的天地，我只是指点他一点，并不会花太多时间。我指点这一点，他如果没有办法的话，那他将来无法成才，我不可能永远当他的保姆。这样的学生很多，像指导陆洪文本来是帮帮忙，因为华老没有时间管他。他没有办法了，研究工作总要有一个起步，后来我给了他一个小题目，他做出来了，就有了信心，以后就会自己走了。谢盛刚也差不多是这个情况。冯克勤他们那一班是我第一次真正地指导学生。那个时候，我跟吴方给他们开了一门《数论导引》。

蒋：那是哪一年？

王元：可能是 1960 年。实际上开这门课也是提高我自己，因为我那个时候觉得丢番图分析有发展前途，而且它跟我当时的研究工作就是和数值积分有关系，专门教这个东西，就是把书上和这个有关的东西挑出来教。他们后来就分了，一部分学代数，一部分学数论，因为那是数论代数专门化。

当时班上学得最好的一个是冯克勤，另一个是裴定一。后来冯克勤分到我们这个专业来了，裴定一分到另外一个专业去了。现在看来也是他们两个搞得好，冯克勤我是真的希望把他培养成一个将来能够接替我们工作的人，因为华老比我大 20 岁，我比他大 10 岁，正好成了一个梯队。我给他的毕业论文，我自己一点把握也没有，而且从来没有搞过那个东西，只是觉得有点可能性，希望他把华林问题的结果，推广到代数数域上去。我从来没搞过代数数域，只是搞数值积分的时候，用到一点代数数域，代数数域上的这个数论我并没搞，但是我觉得他能力很强，他可以搞。

后来他搞出来了，当时写的是不是对，清不清楚这个我不知道，他反正把结果都搞出来了。因为普通的数论里面，华林问题已经得到改进了，所以把它推广到代数数域上确实是有意义的。他搞出来之后，就赶上“文化大革命”了，他的文章没发表，后来发现一个日本人做了与他同样的问题，而且发表了。最近华林问题又得到改进，后来一个西方人把它改进了，就是我那次上课的时候，给大家看的那份材料。那个人拿了那个东西，得到了普林斯顿高等研究院的资助，让他去做研究工作。实际上当时冯克勤再花半年时间把那个文章写得好一点，他又年轻，普林斯顿高等研究院也是有可能接受他去访问的，比如说一年、两年，所以当时这些学生错过了好的机会。

裴定一是搞代数的，其实代数是华罗庚先生比较弱的一项，华罗庚先生搞很多东西，代数相比起来是弱一点。裴定一后来又对数论感兴趣，改革开放以后，我们国家派人到美国去进修，他是其中一个。我就说你不要搞解析数论了，你去搞模形式。因为我那个时候很早就出国了，1979 年，十一届三中全会开完了三、四个月，就派我一个人出国了。我去欧洲跑了一趟以后，发现中国的解析数论已经过时了，他们搞的都是模形式，我们现在搞的还是古老的 Riemann Zeta 函数，那完全不对头。所以我就告诉裴

定一到美国去的话，用几年时间去搞模形式。他进展的很快，他老师当然是大家，Shimura，刚开始去的时候觉得裴定一好像什么也不行，什么也不懂。可是一年以后，发现这个人简直很厉害了，后来就给了他一个题目。那个题目是说，有一个级数，被加项的方次如果是 k 次方，k 大于等于二分之五，这个级数是绝对收敛的，那就没有问题，能找出基底。k 等于二分之一时，Serre 这些人也已经把它的基底找出来。k 等于二分之三的情形是不知道的，但裴定一做出来了，所以 Shimura 老师对他很夸赞，认为不错。这是我当时在科大教的学生中我印象最深的两位。

蒋：裴定一现在还在您身边吗?

王元：他原来一直在应用数学所，后来又到了研究生院，现在到广州去了。后来我就跟他和冯克勤讲，你们给耽误了十年，再来搞数论已经不合适了，你做不出太大的东西，最好是去搞应用。他们后来对密码问题也很感兴趣。

现在裴定一是中国密码学会的主席，整个中国密码学会的总司令。冯克勤也很好，他在科大当了副校长，现在到清华去当了系主任，他搞得也不错。这是一些比较成功的，后来还招了一些研究生。有时给他们一个小题目，相当于是个习题了，有的有把握，有的没有把握。另外，就是我自己有一点数，可能做出来，但我还没有完全做出来，像这种题目的话，就稍微难一点。再难一点是什么呢？就是我根本不懂了，就让他自己搞了，这个也有。我告诉你，凡是我完全不懂的，让他自己去搞，他要搞成了的话，他就成了一个人才了。如果我没有什么把握的问题，让他去做，做好了也不错，基本上可以达到国际好杂志的发表水平。如果我自己已经基本上做出来，就是缺少这个时间把它写出来，交给学生去做。做出来了也是无聊得

杨振宁给王元颁奖（2000 年代）

王元获香港浸会大学荣誉博士，右一为周光召（1990 年代）

很，这个没有太大的意思。

我现在讲一个最好的学生，叫张寿武。这个人我跟他的接触不算太多，但是每次记者访问他，他总是感谢我，每次做报告也提到我对他一点一滴的帮助，讲了很多。事实上我对他没有什么帮助，即使是有帮助的话，也是非常宽泛的。张寿武入学以后，他听了我的一次演讲。那时我经常到外国去访问，回来总是要做一次报告，把外国的情况和了解到的东西，给大家讲讲。那次我做了一个报告，就讲了 Faltings 的工作，它可以推出来 Fermat 大定理顶多有有限个解。对于这样重要的定理，我说我根本看不懂证明。

蒋：这是哪一年?

王元：那很早了，可能是八几年。后来张寿武就暗暗地发誓，如果他能够出国的话，他要出国去，不能够出国的话，在中国他要好好干，我看不

王元与中共中央前政治局委员李铁映在1990年国际数学奥林匹克大会上

懂的话，他要想办法把它看懂。当然他没有说出来，当时心里是这样想的，我想这很好。张寿武有自己的想法，他知道要搞什么东西，他当时在看Andre Weil的《数论基础》。我就跟他讲，你搞这个东西很好，但是有风险，如果你搞失败了的话，我没法负责任，但是我可以给你充分的资料，国内的很多活动你可以不参加。当时我知道他的能力很强，这么强的人自己搞就行了。后来他硕士答辩，没有文章，怎么办？当时我是答辩委员会的委员，因为我是他的老师不能当主席。大家听他答辩，他就讲了一通，听众也没有听得懂，他搞的东西当时国内没人搞，也没人听得懂。大家说到底这个分怎么打，我们也不懂，我说不懂才好，你都懂了，他不就没本事了。

蒋：后来他有没有写一篇硕士论文出来？

王元：写了，但是人家看不懂他那个方向，当时国内没人搞算术代数几何。后来我说，他这种人应该送他一个硕士，你们看不懂，我也看不懂，看不懂才好，看不懂说明他有能耐，就给他一个硕士吧。我说你干脆出国去，在国内不好搞，没有人可以跟你讨论。

后来他就出国了，一出国马上就变得非常厉害，他的博士论文非常突出。那个Faltings是得了菲尔兹奖的，听他说，张寿武的文章是该领域近十年来最好的博士论文之一，所以他的文章一下子就在Ann. Math.上发表了，这是世界上最好的一个数学杂志。而且有几个顶尖的数论学家还跟着他去发展他的工作。张寿武后来找我聊天，我说你碰到我这个导师可能是一个运气，你要碰到另外一个导师，也许他天天跟你吵架，你也受不了，工作就没法搞。因为以前中国的有些导师一个要命的事情就是你非得跟着他搞，你跨出去了，不跟着他搞的话，他就非常不愿意。我可以允许你不跟着我搞，搞什么都行，他现在当然非常成才了。

其他的学生我多数给了一定的帮助，给他一两个提示，让他自己去考虑。有的学生做出来了，还不错，以后他就慢慢地会走了，不用再去管了。

实际上裴定一、冯克勤我都没有真正指导过，都是自己找问题，自己干。张寿武我根本就没管过，自己找路自己走。那些管了的，给了题目，他按照我的题目去做的，那就不要谈了，这个太简单。还有学生也管得很少，刚开始少管一点，以后自己成才的也有好几个，我不能一一地讲他们的故事了。就是管一点点，以后自己做，慢慢成为一个数学家的还是比较多的。从我这个地方出去的人还是比较多的。

蒋：您培养了很多有名的数学家啊。

王元：从这个意义上讲是这样的。就是帮一步，然后他自己可以走下去了，这个人就行了。或者一步也不帮，自己走出了路，那就是张寿武。他从我这里得到一些搞数学的观点而已。如果帮了一步，他还不会走，那就免谈了，以后他也不可能成为数学家了。像我跟华老，他没有给我具体研究题目，是我自己走走，也就走出来了。

蒋：你这个方法是跟华老学的吗？

王元：对，可以这么说。有的学生是从他那儿拿到题目的，他给你一个题目，如果以后你自己不会走路的话，他绝对不会再给第二个题目的。绝大部分的学生他是不给题目做的，顶多告诉你有这个可能，请你去考虑考虑，很具体的是没有的。顶多给你一个方向，那就非常好了，其他都要靠自己。

现在有的指导研究生的方式我非常不赞成，完全是一个保姆，像带幼儿园的小孩子，这不行。你带出来的话，永远是一个小孩，那是不会成为大人的。你顶多给他一个题目，他如果能够把这个题目做出来了，他自己知道，往后自己找题目，自己找文献，自己往前走，他就成才了。不然的话他没办法，不是所有的人都能培养成为数学家的，应该知道这一点，培养不成那也没办法。

蒋：您培养这么多著名的数学家，您心里高兴不高兴？我知道老师工作的一个很重要的方面就是培养学生。

王元：当然很高兴，而且我尤其

希望他们能够青出于蓝胜于蓝。几种类型都给你讲了，还有一种类型，就是给了一个题目以后，基本上自己不会找，自己不会往下做的也有，但那是极少数。大部分人给了他一个题目，都会自己再找题目做的。

蒋：大部分是属于中间状态的？

王元：对。你说的我培养了很多好学生都是这个状态，给了一个题目自己就会走。所以不要迷信外国，很多国外回来的，还未必有我这些学生好呢。

蒋：今年，您在八十岁高龄时重登讲台，我想对于青年数学家来说，精神意义要大于知识意义。

王元：可以讲讲感想。因为我现在弄懂这个东西，对我自己来讲也是个提高，这里有一个自我的要求。我在改革开放以后，讲了很多次课。最早是在研究生院，讲一门《数学概论》，有很多人讲，其中数论部分是我讲的，一共四、五次。后来又开过几门课，其中一门是《公钥密码》。《公钥密码》很重要，但是国内没有人搞，后来我就读了一本书，是万大庆的老师写的，看完这个我就讲了一点。那时有兴趣的人都来听，大概讲了两三个月。另外一次是自守函数和模形式。代数数论讲过两遍，到浙大讲了一遍，给这边的研究生讲了一遍。然后就是这一次。还有一次是徐飞他们的讨论班，系列地讲了讲代数解析数论。讲这些课的目的，一方面就是宣传这个东西，一方面也是提高自己。

蒋：听课的学生也都很有收获。

王元：对，这两次讨论班都有成果，学生就出来了。我不赞成现在跟学生一天到晚联系，这是最坏的办法，应该怎样呢？一旦学生开始做东西以后，就要想办法继续做，而且要一步步提高，这是一个正确的搞数学的方法。如果一天到晚念书的话，肯定越念越糊涂，念到后来成了个傻子，因此一定要找问题来做。所以学生动起来，就是个好事。另一方面，也不能够像母鸡下鸡蛋一样，一天下一个，天天写无聊的文章，那也不行。如果开始写了以后，要不停地提高，不能老停留在同一个水平上。

蒋：我知道您这次上课之前，还动过一次大的心脏手术。

王元：对，这次手术，本来我觉得有可能回不来了，这是完全有可能的。医生跟我说得很清楚，你这个手术不动的话，就只有不到半年就完了，为什么呢？因为你心衰，不停地心衰，救不过来。动手术后还有好的可能性。我说那就动吧，有什么办法。动完之

王元在华罗庚中学（1986 年）

王元在母校浙江大学（2000 年代）

王元 80 岁生日小聚，北京伏尔加餐厅（2010 年）

80 岁生日小聚，欧阳中石题词：信步及米，相期以茶（2010 年）

后，恢复得很快，不到一年时间基本上我可以上班了。数学当然是搞一点，然后搞一点书法。

蒋：我觉得您站在讲台上，对坐在下面的青年数学家们来说意义非常大。

王元：知识是不多的，因为那篇文章他们自己看的话，肯定也看得懂。可能对他们是一个精神的鼓舞。因为毕竟我是动了五次手术，这是最大的一次手术，动这次手术以前动了四次手术。你知道动手术对一个人是很伤的。他把你身体一块东西切掉了，这个很要命的事情。尤其最后一次，把七根肋骨都打断了，然后才能把心脏拿出来，做完了再装回去，是这样的事情。

蒋：您休养了多长时间？是哪一年动的？

王元：就是 2007 年。差不多六七个礼拜以后，我就可以在家附近走走。

蒋：真不错。

王元：差不多半年以后就往所里走。数学是没法搞了，现在要我写一篇论文都还是很难的。倒也写了一篇文章，住院那时候有一点想法，我是没有详细算。后来我把文章拿给贾朝华看看，问他看不看得懂，他说基本上看得懂，我说那就可以发表了。

蒋：发表在哪个杂志上？

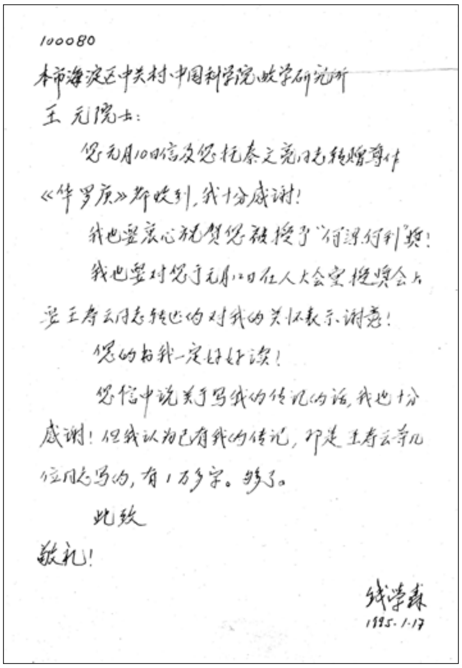
王元：英文还没有发，只有中文发表了，在《中国科学》。本来也可能到外国去发表，因为我的初稿叫方开泰带到法国去报告了一下，他们还挺感兴趣，说要把它编成程序。那是一篇统计文章，我与方开泰合作的。将来如果有适当的机会，我还是可以做研究的。

蒋：看着您站在讲台上，我作为一个无知的听众，虽然完全听不懂，但是觉得特别感动，会很容易受到您的笑容的影响和感染。

王元：反正人活着的话，总是要干点事情，所以我出了医院之后，还写了几篇回忆文章这样的东西

蒋：我听贾朝华老师说您有一本散文集要出版，是吗？

王元：是有一本散文集要出版。还是要工作，一个人不工作哪能行，除非身体动不了，真的是要死了。否则我能动的话，我总还是想办法做点事。昨天钱学森的秘书打了个电话给我，说是要纪念钱学森，开一个座谈会要我参加，正好我可以写一篇文章，怀念钱学森。



100080

本市海淀区中关村中国科学院数学研究所

王元院士：

您元月10日信及您托秦元勋同志转赠尊作《华罗庚》都收到，我十分感谢！

我也要衷心祝贺您获授予"何梁何利奖"！

我也要对您于元月10日在人大会堂授奖会上要王寿云同志转达的对我的关怀表示谢意！

您的书我一定好好读！

您信中说关于写我的传记的话，我也十分感谢！但我认为已有我的传记，即是王寿云等几位同志写的，有1万多字。够了。

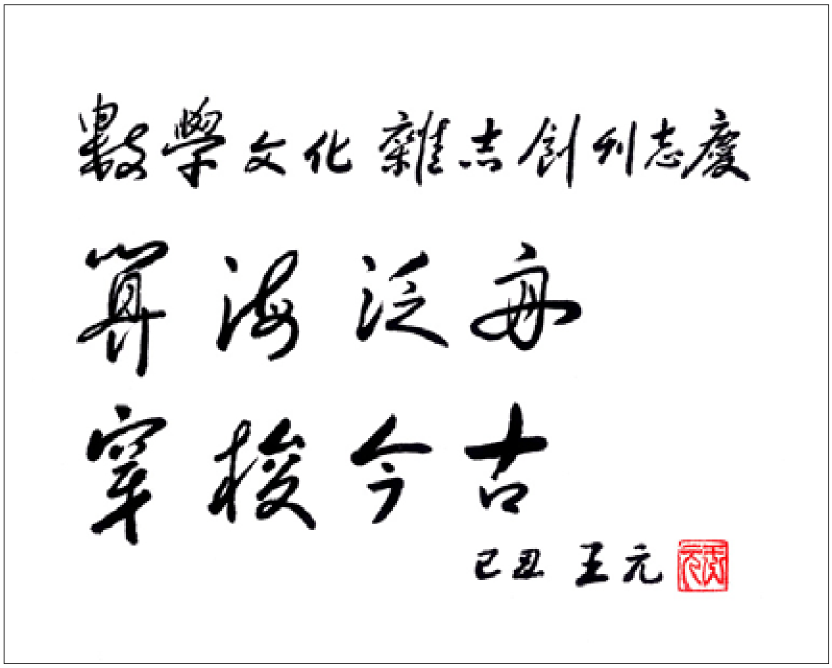
此致

敬礼！

钱学森

1995.1.17

钱学森写给王元的信



王元给《数学文化》题词

蒋：您跟他有交往？

王元：我跟他有交往。他给我写过大概有十封信左右。他这个人不跟人家多谈话的，有事情找你谈的话，就写封信。他从来不搞通常的社交活动。这个你要尊重他，不尊重他不行。我们刚才都是谈我跟学生的关系，还没有谈到跟上一辈的关系，上一辈不少人都跟我有密切的关系。

蒋：我真的很想听您谈一谈。

王元：钱学森跟一些数学家，比如跟我是比较熟悉的。因为他能够给我写十封信，不算少了，国防科委知道这层关系，所以叫我去开座谈会，这几天在准备发言稿。这些人都跟我有过交往，比跟学生的关系更密切。这很奇怪，完全是个缘分，换个人不见得有这样的事情。

蒋：那是跟您的个性有关系吗？

王元：有关系，主要是我很尊重这些人。

蒋：为什么呢？

王元：要按照他们的习惯跟他们相处。比如说钱学森从来就不喜欢跟人家聊天，你非得找个时间跟他聊天，那就错了。他不希望跟人家聊天，那就不聊，按他的习惯，有事情找他写信解决，你一定要按照他的习惯。

跟这些大科学家来往的一个大的诀窍，就是你要尊重他的习惯，你要先摸透他的脾气，看出来他是怎么样的人。比如说他不喜欢社交，你非要到他家里去拜访他一下，这个事情绝对不能做的。他不欢迎的地方你赶快走开，他欢迎的地方你来，所以这样就可以比较好地交往下去，并且可以得到你要得到的智慧。

蒋：是的。

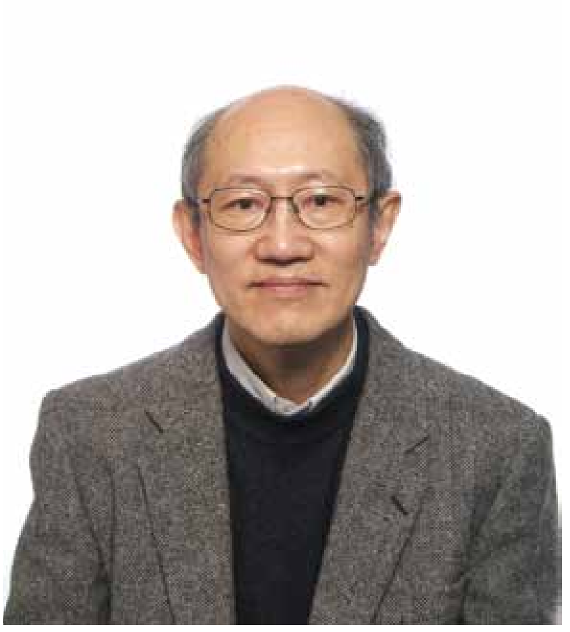
王元：我去找华老，见到他时，拿一张纸给你，跟你这张纸一样，一、二、三、四、五，一条一条谈，谈完了就回家，这个最简单了。他是不聊天的，因为这些科学家都不爱聊天，你不能老找他聊，因为他要省出时间来做研究。

蒋：听您谈了这么多，感觉很受益。我整理出来后，再请您过目。

王元：好的。

我们的谈话在万大庆教授的敲门声中结束。当天有万大庆教授的演讲，出门之前，元老特意从抽屉中找出一个本子，用来记笔记。他反复说，"万大庆现在做得很不错，他也非常用功，我们能从他那儿学到很多东西。"

本文作者：蒋文燕



六十自述

Autobiography

黎景辉

1 去年的十二月，在全国数论会议结束的那一天，我被邀谈谈我的经验及联想，以下是这次谈话的一个影像。

我是1948年生于香港，在香港长大。念了六年小学，六年中学，然后在香港政府工作。没有上大学念本科，1970年到美国耶鲁大学（Yale University）念研究所，在Langlands指导下于1973年完成博士论文，翌年在MIT跟Artin学代数几何，1974年毕业，开始工作。曾在香港、台湾、德国、法国、美国、加拿大及澳洲工作。虽然年青时候喜欢流浪，但六十岁后便想回到说广东话的地方生活，在2008年，我决定退休回到我成长的地方——香港。

2 六十年代是代数数论的再生期，可惜我年轻时没去法国学习，错过了著名的Cartan-Chevalley-Serre-Grothendieck Seminar。不过，我还算幸运，在美国碰上了一些名家如Tamagawa, Ono, Shimura, Satake, Bailey, Lang, Langlands, Stark, Artin, Tate, Mumford, Mazur, Messing, Wiles, Weil, Borel, Harish, Chandra, Selberg等，今天就说两个他们的故事。

1971 年（从左至右）杨天成、唐有民、黎景辉、庄志达于耶鲁大学

有一次我问 Langlands 一个问题，他建议我去找 Selberg。Selberg 是个好心人，他建议我每周的周三去他的研究室找他，他教我积分方程在他的数论研究里的方法和思想。 他是真的好心，从他自己怎样学积分方程，念过哪一本书开始跟我慢慢地讲。只怪我自己学问疏浅，没有跟他学筛法和黎曼 Zeta 函数。

另一个是 Weil 的故事。有一年 Weil 常在我房间的门外经过，有些时候，他去研究所后的小林散步时会邀我同行，这实在是给了我一个很好的闲聊的机会去问一些关于数学，但不是数学的问题，比如：我们谈到甚么是“好”的数学，哪些是值得做的数学。这时他刚写好一本数论史的书，陈省身先生为他在书前提字：老马识途。我问他：为甚么他的数论史停在高斯之前？他的答案很简单，从高斯开始，数论便进入现代数论，现代数论发展得很快，所以从高斯开始的数论历史，要留给将来的数学家写了。

3 国内经过了十年停顿，在 1978 年我应梁之舜教授的邀请到广州中山大学主持一个代数学教学训练班，目的是帮助一群回校接受任务，肩负重建代数教学的勇敢的老师们学会教代数。对于到来参加的老师，这是一个很大的考验。一是众人已很久没有上课，而且其中很多老师不是学代数的；再者，在过去几年代数是被认为是抽象的坏思想，受到很大的冲击。那个时候没有人可以想象没有代数方法便没有编码与密码，那也就没有今天常见的数码电视，无线电话通讯，以至信用卡等电子用品。第三方面，也是历史的原因，五十年代国内派了好些学子留学苏联，所以国内的代数颇受苏联学派的影响。但是六十年代的欧美在 Grothendieck 的思想主导下，代数、交换代数、代数几何、代数数论出现了本质上的突变，无论所用的语言、工具和想法都不同了，“范畴”更深深的进入了每一个命题。反观国内的数学发展，六、七十年代又正是国内大停顿的时代，所以在代数学上的脱节比其他的数学领域更为深峻。

就是在这样的背景下，我开始帮助一批来自全国各地的年若四、五十岁的人学习教代数学。我是早上讲三个小时课，晚上讲两个小时习题课，这般的课程安排是希望让老师们回到工作单位时，可以讲课也可以作习题。所讲的内容的一个特色，是把交换图和正合序列带到基础代数里。三十年后，目前在纽约哥伦比亚大学任教的张寿武教授告诉我，他年轻时也念过当时我所写的讲义。

那时候刚复原，中山大学的条件谈不上好，很多建筑物的窗户都有火烧过的痕迹，校园里有很多地下坑洞。学校内没有自来水，那一段时间来上课的老师组织了一个挑水团，每日为我挑我的用水。我的米粮是一位外籍英语教师分给我的。每天早上，一壶黑茶，一块米糕。午饭和晚饭都是菜心汤。三餐都是在厨房里吃的。我是不知道来上课的老师们的粮食是怎样安排的了。

4 在 1979 年的冬天，我应曹锡华教授的邀请到今天的上海华东师范大学讲代数群论。在一个寒冷的黑夜，曹先生带着几位老师在上海机场接我。这一回，也是讲了一个月。每天早上讲三小时，从代数簇开始讲到闭代数域上的半单代数群分类。在曹先生领导下，听课的都在课前课后作好学习，我佩服他们的努力。上海复兴得很快，我跟来到华东师大的外国学生住在一起，吃饭没有问题。我讲完后，推荐我的学长 Humphreys 和 Parshall 到华东师大讲学，他们对华东师大的代数群团队的建立起了重要的作用。

曹锡华先生是一位非常优秀的科学领导人，他以广博的数学知识，整体的把握现代数学的发展，找定方向之后，他是坚定不移，全心全意，以他卓越的组织能力把团队建立起来。所以他不是教一两个研究生，而是建立一个可以持续发展的科学基地。华东师大的代数群团队是一代教一代，如曹先生教时俭益，时俭益教席南华院士等。今日华东师大的代数

组出成果，长人材，成为国内领先国际知名的研究教学团队，曹先生是功不可没的。

在华东师大我认识了朱福祖先生，他在浙大受学于曾炯之先生，曾先生是我国最早在国际有名的代数数学家之一，他留学德国哥廷根时是Noether女士的学生，如果追根溯源，朱先生的学生如徐飞，江迪华等人可以说是师承Noether女士了。

在上海这一个月里，我也为上海师院（即今日现在的上海师范大学）的孔仲文老师讲了同调代数，他们油印了我为他们写的一份讲议，这时我在上海遇见了南京的周伯勋教授，我给了他这一份讲议，也跟他谈过同调代数的教学问题。

在上海时，我曾想过去拜访复旦大学数学系。我念过他们老师所写的《数学分析》、《常微分方程》、《数学物理方程》、《实变函数论与泛函分析》和《齐性空间微分几何学》，受益良多。可惜在复旦没有相识的人，所以始终没有成行。

1986年黎景辉、黄毅青于中文大学

5 八零年代初，北京大学的数学系主任丁石孙教授请我去讲学一个月，还是天天早上讲三小时。这次的题目是：2×2矩阵群上的自守表示。我讲的是自守形式的分析理论，从实表示的代数理论讲到迹公式。内容比较接近调和分析，对来听讲的代数老师来说是有点奇怪的。

事实上，到了七十年代，富立叶分析里的李群无限维表示论，代数里的代数几何、代数群、同调代数都已被吸入了代数数论的骨肉里，对重拾旧路的数论学家们来说全是陌路人，有点相逢不相识的感觉。

这一回到北大也体会了他们的困难。有一天，丁老师决定请我吃饭。我们一行几个老师在丁先生带领下，跑到北大附近一带公路上的一个饭馆。饭馆没有门，坐下来眼前都是公路上奔驰的大卡车，沙尘飞扬。我们坐下，老师们便从他们带来的黑色小包里拿出果汁、啤酒、让各人分用。物资供应紧张，这些都是难得的东西，这样吃了一顿宾主尽欢的午饭。

这次在北京，我很高兴遇到万哲先先生和刘绍学先生，我念过万先生的《李代数》，《典型群论》和刘先生从俄文翻译过来的《泛代数》。

6 这三次所介绍的部分内容都是第一次在国内出现的，我每次都把所讲的理论给了详细的证明。

在中山大学所讲的材料没有发表（我在这时写了一本关于模型式理论的书交由中山大学出版社出版。他们并没有出版这本书，原稿也不知下落了）。同调代数讲义也没有发表。在北大所讲的部份内容分别写成《拓扑群引论》（科学出版社，1991年初版）、《二阶矩阵群的表示与自守形式》（北京大学出版社，1989初版）。在华东师大的演讲则在多年后由科学出版社出版为《代数群引论》，2006年初版。我在此特别向我的合作作者冯绪宁、蓝以中、陈志杰、赵春来几位教授深表谢意，没有他们的努力和王元先生、万哲先先生、丁石孙先生、曹锡华先生、冯克勤先生的支持，这几乎不可能出版成功的！

这三次去国内教学时，我在香港中文大学工作，我觉得到国内教学是不受校方支持的。

7 在1983年杨振宁先生在广州中山大学建立一个研究所，支持理论物理，数学和考古的研究。他的构思是这样的，一方面像美国的国家科学基金般运作，中山的教授可以向这个研究所申请科研经费，另一方面，希望把这个研究所办得像普林斯顿的高等研究院一样，中山的研究所将有一座好的研究大楼，有良好的研究室以及有关的研究设备。我参加了这个研究所的筹划，建立和运作，就当时国内形势，这是一个新的尝试。譬如说，对教授们来说，是怎样申请科研基金呢？对研究所来说，是怎样组织评审呢？我们要讲怎样建立一个在国外是常规，在国内是全新的机制。当然，今日国家有国家自然科学基金，科学院有晨兴研究中心，中山研究所的制度开创

任务亦已成功完成。

在这几年，因工作上有机会见到杨振宁先生，有一次他请我为他讲几课量子群。

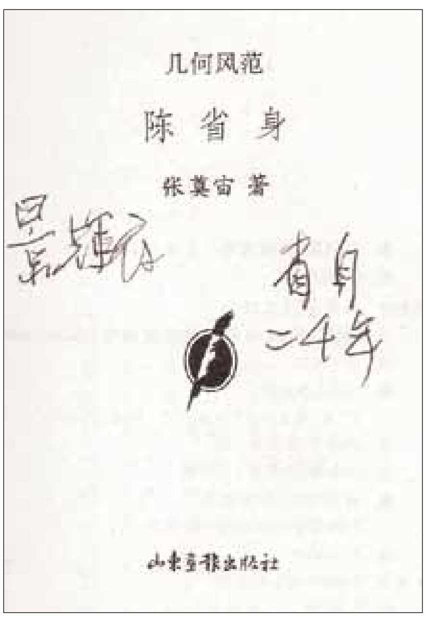
8 我在 1984 年，又参加了陈省身先生的南开研究所的建立。我跟先生是我在耶鲁大学当研究生时认识的。我在南开有两个工作，一方面参加学术委员会，当时陈先生指派的任务是以最快的速度去训练一批研究生去美国留学，我是负责组织代数、交换代数、代数几何、代数拓扑的研究生短期训练班。另一方面的工作是比较特别的。一个研究所的筹办，必须要广为人知，才能吸引各方资源，所以我安排陈先生在电台接受访问以宣传他在南开的工作。香港《明报月刊》当时的主编董桥先生是我的朋友，我请他为陈先生做了一个专访，发表在《明报月刊》。我也帮忙处理南开研究所建所时期在香港的一些财务。陈先生认为要学生和老师去南开参加数学活动，便需要一个便宜的住宿的地方，所以陈先生在校内建一个旅店，新建的旅店自然需要修建卫浴设备，大概当时全国都在复兴，就如厕所马桶的有关装配有供应困难，在天津比较难买得到，我便在香港处理这个问题。南开研究所很快便步入正常运作。

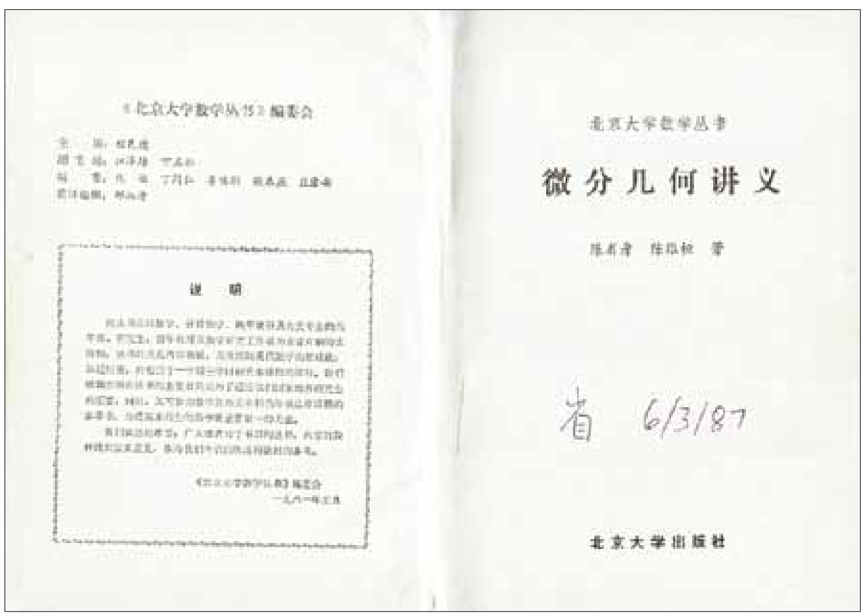
黎景辉与陈省身在中文大学演讲

多年后，在 2003 年，陈先生请我到他家吃午饭，他谈到两件事。第一件事是从他夫妇俩和我吃鱼说起，我的感觉是他对夫人的早逝感到非常悲痛。第二件事，他是这么说的：“我们不能继续把学生送出国念博士，我们要加强自己的博士生的培训，我们要发展自我开发的数学，人家知道的不会白白的告诉你。”我听到他这番话，当下是有点儿吃惊的，因为这是跟多年前在南开起步时的指令是相当不同的。经历了二十年的光景，陈先生对中国数学的发展方略有新的想法。这令我想起了那天跟陈先生的会面之后的几个月，我在普林斯顿与志村先生的谈话，我深悟到中美学术交流的蜜月期已结束。

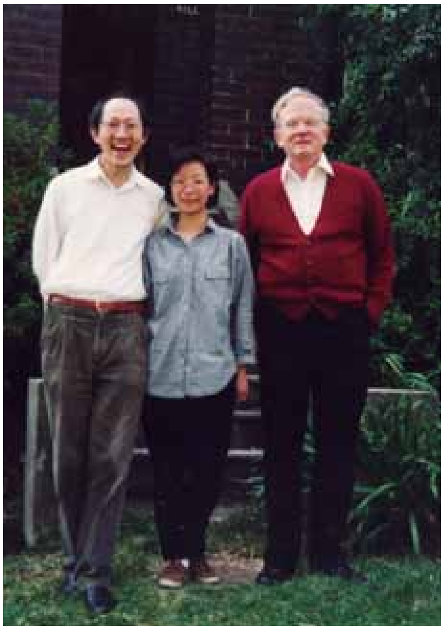
我念过严志达先生所写的两本非常好的书，《李群与微分几何》，《半单纯李代数表示论》。我几次到南开都去找严先生，可惜都碰不上。

9 我在中文大学的时候碰上华罗庚先生常到访的时期。我们多次谈话都是关于模型式理论，华先生熟识德国学派的 Klein, Hurwitz, Fricke, Hilbert,





左图：《几何风范：陈省身》；右图：《微分几何讲义》



Walter Baily 和黎景辉于悉尼

Brian Parshall 和黎景辉于悉尼

Courant 等人的书。这些书不是容易见得到，我刚好念研究所时，学校有个好的图书馆，所以知道这些书籍。我也念过华先生的《数论导引》和《多复变量函数论中的典型域的调和分析》，于是和华先生谈得也高兴。除了数学之外，华先生还讲及数学传播，他相信只要有数学书，便会有人学数学，所以他认为只要有机会，便当写些数学教科书。这一个看法我非常同意。虽然今日有了互联网，文章易找，但学问难寻，比较先进的学问在网上还不是容易找到的；而且，外国的好书，不一定是适合我们的学生，所以我们还是可以写一些适合我国学生学习背景先进的数学书。

也许会有人问我怎会有机会看到这些发行量不高的书呢，让我在这里说个小故事。我念高中时候的某一天，我的同学邓植唐带来了一本不知从哪里借来的《数论导引》，我们在《人民画报》看过介绍华先生的文章，我们相信《数论导引》是一本重要的书，以我们当时自学微积分和线性代数的水平，只能看懂这本书的一个小部分，由于书是要还给人家的，那时没有复印机又没有电子书，我们决定分工把书抄下来，这便是我在一知半解之下第一次看《数论导引》。那个时代在国内出版的科技书总有一些会流传到香港。在香港有一小书店，老板是身穿短袖内衣和短裤，一双泥脚踏着拖鞋的胡先生，卖的却是最先进的科学技术工程书籍，只要你说出书名，新版的，二手的，无论怎样印行的，他都会为你想想办法，我猜五十年代到八十年代，在香港学科学的人，很多都会到过这个书店。胡先生早已辞世。

今日回想到有幸遇上杨、陈、华三位先生，可惜错过了跟他们学习，没有和他们写份文章，只好说是没有福气。

10 1976 年，我在香港理工学院教书，这是有趣的一年。上课早上八时到晚上九时，一周五天都如是，下班回到家的时候已经很疲累了。这时有些教室是很有趣的，在很大的空间里，在地板上划线，这便分成几个教室，因为没有“墙”把“教室”分隔开，一班的同学随时可以跟“隔班”的同学拉拉手，一位老师可以一面上课，也可以同时听“隔班”的课，要是“隔班”的老师是嗓门特大的“大声公”，你就不用上课了。那时候，去上课要经过一个建筑工地，早上经过时还是好端端的路，晚上已经变成了一个大洞。因为没有电灯照明，黑黑的，有一次，有个老师掉进洞里，等到天明才被发现，工人把他救出来。这时的理工学院是没有研究室让老师开研究班，没有图书设备，领导只求管治，不甚支持研究的。

我在香港工作时，各数学系的同事的经历可分为二，一组是大学本科生毕业留校任教，另一组是在外国念完博士归来的。虽然学历不同，但是大家都很用心教书。在这个时代念数学毕业的学生，有些在香港当上教授，有些在香港以外的地方做教授，然而，大部分的毕业生是在香港的中学任教。从六零年代到两千年，这四十年，这些同事都是尽了力，做好教学的任务。

在香港因为我没有同事是研究代

2007 年 Gerardin 与黎景辉

数数论或李群表示论的，所以我只好组织讨论班讲他们的专业课题。现在想起，当时的讲题包括：二次可积估计（和陈振华、邝文锦办），微分几何与 Yamabe 问题（和王斌、陆庆燊办），P 可除群（和梁鉴添、萧文强办），高维代数 K 群（和林兆波办）。这些讨论班是训练了一些研究生，增强了他们日后学习的基础。

在这里，我想起一个和几位国内的数学家常谈到的一个问题：为甚么像美国普林斯顿或法国常出优秀的数论家呢？我猜有以下的两个理由。

首先是人才密集的问题，让我举一个例子，在 1984 年，生活在普林斯顿，有数论工作的教授有 Bombieri（1974 年菲尔兹奖），Borel（1992 年 Balzan 奖），Deligne（1978 年菲尔兹奖，2008 年沃尔夫奖），Dwork（1962 年 Cole 奖），Iwasawa（1962 年 Cole 奖），Katz, Langlands（1982 年 Cole 奖，1996 年沃尔夫奖，2005 年 Steele 奖，2007 年邵逸夫奖），Selberg（1950 年菲尔兹奖，1986 年沃尔夫奖），Shimura（1976 年 Cole 奖，1996 年 Steele 奖），Weil（1979 年沃尔夫奖）和 Wiles（1995 年费马奖，1995 年沃尔夫奖，1997 年 Cole 奖，2005 年邵逸夫奖），这些都是二十世纪最有创见的数学家了。

在巴黎法国，单是在巴黎的六、七大就有 250 多个活跃的数学家，所以学生天天都有机会听闻数学，耳濡目染，容易进步，再者，巴黎是大家都愿意去小住的城市，庞卡莱研究所（Institut Henri Poincaré）经常举办专题教学班，把一个专题当时最前沿的人物集合在巴黎三个月，把题目从浅入深的讲给研究生听。北京、杭州还没有这样的条件。还有一个特别的原因，就是过去百年来，法国数学家与政治界都有交往。也许是这样，政府有些领导人比较同情数学，数学在法国是颇受政府重视的，所以才有这样的资源使人才密集。

相对而言，七十年代，我刚到香港中文大学的时候，香港当年的大学教育资助委员会是没有提供科研经费的，港大和中大这两所大学的数学系共有两位教授，三十多位讲师，毕业不到五年刚回来的博士不到五位。大家所学的不同。用今天的标准，试想一个人从整数同余教到 Kisin 的 Serre 猜想的证明，即使你愿意教，数学系亦不愿意让你开这么多小时的课，谁教微积分？如果当时有几个「同行」的人，每人教一门，问题便解决了。

没有足够的老师讲相关的学问是有一个不良的副作用，就是一个学生所学的一切都是单一个老师教的，另一方面，老师亦时间有限，只好“立竿见影”，一挥笔便到论文。这样，学生学得太专太窄，这不利学习那些依靠多门学问生存的理论，亦不利于跨领域完全创新。

我在耶鲁当研究生时，几乎所有的老师和研究生每周都参加一小时的讲座（colloquium），把课室挤得满满，非常有气氛。老师不鼓励把数学分成一片片，没有说本周讲几何，学代数的不用去，既没有签名，也没有学分的，大家都是想知道最新消息，所以便去听讲座。这是很好的学风。

以上是第一理由。

第二个理由是学生的起步点高。Kisin 来找我的时候，他已自学了 Iwasawa 的局部数域论，肖亮到 MIT 时已在北大学过椭圆曲线数域论，刚几何，刚上同调论。像普林斯顿这样的学校，他们每年是向全球搜罗，录取最好的十几个学生。所以他们的学生起步点高。入学时通常他们会对一门学问已有一定水平。把这些学生放在一起，互相竞争，很快便从只懂一门变成懂得多门，进而走出一条新的路！

如此说来，我是在讲「临界质量」，要达到相当的数量才会产生作用！要搞好一门学问如代数数论，要有几位接触前线的老师，又要有足够多的好学生，同在一起，便会有机会了！

在丁石孙先生支持下，我和赵春来在北大自 2001 年到 2003 年办了三年冬季代数数论课程，这个课程有李克正、徐飞和冯克勤大力协助才成功

的。我们办了这样的课程：群概形，有限平坦群概形（SGA3）（黎景辉）；椭圆曲线与Abel概形（赵春来）；类域论（田青春）；经典自守形式的志村理论（王福正）；晶体上同调理论（李克正）；变形方法在费马大定理之应用（美国史丹福大学Brian Conrad）；p-adic群表示论（法国巴黎大学Gerardin）；p-adic Hilbert模型式（美国UCLA Haruzo Hida）；刚几何（德国Münster大学Strauch）；刚上同调理论（法国Rennes大学Le Sturm）。2008年，赵春来和田青春又邀请了Berthelot（法国Rennes大学）来讲算术D模。这些课程都是第一次在国内开办。我和赵春来把我们的讲义写成《模曲线引论》，由北京大学出版社出版。Hida的讲义由牛津大学出版，Le Stusm的讲义由剑桥大学出版。从这两本书，国外的学者可以看到北大的数论教育是站在国际前沿的。

我们把这次的数论活动向全国开放，不过，远路而来的学生们的交通费是不少的，再者，最难为的是在中关村为学生找便宜的短期住宿，所以当时听课的学生大部分来自北京地区的学校与单位。上过这些课的学生后来有小部份出国，大部份还是在国内原校毕业，从北大毕业的几位所写的论文应该算是北大在代数数论领域中的最先进的博士论文了。

几十年后，也许参加过这些活动的同学中有人成为院士或将军，想起年青时的学习，也许会在心中给我们送个"劳动奖"。目前，只好谢谢丁石孙先生多番热心推动代数数论。

12 科学管理人员、党委和教授都要面对成果报告的压力。可惜有些学问比较难立竿见影，所以他们要支持这方面的研究是比较费力，是需要耐心等候的。一方面要有成果，另一方面要做深刻的、有影响力的研究是每个研究工作者都面对的选择，像丁先生那样不怕难的是鲜有的了。Kisin从他第一次走进我的研究室到他当上了哈佛的教授是走了二十年的光景。当吴宝珠来澳洲找我的时候，他与我都没有想到在2010年，他会得菲尔兹奖的。

黎景辉教授在西湾讲座颁奖典礼上

数论有两难：难学、难活。第一难学，因为研究数论的历史长，数论家甚么方法都用，所以学数论要求的背景知识多，学习期长。你若从网上下载关于Beilinson conjecture, Tamagawa number conjecture, automorphic motive的文章，你便知道我所说难学的意思了。第二难活，数论文章难写，做数论的人文章太少，加上以数论为专业的教授在任何一个系内是少数（相对而言，譬如，做方程的，他们人就多了！），所以数论很难得到支持，新毕业的博士很难找到工作，干数论很难活下去。当然北京首都师大的李庆忠教授是稀有的例外，他勇敢的支持数论在首师建立团队。山东大学的数论基地则有潘承洞先生的几十年经营，潘先生的老师是闵嗣鹤先生，闵先生在英国牛津大学的博士导师是Titchmarsh，而他是哈代的学生，这样，潘先生的学生如展涛和刘建亚的学问便可以缘溯到二十世纪英国的解析数论大师哈代了。

目前我知道国内有比较全面先进的数论团队只有首师大和山东大学，其他地方如数学所、北大、清大、川大、南京大学、南京师大、交大、苏州大学、肇庆学院等有少量的人刻苦地干活。

在外国，欧、美、俄已是很好了，不用谈。在我国周边，日本是在一百多年前开始的数论强国，高木贞治留学德国哥廷根（Göttingen），回国后是东京帝国大学教授，非常受重视，建立了今日日本数论"超级大国"的地位。他们代代相传，没有问：有甚么用，可以拿甚么奖，没有要求"立竿见影"，一切都是耐心的鼓励，默默的耕耘，于是人才辈出，成就非常惊人。高木贞治着的《代数数论讲义》（岩波出版），是我见过最好的类域论解析理论的教科书。这个理论是高木发明的，因为这个发现，日本数论走到世界前沿，日本数论家视此为他们历代学习的秘籍，我希望我们把这本书给翻译过来！

从五十年代，印度数论家得到富商TATA家族的支持在为物理学家建立的TATA研究所成立数论基地，一开始就得到德国学派的帮忙，出了几

2008 年 Berthelot 与黎景辉

位非常优秀的代数几何家，一代教一代到今天是个代数数论的强国。

几年前只有几十篇数学论文的韩国，今日以数学文章量计为世界的第八强，获得下一届世界数学家大会的主办权。在数论方面，自从大韩高等学术研究所（KIAS）成立，他们不断增加经费，吸纳留学回国的年轻人，派在职教授出国深造，用巨资连续举办国际数学会议，这都表示韩国的教育家和工业家对基础科学的大力支持的坚定信心。韩国在数论上的成就是指日可待的。

在越南，吴宝珠在得奖前后都获越南政府的支持，加上巴黎学派的援助，已经有出色的成绩。

所以说，纵使我们不去跟大国比拼，单是周边的国家的发展，对国内的数论的进展已有很大的压力了。

今日我们有不到一百人来参加“全国”数论会议，以十多亿人口的国家来说，这是一个很小的数目，以目前数论在科技及工程的广泛应用来说，这是不成比例的。这个会议没有收到任何资助，参加的人是自付或研究费资助的，其余是肇庆学院慷慨捐助。希望将来数论得到国家、工业家或富商帮助。

在基本引理证明之前，Langlands 在他的 Beyond Endoscopy 文章中说：数论过去太注重代数方法，我们多加使用解析方法。在基本引理证明之后，他又回到参加吴宝珠的代数方法的工作去，可见数论没有一定要分家，都是数论。

对我们干数论的人来说，我是呼吁大家要团结，不要分开甚么解析数论、代数数论……总之，数论是一家，大家合力，互相支持。

我做过以下与数论有关的工作，我证明了数域上似裂代数群 Weil 的 Tamagawa 数猜想，这是目前 Weil 猜想的证明必经的一点。自守表示有两种迹公式，一种是 Selberg-Arthur 迹公式，另一种是首先由 Jacquet 和我所开发的迹公式。类似 Hodge 猜想，Tate 提出代数簇的代数链的秩的猜想，我证明了紧志村面的 Tate 猜想。Lang 有一个关于椭圆曲线整数点个数的猜想，我做了目前的最佳估值。此外，我证明了函数域上的 Iwasawa 主定理，研究过高维局部域的互反律的显式，p- 进对称空间的模型式，刚几何及 p- 进模型式。现在的工作是关于 p- 进微分方程与 p- 进空间上的表示。

每一个念书，教书的人，多多少少都会买下一些书籍，我退休时，我决定把我的数学书赠送出去。 我先把第一批送到北京师范大学，说好了请他们存放在图书馆内，让学生可以用上多年，后来他们说图书馆没有空间放置，书就按他们的安排处理。 余下的几百部书是跟自守型式有关的，包括一些大概已经绝版，很多现在买不到的了。 我很高兴澳门大学的金小庆教授安排把书放置在他们的图书馆里。连同多年前送给广州中山大学的十几箱书，也就把我藏的数学书全都送出去了。希望总有学生有机会念这些书。我想起一个故事，我在香港中文大学的时候，有一天，一个学生跟我说：他刚从广州回来，在广州的旧书店里买了一本书，有我的藏书印，跟着他把书捎来让我看，我说：“很好，这是我送给广州中山的书，今天还是回到想看这本书的人的手里，很好。”

回顾过去，我是幸运的，我有住的地方，有饭吃，有衣服穿，可付起医药费。希望将来也如是。

最后，谨祝大家身体健康，学业进步。

黎景辉

辛卯年元月初六于高雄

山南海北

weibo.com 数学微博文摘 —— 选自新浪微博

除注明出处外，均选自《数学文化》微博 http://t.sina.com.cn/mathematicalculture

《南方周末》采访：首位菲尔兹奖越南人吴宝珠说，1 篇好论文胜 100 篇垃圾论文。在长达十年的时间里，吴宝珠能够以他特有的慢节奏滴水穿石地做研究，而不需要考虑发表论文的问题。他对写低质量的论文没有兴趣，而只想写几篇好论文。

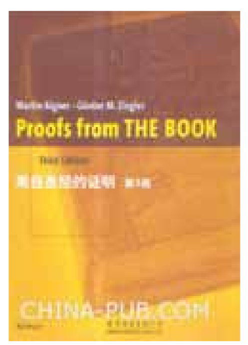
http://tech.sina.com.cn/d/2011-01-07/11145070473.shtml

赫赫有名的拿破仑，是举世公认的军事家。然而，鲜为人知的是，作为法兰西科学院至高无上的 145 位院士其中的一名，他是一名货真价实的科学家。尽管他一生绝大多数时间是军事行动，他的身边总是簇拥着数学家、化学家、天文学家……即使在行军作战时也兴致勃勃地跟学者讨论科学问题，甚至出“难题”。

“尊敬的院士们”，拿破仑说：“让我给你们出一道题，不用直尺，仅用圆规，你们能四等分一个圆吗？”正因为拿破仑在数学上的造诣，他与 11 位候选人竞争法兰西科学院院士，并最后成为数学部院士。拿破仑对这一尊号颇为得意，以后他在所有文告上签名时都写上“科学院院士、东征方面军总司令”的头衔。

拿破仑又是科学家的挚友，两军交战时，他总是让科学家处于安全地带。他帮助逆境中的科学家，当得知意大利物理学家伏特困难时，立即资助 6 千法郎。1814 年反法联军兵临城下，法国兵员不济，有人提议高工学生参战，拿破仑说：“我不愿取金蛋杀掉我的老母鸡。”这话今天还刻在该校的梯形大教室的天花板上。

@ 米娜：爱尔兰结婚不许离婚，但是婚期可以选择年限 1 到 100 年，过期不续期就相当于自动离了，但是时间越短费用越高，1 年的登记费折合人民币 2 万多，100 年的只要 6 元钱。结婚一年，说明你不懂婚姻，于是有一本很厚的婚姻书要看，而选择 100 年只有一张纸，上面写着一句：祝你们白头到老。



@ 互动出版网数理化频道：《来自圣经的证明 (第 3 版)》本书已被译成 8 种文字。这不是一本教科书，也不是一本专著，而是一本开阔数学视野和提高数学修养的著作。书中介绍了 35 个著名数学问题的极富创造性和独具匠心的证明。我们确信，每一个数学工作者都会喜欢这本书，并且从中学到许多东西。

@ 陈小不 -GZ：文化出现断层之后人失去了精神文明，所以就直奔物质文明了。再加上一小撮深谙人性弱点的高手策划，就出现了 " 不要让孩子输在起跑线上 " 这样的经典广告词，用过这句话的个个发的盆满钵满！大到牛奶小到补习班，不知道害的究竟是谁。

@ 北星微薄：刚收到的美国数学会的《Notices》上看到蔡天新老师的文章《数学家与诗人》，很有意思。好像不少数学家都喜欢诗歌。中国老一代数学家苏步青李国平等都能写不错的古诗。我参加过的 2009 年华盛顿美国数学年会专门有一场数学与爱情诗歌朗诵会。

@ 龚斌 bing：【The rise of statisticians】未来十年步入海量数据和实验时代，分析为王，这意味着 Statisticians 阶层和分析学在中国的真正兴起，企业会出现“首席统计师 (CSO)”或“首席分析官 (CAO)”，与 CIO 协作，担当企业数据管理和决策支持总管的责任，威武 。

@ 万国盛世：创意对联：上联：1 直 2 在奔 3 路上。下联：9 是 8 敢娶 7 买房。横批：气 456 。

著名数学家陈省身说：" 我一般不参加别的活动，只做我的数学。我现在这个住所叫宁园，就有这么个意思。一个人一生中的时间是一个常数，应该集中精力做好一件事。中国人浪费时间的事太多。"

著名数学家陈省身先生一次到中国科技大学做报告时说，“不要总是考第一，第二第三比较好，既可以往上冲，又可以保持相对独立”。

@ 飞鸟未来：# 冷浪漫 # 暗恋像极坐标下的心脏线 r=1-sinθ，有心的人才能懂得；初恋像欧拉等式 $e^{i\pi}$+1=0，小小的就包涵了整个世界；热恋像双子数 220 和 284，你中是我，我中是你；失恋像求导定义的微增量，明明存在过怎么就等同于零了呢？幸好，真爱是调和级数，虽眼看着逐次变小，却可以达到 + ∞，它需要的是耐心写下去 。

@ 大耳峰：咱将“勾三股四”的特例歌诀叫勾股定理，心安理得的和三角学失之交臂；把“今有物不知其数”云云玄虚描述叫中国余数定理，心安理得的和环论擦肩而过。还恬不知耻的比西方早个千儿把年。结果别人此起彼伏冒了一堆数学家，从毕达哥拉斯到高斯再到怀尔斯等各种斯；咱寥寥整了几个算学家，有些还是考据出的 。

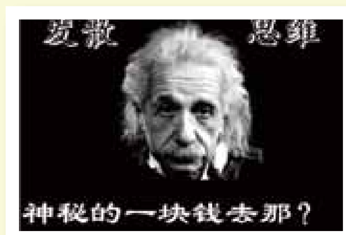
@ 数学文化：再推荐一本书给中学生朋友：《数学玛奇朵：写给中学生看的卡通数学书》。拿铁玛奇朵的字面意思是“掺杂了的牛奶”。“掺杂了的数学”是特意与“无杂质的数学”相区别。书的内容以卡通漫画的形式展开，用有趣幽默的语言使数学学习从枯燥无味变得易于理解和富于享受。

@ 好朋友 123go：语文不及格？正常！骂人需要用修辞手法？数学不及格？正常！买菜用得着画函数吗？英语不及格？正常！中国人嘛。化学不及格？正常！买零食还要用配平？历史不及格？正常！五千年的历史记得完吗？政治不及格？正常！ 13 亿人轮的着你当总统吗？物理不及格？正常！跳楼用着计算空气阻力吗？

@ 加菲众：$e^{\pi i}$+1=0。这个恒等式也叫做欧拉公式，

它是数学里最令人着迷的一个公式，它将数学里最重要的几个数字联系到了一起：两个超越数：自然对数的底 e，圆周率 π；两个单位：虚数单位 i 和自然数的单位 1；以及被称为人类伟大发现之一的 0。数学家们评价它是“上帝创造的公式”，我们只能看它而不能理解它。

@ 全球热门搞笑：三人去投宿一晚 30 块，每人掏 10 块凑 30 块交给老板。老板说搞优惠只要 25 块，拿 5 块钱叫服务生还他们，服务生偷偷藏了 2 块，把剩下的 3 块按每人 1 块分给他们。这样一开始每人掏 10 块，现在又退了 1 块，也就是 10 -1=9，每人只花了 9 块，3 个人每人 9 块，9×3=27 块 + 服务生藏 2 块 =29 块，还有一块钱去哪了？



@ 图灵教育：# 图灵新知 #《罗素的故事》是一本漫画书，以 20 世纪最具影响力的哲学家、数学家、逻辑学家伯特兰 • 罗素对数学基础的探索为主线，讲述了逻辑学在 20 世纪的发展历程，并介绍了数学研究的目的，以及如何延伸到计算机的发展。书中还提及了现代逻辑之父弗雷格、集合论之父康托尔、著名哲学家维特根斯坦等。

@ 华夏时报：# 经济茶座 #2008 年 11 月英国女王伊莉莎白二世问：“为什么没有经济学家预测出信贷紧缩？”2009 年 8 月 10 位经济学家联名回答：经济学已成了应用数学的分支，和真实世界绝缘，主流经济学家喜欢玩弄普遍理性和有效市场概念。他们的结论是，经济学者需要接受心理学和经济史等其他学科的更广博的知识训练。

意大利80后的处女作《质数的孤独》来到中国：17和19是一对数学上的“孪生质数”，它们都只能被1和自身整除，只相隔一个数却永远不能走到一起，很像纠结的爱情。在保罗•乔尔达诺笔下，这个数学问题演算出了爱情的无解。作者是物理学博士，他27岁时此书获意大利文学最高奖斯特雷加奖，欧洲销售过500万本。

http://www.oursci.org/archive/ency/biology/036.html

个人7年非法创办20余种刊物，只上过中学的员工竟组成编委会“审核”论文来稿，约2万名投稿者交纳版面费超过1000万元——这是海南省最近查处的一起特大非法期刊案，背后暴露的问题发人深省。受过高等教育的知识分子何以屡屡受骗？职称评审如何避免“论文市场”的冲击？

http://news.sciencenet.cn/htmlnews/2011/4/245702.shtm

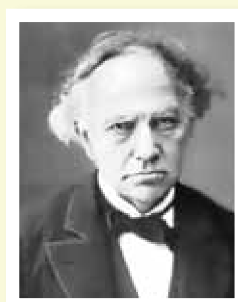
用素数作书名成了畅销书！陶哲轩获菲尔茨奖也是关于素数等差数列。1939年数学家证明：有无穷多个由3个素数组成的等差数列（比如3、5、7）。半个世纪后，陶和合作者提出更大胆的设想：由4个素数组成的等差数列可能有无穷多。证明结果却出乎意料：素数构成的等差数列可以任意长。

http://hi.baidu.com/lockingxp/blog/item/2e53c59550fadd4bd0135e7e.html

当今复杂的统计数据，经常在忽悠人们；学一点统计方法很必要。《统计陷阱》是著名统计学家哈夫的名著。该书半个世纪来多次重印并被译成多种语言。原名《如何利用统计说谎》由于具有误导性，遂改名《统计陷阱》，中文新版改回接近原名的《统计数字会撒谎》。本书通俗易懂，可当行骗宝典，也可成防骗宝典。

推荐十本数学家传：1.《我的大脑敞开了》2.《数字情种——埃尔德什传》3.《知无涯者：拉马努金传》4.《美丽心灵：纳什传》5.《希尔伯特：数学世界的亚历山大》6.《库朗：一位数学家的双城记》7.《华罗庚传》（王元）8.《突破维数障碍：斯梅尔传》9.《数学大师：从芝诺到庞加莱》10.《难以企及的人物》（蔡天新）

方舟子《数学家怎样拯救了生物学》文笔不错，把哈代八卦得很生动。上世纪孟德尔遗传定律被重新发现，一时间挺孟反孟的一阵乱掐。孟粉遗传学家普纳特和哈代进餐说起此事，哈在餐巾上算了一番就得出结论。普要求发表结果；哈反对，认为简单结果发表出来丢份。普后来偷偷替哈发表了。



不会考试的大师（鼓励童鞋的故事）埃尔米特是19世纪最伟大的代数学家，但他考大学重考五次，每次失败都是数学考不好；大学几乎没能毕业，原因也是数学。不过这无损其伟大：课本上“共轭矩阵”属于他，千年难题“五次方程通解”被他解决。自然对数的“超越性”被他证明。他培养了几个数学大师包括庞加莱。

文科还是理科，您同意盖茨还是乔布斯？ 2 月 28 日全国州长联席会议上，盖茨说资源有限，玩点实在的，把钱用在刀刃上，多花钱在那些能创造就业机会的学科。这意味着应少花钱在人文学科上。三天后，老乔不同意：“苹果的今天光靠技术是不够的；他的成功是技术和人文学科的联姻。”

http://jetlib.com/news/tag/bill-gates-and-steve-jobs/

英国一数学家建“婚姻公式”，预测准确率达 94%。牛津大学教授詹姆斯 • 默里在一项针对 700 对新婚夫妇的研究中，用他的公式准确预测了这些新人是否会离婚。12 年间，研究人员每隔一两年就同这些夫妇取得联系，发现默里的公式准确率达 94%。

http://www.zaobao.com/wencui/2009/03/lhwb090327d.shtml

美国 2011 年最好与最差职业排行榜近期出炉：数学，精算和统计这三个和数学紧密相关的行业仍然稳居前 4 名，再次证明了美国人愿意雇用有分析和逻辑能力的人才。最差职位中排名第 13 的竟然是众人艳羡的目标：有“无冕之王”之称的记者。

http://sh.sina.com.cn/citylink/ed/l/2011-02-21/132010575.html

我们的企业和富商向数学和科学捐款吗？前面谈过著名的数学家和投资家西蒙斯捐款办“数学为美国”组织；谷歌和微软捐钱给 Khan 学院。这种捐款还很多，如谷歌向数学竞赛组织捐款 100 万欧元；因特尔 2010 年宣布向美国数学、科学高级教育投资 2 亿美元，为期十年。

开心一刻

上初二了，数学的深度大大加深。某天上数学课时，老师对同学们说到："我知道我们初二的数学很难，以后若有哪些同学对课本的内容有疑问的话，就私下来问我。"几天后小瑶拿了一些问题去找老师。老师惊讶的说："你怎么把书撕下来了？"小瑶答到："老师，您不是说要我们撕下来问您吗？"

有一次是数学考试，最后一道大题是两个解法判断哪个正确。我想了半天没想出来，顺便提了几个词：公说公有理！婆说婆有理！看看都没理！想想全有理……结果数学老师把我的解法在整个年级她教的四个班都读一遍以后，我就出名了！

小明数学不好被父母转学到一间教会学校。半年后数学成绩全 A。妈妈问："是修女教得好？是教材好？是祷告？…""都不是，"小明说，"进学校的第一天，我看见一个人被钉死在加号上面，我就知道…他们是玩真的。"

@ 科学松鼠会：《反物质是神马》勾起了大家的惨痛回忆：常微分学常没分，数理方程没天理；实变函数学十遍，泛函分析心犯寒；随机过程随机过，微机原理闹危机，汇编语言不会编，量子力学量力学。

@ 落花飞叶 5616：语文老师一回头，此地空余黄鹤楼；数学老师一回头，二次函数对称轴；英语老师一回头，sorry 加上三克油；化学老师一回头，二氧化碳变汽油；物理老师一回头，一根杠杆撬地球；生物老师一回头，试管婴儿水中游；体育老师一回头，乔丹改打乒乓球；全体老师一回头，世界人民没自由！！！

@ 林燕 8888：很久很久以前，在拉格朗日照耀下，有几座城：分别是常微分方城和偏微分方城这两座兄弟城，还有数理方城、随机过城。从这几座城里流出了几条溪，比较著名的有：柯溪、数学分溪、泛函分溪、回归分溪、时间序列分溪等。其中某几条溪和支流汇聚在一起，形成了解析几河、微分几河、黎曼几河三条大河。

@ 您不知道的事：142857，发现于埃及金字塔内，是世上最神奇的数字！ $142857 \times 1 = 142857$。$142857 \times 2 = 285714$。$142857 \times 3 = 428571$。$142857 \times 4 = 571428$。$142857 \times 5 = 714285$。$142857 \times 6 = 857142$。同样数字调换了位置反复出现！把它乘与 7 竟然是 999999！这难道不奇妙吗？！

写在数学情人节

李委明

我们的心就是一个圆形，
因为它们的离心率永远为零。

我对你的思念就是一个循环小数，
一遍一遍，执迷不悟。

我们就是抛物线，你是焦点，我是准线，
你想我有多深，我念你便有多真。

零向量可以有很多方向，却只有一个长度，
就像我，可以有很多朋友，却只有一个你，值得我来守护。

生活，可以是甜的，也可以是苦的，但却不能没有你，枯燥平平，
就像分母，可以是正的，也可以是负的，却不能没有意义，取值为零。

有了你，我的世界才有无穷大，
因为任何实数，都无法表达，我对你深深的 love。

我对你的感情，就像以自然常数 e 为底的指数函数，
不论经过多少求导的风雨，依然不改本色，真情永驻。

不论我们前面是怎样的随机变量，不论未来有多大的方差，
相信波谷过了，波峰还会远吗?

你的生活就是我的定义域，你的思想就是我的对应法则，
你的微笑肯定，就是我存在于此的充要条件。

如果你的心是 x 轴，那我就是个正弦函数，围你转动，有收有放。
如果我的心是 x 轴，那你就是开口向上、Δ 为负的抛物线，永远都在我的心上。

我每天带给你的惊喜和希望，
就像一个无穷集合里的每个元素，虽然取之不尽，却又各不一样。

如果我们有一天身处地球的两侧，海角天涯，
那我一定顺着通过地心的大圆来到你的身边，哪怕是用爬。

如果有一天我们分居异面直线的两头，
那我一定穿越时空的阻隔，划条公垂线向你冲来，一刻也不愿逗留。

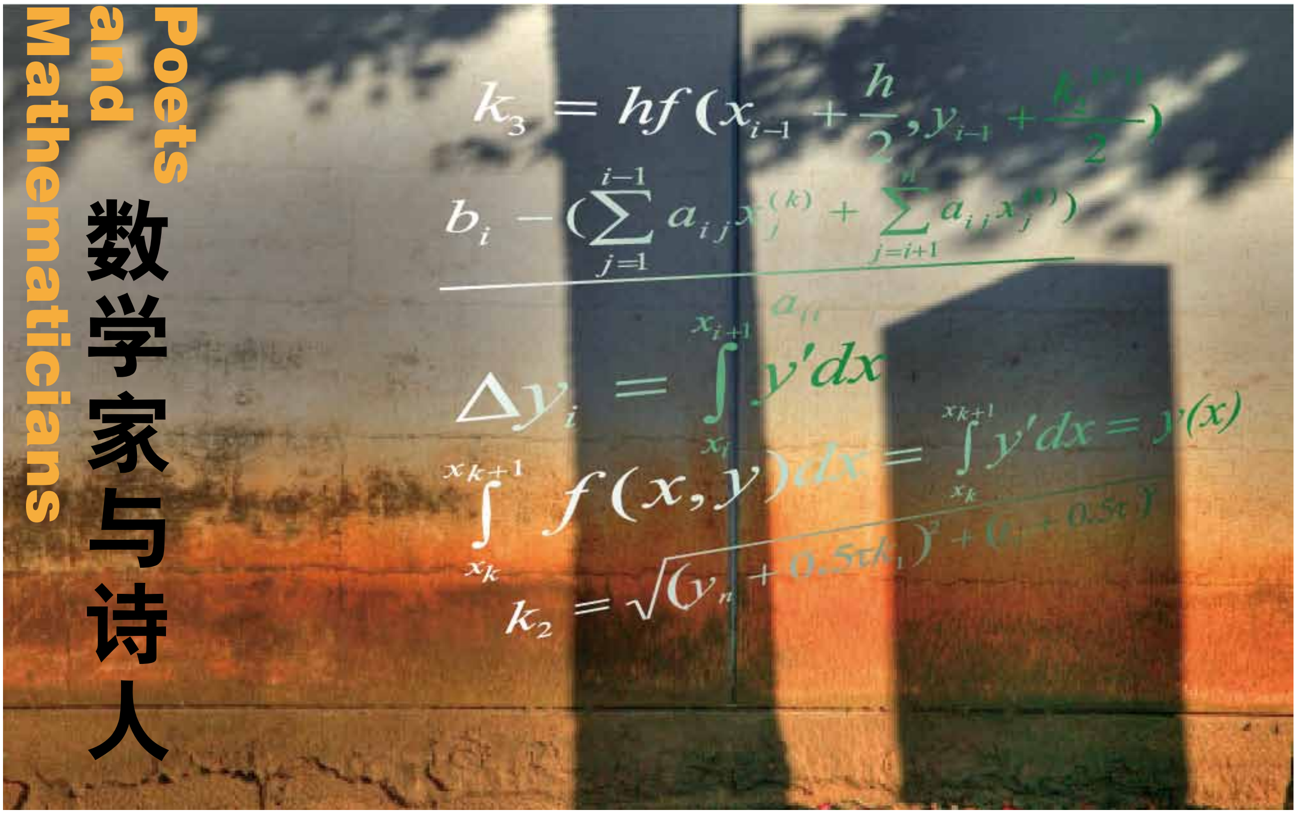
但如果有一天，我们不幸被上帝扔到数轴的两端，正负无穷，生死相断，
没有关系，只要求个倒数，我们就能心心相依，永远相伴。

情人是多么的神秘，却又如此的美妙，
就像数学，可以这么通俗，却又那般深奥。

只有把握真题的规律，考试的纲要，
才能叩启象牙的神塔，迎接情人的怀抱！

微博地址：http://blog.sina.com.cn/lwmgk

数学家与诗人
Poets and Mathematicians



蔡天新 / 文　Robert Berold, Gu Ye / 译

数学家和诗人都是作为先知先觉的预言家存在我们的世界上。只不过诗人由于天性孤傲被认为狂妄自大，而数学家由于超凡脱俗为人们敬而远之。因此在文学艺术团体里诗人往往受制于小说家，正如在科学技术协会里物理学家领导数学家一样。但这只是表面现象。

“我做不了诗人”，晚年的威廉•福克纳彬彬有礼地承认，“或许每一位长篇小说家最初都想写诗，发觉自己写不来，就尝试写短篇小说，这是除诗以外要求最高的艺术形式。再写不成的话，只有写长篇小说了。”相比之下，物理学家并不那么谦虚，但无论如何，对每一个物理学家来说，物理认识的增长总是受到数学直觉和经验观察的双重指导。物理学家的艺术就是选择他的材料并用来为自然规划一幅蓝图，在这个过程中，数学直觉是不可或缺的。一个不争的事实是，数学家改行搞物理学，计算机或经济学，就像诗人转而写小说，随笔或剧本一样相对容易。

数学通常被认为是与诗歌绝对相反的，这一点并不完全正确，可是无可否认，它有这种倾向。数学家的工作是发现，而诗人的工作是创造。画家德加有时也写十四行诗，有一次他和诗人马拉美谈话时诉苦说，他发现写作很难，

Mathematicians and poets exist in our world as uncanny prophets. The difference between them is that poets are thought to be arrogant because they tend to be proud and lonely by nature, while mathematicians are thought to be unapproachable because they exist on a transcendent plane. Thus in art and literary circles poets are often considered to be socially inferior to novelists in the same way that mathematicians are considered socially inferior to physicists in scientific and technological associations. But these things are only superficial.

“I'm a failed poet,” the novelist William Faulkner said humbly in his later years. “Maybe every novelist wants to write poetry first, finds he can't and then tries the short story which is the most demanding form after poetry. And failing at that, only then does he take up novel writing.” Physicists, by comparison, are not so modest. Nevertheless, for a physicist every increase in knowledge of physics is always guided in two ways, by mathematical intuition and empirical observation. The art of physics is to design experiments in order to derive the laws of nature. In this process mathematical intuition is indispensable. In fact it is easy for mathematicians to switch to studying

数学之桥，相传牛顿设计，剑桥皇后学院(蔡天新 摄)

尽管他有许多概念，实际上是概念过剩。马拉美回答：诗是词的产物，而不是概念的产物。另一方面，数学家主要搞概念，即把一定类型的概念组合起来。换句话说，数学家运用了抽象的思维，而诗人的思维方式较为形象，但这同样不是绝对的。

数学和诗歌都是想象的产物。对一位纯粹数学家来说，他面临的材料好像是花边，好像是一棵树的叶子，好像是一片青草地或一个人脸上的明暗变化。也就是说，被柏拉图斥为“诗人的狂热”的“灵感”对数学家一样的重要。举例来说，当歌德听到耶路撒冷自杀的消息时，仿佛突然间见到一道光在眼前闪过，立刻他就把《少年维特之烦恼》一书的纲要想好，他回忆说：“这部小册子好像是在无意识中写成的。”而当“数学王子”高斯解决了一个困扰他多年的问题（高斯和符号）之后写信给友人说：“最后只是几

physics, computer science or economics, just as it is for poets to turn to writing novels, essays or plays. Of course there are exceptions.

Mathematics is usually seen as the diametric opposite of poetry, although there are exceptions here too.. Although the opposition is not always true, yet it stands there basically undeniable. Mathematicians work to discover, while poets work to create. The painter Degas occasionally wrote sonnets, and once complained to the poet Mallarmé. He said that he had many ideas, in fact too many, he found it difficult to write. Mallarmé replied, “poems are made not with ideas but with words.” On the other hand, mathematicians, work mainly on concepts, combining concepts of the same kind. In other words, mathematicians think in an abstract way, while poets think in a concrete way. But again this is not always the case.

牛顿的苹果树，剑桥三一学院（蔡天新 摄）

天以前，成功了（我想说，不是由于我苦苦的探索，而是由于上帝的恩惠），就像是闪电轰击的一刹那，这个谜解开了；我以前的知识，我最后一次尝试的方法以及成功的原因，这三者究竟是如何联系起来的，我自己也未能理出头绪来。”

数学虽然经常以与天文、物理及其它自然科学分支相互联系、相互作用的方式出现。但从本质上说，它是一个完全自成体系的（对它本身来说又是极为宽广的）、最具有真实性的知识领域。这一点正如真正的文字语言，它不仅用来记载和表达思想及思维过程，并且反过来（通过诗人和文学家）又把它们创造出来。可以说数学和诗歌是人类最自由的智力活动。匈牙利数学家保尔•图拉认为：数学是一座坚固的堡垒。这应验了福克纳的话：人只要有向往自由的意志，就不会被毁灭。

Both mathematics and poetry are products of imagination. For a pure mathematician, his or her materials are like lacework, leaves on a tree, a patch of grass or the light and shade on a person's face. In other words, "inspiration", which Plato denounced as "a mania of poets," is equally important to mathematicians. For example, Goethe fancied that he saw a flash of light when he heard of his friend Jerusalem's suicide. He immediately came up with the outline of The Sorrows of Young Werther. He recalled that he "seemed to have written the book unconsciously." Another example: Gauss, 'the prince of mathematics' wrote to tell a friend after solving a problem (symbols of Gaussian summation) which had been bothering him for years, "Finally, two days ago, I succeeded – not on account of my hard efforts, but by the grace of the Lord. Like a sudden flash of lightning, the riddle was solved. I am unable to say what the conducting thread was that connected what I previously knew with what made my success possible."

Mathematics often appears to be connected to and interactive with astronomy, physics and other branches of natural science, but it is a completely self-referential and vast field of knowledge with a reality more enduring than other sciences. It is like a true language, which not only records and expresses ideas and the process of thinking, but also creates itself through poets and writers. It could be said that mathematics and poetry are the freest intellectual activities of human beings. The Hungarian mathematician Paul Turàn maintained that "Our mathematics is a strong fortress." His words correspond to Faulkner's "People will never be destroyed as long as they yearn for freedom" , when he talks about creative writing.

Through years of study and practice, I have come to believe that the process of mathematical research is more or less an exercise or an appreciation of intelligence. This is perhaps one of the main reasons for its great charm. I fully understand what the philosopher George Santayana said in his later years, "If my teachers had begun by telling me that mathematics was pure play with presuppositions, and wholly in the air, I might have become a good mathematician, because I am happy enough in the realm of essence." Of course, I cannot rule out the possibility that a great thinker can yield to the intellectual fashions of his times as a man or a woman can do to fashions in dress.

Compared with other disciplines, mathematics is often an undertaking for the younger. The Fields Medal, the most renowned mathematical prize, goes only to mathematicians under forty. Riemann died at forty, Pascal at thirty-nine, Ramanujan at thirty-three, Eisenstein at twenty-nine, Abel at

高斯出生的房子，不伦瑞克(蔡天新 摄)

哥廷根的高斯饭店(蔡天新 摄)

通过多年的研究实践，我认为数学研究的过程或多或少是一种智力的锤炼和欣赏的过程，这或许是数学研究之所以有如此吸引力的一个重要原因。我非常能够理解哲学家乔治•桑塔耶纳晚年说过的一席话："如果我的老师们真的曾在当初就告诉我，数学是一种摆弄假设的纯粹游戏，并且是完全悬在空中的，我倒可能已经成为优秀的数学家了。因为我在本质王国里感到十分幸福。"当然，在此我不能排除伟大的思想家追求时代智力风尚，就如同妇女在服饰上赶时髦一样。

与任何其它学科相比，数学更加是年轻人的事业。最著名的数学奖——菲尔兹奖是专门奖给四十岁以下的数学家的。黎曼死于 40 岁，帕斯卡尔死于 39 岁，拉曼纽扬死于 33 岁，艾森斯坦死于 29 岁，阿贝尔死于 27 岁，伽罗华死于 20 岁，而他们作为伟大数学家的地位却已经奠定。有些数学家虽然长寿，但他们的主要工作大多是在青年时代完成的，例如牛顿和高斯。另一方面，我们可以开列一长串早逝的诗人名单：普希金、洛尔迦和阿波利奈尔死于 38 岁，兰波死于 37 岁，王尔德死于 34 岁，马雅可夫斯基死于 32 岁，普拉斯死于 31 岁，雪莱和叶塞宁死于 30 岁，诺瓦利斯死于 29 岁，济慈和裴多菲死于 26 岁[注1]，洛特雷阿蒙死于 24 岁。而以绘画为例，高更、卢梭和康定斯基都是三十岁以后才开始艺术生涯的。因此，我们有理由认为，在科学、艺术领域里，数学家和诗人是最需要天才的。不同的是，对诗人来说，一代人要推倒另一代人所修筑的东西。而对数学家来说，

twenty-seven, and Galois at twenty; by the time they died they had all left their deep traces on the history of mathematics. Some mathematicians, such as Newton and Gauss, lived long lives, but they completed their major work in their youth. Of course there are exceptions here too.

Likewise we can draw up a long list of poets who died young: Pushkin, Lorca and Apollinaire died at thirty-eight, Rimbaud at thirty-seven, Wilde at thirty-four, Mayakovsky at thirty-two, Plath at thirty-one, Shelley and Yesenin at thirty, Novalis at twenty-nine, Keats and Petofi at twenty-six , and Lautréamont at twenty-four. Whereas if we look at painting, Gauguin, Rousseau and Kandinsky began their artistic careers after they turned thirty. Thus more often than other servants of creation, poets and mathematicians tend to burn up the flower of their talent in the midst of the youth. Poets may destroy the shapes common to the forms of their predecessors, in order to renew the form and language; mathematicians may be, by the nature of their industry, more prone to continuity. Again, there are exceptions.

The language of poets is renowned for its conciseness. Ezra Pound is praised as a master of the concise; no one seems to do better than him in this regard. But the language of mathematicians is also noted for its conciseness. The British writer Jerome K. Jerome gave an example, as follows:

When a twelfth-century youth fell in love he did not take three paces backward, gaze into her eyes, and tell her she was too

歌德塑像

歌德咖啡馆，法兰克福机场（蔡天新 摄）

每一代人都能在旧建筑上增添一层楼。由于这一原因，诗人比数学家更容易出现或消失。

诗人的语言以简练著称，埃兹拉•庞德被誉为“简练的大师”。这方面似乎没有人做得更好，殊不知数学家的语言也是如此，英国作家 J• K• 杰罗姆曾举过一个例子，有这样一段描写：

当一个十二世纪的小伙子坠入情网时，他不会后退三步，看着心爱的姑娘的眼睛，他说她是世界上最漂亮的人儿。如果他在外面碰上一个人，并且打破了他的脑袋——我指的是另一个人的脑袋——那就证明了他的——前面那个小伙子的——姑娘是个漂亮的姑娘。如果是另外一个人打破了他的脑袋——不是他自己的，你知道，而是另外那个人的——对后面那个小伙子来说的另外一个——那就说明了……

倘若我们把这段没完没了的叙述借助数学家的符号表达出来，就变得非常简洁明了：

如果 A 打破了 B 的脑袋，那么 A 的姑娘是个漂亮的姑娘。但如果 B 打破了 A 的头，那么 A 的姑娘就不是个漂亮的姑娘，而 B 的姑娘就是一个漂亮的姑娘。

beautiful to live. And if, when he got out, he met a man and broke his head – the other man's head, I mean – then that proved that his – the first fellow's – girl was a pretty girl. But if the other fellow broke his head – not his own, you know, but the other fellow's – the other fellow to the second fellow, that is…

As he goes on to say, this interminable paragraph would be very succinct if expressed in mathematical symbols, although it would be less amusing:

If A broke B's head, then A's girl was a pretty girl; but if B broke A's head, then A's girl wasn't a pretty girl, but B's girl was.

Of course, it would have been less amusing. The language of mathematicians is universal. Goethe joked that mathematicians are like the French, who can translate whatever you say into their own language and turn it immediately into something totally new. We have been taught that a branch of science is truly developed only when it is able to make use of mathematics. In the same way, poetry is a common key factor of all the arts. It can be said that every work of art needs 'poetic flavor'. Mozart had a reputation as 'the poet of music' and Chopin 'the poet

兰波的城市：夏洛维尔(蔡天新 摄)

诗人们在兰波墓地，夏洛维尔(蔡天新 摄)

不仅如此，数学家的语言还是一种万能的语言，歌德曾逗趣说：数学家就像法国人一样，无论你说什么，他们都能把它翻译成自己的语言，并且立刻成为全新的东西。马克思更是教导我们：一门科学只有当它达到了能够运用数学时，才算真正发展了。与此相应，诗是一切艺术的共同要素，可以说每一件艺术品都需要有“诗意”。因此，莫扎特才有“音乐家诗人”的美誉，而肖邦也被称为“钢琴诗人”。不难想象，在一篇科学论文中出现一个优美的数学公式和在一篇文章或谈话中间摘引几行漂亮的诗句，两者有一种惊人的对称。

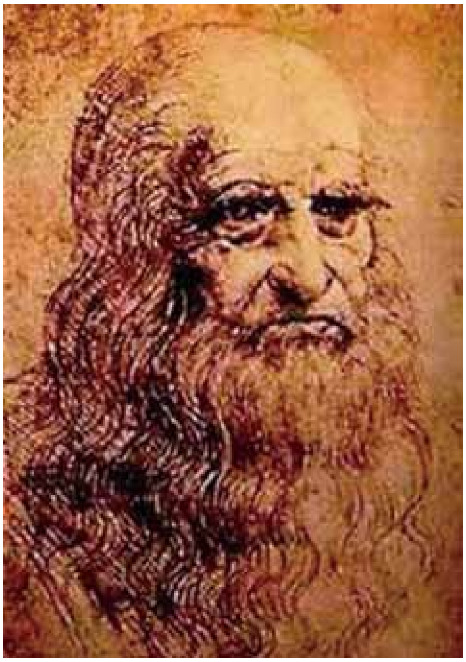
现在让我们回到本文开头提出的命题。弗洛伊德认为：“诗人在心灵的认知方面是我们的大师。”这句话曾被超现实主义领袖布勒东奉为圭臬。诺瓦利斯声称：“诗歌的意义和预言十分相似，一般来说，和先知的直觉差不多。诗人——预言家通过有魔力的词句和形象使人得以触及一个陌生而神奇的世界的奥秘。”因此，一个正直的诗人难免会冒犯统治阶级的利益。柏拉图历数诗人的两大罪状：艺术不真实，不能给人真理；艺术伤风败俗，惑乱人心。[注2] 另一方面，纯粹数学尤其是现代数学的发展往往是超越时代的，甚至是超越理论物理学的。例如，伽罗华群和哈密尔顿四元数的理论在建立一个多世纪以后才开始应用于量子力学；非欧几何学被用来描述引力场、复分析在电气动力学中的应用也有类似的情况；而圆锥曲线自被发现二千多年来，一直被认为不过是富于思辨头脑中的无利可图的娱乐，可是最终它却在近代天文学、仿射运动理论和万有引力定律中发挥了作用。

然而，更多的时候，数学家的工作仍不被人们理解。有这样的指责，认为数学家喜欢沉湎于毫无意义的臆测，或者认为数学家们是笨拙和毫无用处的梦想家。可悲的是，

of the piano’. It’s not difficult to imagine the striking symmetry between a beautiful mathematical formula in a scientific paper and several brilliant lines of poetry in an essay or a speech.

Now let’s come back to the proposition stated at the beginning of this essay. Freud said, “Everywhere I go, I find that a poet has been there before me.” This remark was taken up by Breton, the leader of surrealism, as a golden rule. Novalis asserted, “Poetry is very similar to prophecy in its significance. Generally, poems are like the intuitions of prophets. Poets – prophets – reveal the secrets of a strange and wondrous world with magic lines and images.” Therefore a poet of integrity will inevitably violate the interests of those in power. Plato accused poets of being the enemies of truth and their poetry of spreading mental poison. On the other hand, pure mathematics, especially modern mathematics, often develops in advance of its time, even in advance of theoretical physics. It was more than a full century after the invention of Galois’s Group Theory and Hamilton’s Theory of Quaternions that these theories were applied to quantum mechanics. In similar situations, non-Euclidean geometry was used to describe gravitational fields, and Complex Analysis to describe electrodynamics. The discovery of conic sections, which for over two thousand years was considered no more than “the unprofitable amusement of a speculative brain,” ultimately found its application raised from in Newton’s Equation of Motion, theory of projectile motion and the law of universal gravitation.

However more often than not, the work that mathematicians do is not understood by the crowd. Some people have rebuked them for indulging in pointless speculation or being silly and useless dreamers. Lamentably, this viewpoint of these learned scholars.



达芬奇是意大利文艺复兴时期的著名画家，也是建筑师、解剖学者、工程师、数学家和发明家

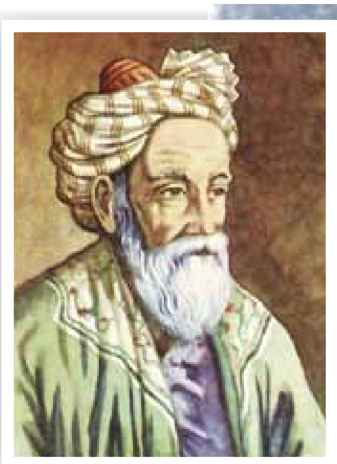
皮亚特•海恩（Piet Hein，1905-1996）是丹麦科学家、数学家、发明家、诗人和作家，笔名“Kumbel”（意即“墓碑”）

这些饱学之士的观点还得到某些权威的支持。圣奥古斯丁一面攻击荷马的虚构败坏人心，“把人间的罪行移到神的身上”，“我们不得不踏着诗的虚构的足迹走入迷途”，一面又叫嚷道：“好的基督徒应该提防数学家和那些空头许诺的人，这样的危险业已存在，数学家们已经与魔鬼签订了协约，要使精神进入黑暗，把人投入地狱。”古罗马法官则裁决“对于作恶者、数学家诸如此类的人”，禁止他们“学习几何技艺和参加当众运算数学这样可恶的学问”。叔本华，一位在现代哲学史上占有重要地位的哲学家，一方面视诗歌为最高艺术，另一方面却把算术看成是最低级的精神活动。[注3] 进入二十世纪以来，越来越多的人认识到了，我们这个时代是如何受惠于数学的，至少奥古斯丁那样的权威人士销声匿迹了。但是诗人和艺术家的境况在某种意义上依然如故，或许他们应该用毕加索的话来聊以自慰：人们只有越过无数障碍之后，才能得以登上艺术家的宝座。因而对艺术非但不该加以鼓励，相反应压抑它。

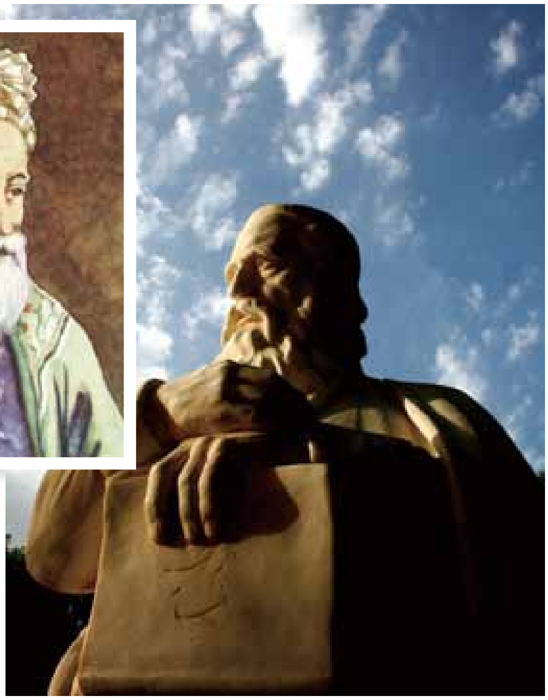
数学家和诗人常常是不约而同地走在人类文明的前沿。古希腊最重要的两部学术著作——欧几里得的《原本》和亚里士多德的《诗学》几乎诞生在同一时代，并且都是建立在对三维空间摹仿的基础上。只不过前者是抽象的摹仿，后者是形象的摹仿。现代艺术的先驱爱伦•坡、波德莱尔与非欧几何学的创始人罗巴切夫斯基、鲍耶也属于同

For example Schopenhauer, a distinguished modern philosopher, acknowledged poetry as the highest art but described arithmetic as the lowest activity of the spirit. Since the beginning of the twentieth century, more and more people have come to realize how our times have benefited from mathematics. To some extent, however, poets and artists are still in the situation they always have been. Perhaps they should console themselves with Picasso’s words: “People earn the title of artists only after they have overcome innumerable obstacles. Therefore art should be restricted instead of being encouraged.”

By coincidence, mathematicians and poets often walk side by side on the frontiers of human civilization. Euclid’s Elements and Aristotle’s Poetics, the two most important academic works of ancient Greece, were written at almost the same time. They both had what one might call a common belief or attitude consisting, one might say, in an accurate ‘imitation’ of the outer world. The first leading in For Euclid, it was the physical-geometrical form to Euclid of three-dimensional space, the second be for Aristotle’s understanding of it was poetics as a description of every day’s life. The difference is that the former was an abstract imitation while the latter was a concrete one. Allan Poe and Baudelaire, pioneers of modern art, belonged to the same age as Lobachevsky and Bolyai, founders of non-Euclidean geometry.



波斯诗人数学家
欧玛尔•海亚姆
（1048-1122）



海亚姆雕像，罗马尼亚布加勒斯特

海亚姆陵墓，伊朗马什哈德

一时代。本世纪三、四十年代，当一批才华横溢的诗人、画家聚集巴黎，发动一场载歌载舞的超现实主义革命时，这个世界上另一些聪明绝顶的头脑正各自为营，致力于发展新兴的数学分支——拓扑学。这里我想引用一个拓扑学家经常引用的例子，美国诗人朗费罗的长篇叙事诗《海华沙之歌》（作于 1855 年，德沃夏克的《自新大陆交响曲》即受其影响写成）中有一段故事，讲到一个做毛皮手套的印第安人：

他把晒暖的一侧弄到里面，把里面的皮翻到外面；把冷冰冰的一侧翻到外面，把晒暖的一侧弄到里面……

在手套的翻进翻出过程中，这个印第安人实际上是在做一个拓扑动作。有趣的是，拓扑这个词最早是以德文的形式 (Topologie) 出现在 1847 年高斯的一个学生写的著作里，在那个年代拓扑概念只存在极少数几个数学家的头脑里。

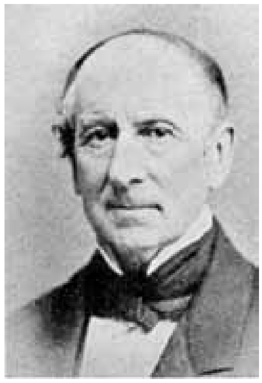
最后我要谈到的是，一个人能不能既成为诗人又成为数学家呢？帕斯卡尔在《思想录》开头差不多这样轻松地写道：凡是几何学家只要有良好的洞见力，就会是敏感的；而敏感的人若能把自己的洞见力运用到几何学原则上去，也会成为几何学家。虽然如此，从历史上看，只有十八世纪意大利数学家马斯凯罗尼和十九世纪法国数学家柯西勉

When a group of poets and painters of great talent gathered in Paris, in the 1930s and 1940s, to launch the radical revolution of surrealism, some other brilliant minds in the world were working hard in their own way to develop Topology, a burgeoning branch of mathematics. Here I want to quote an example, often cited by topologists, which uses a parody of The Song of Hiawatha by the American poet Longfellow. It tells of an Indian who made fur mittens:

He, to get the warm side inside, Put the inside (skin side) outside; He, to get the cold side outside, Put the warm side (fur side) inside…

Interestingly, the word Topology first appeared as Topologie in German, in the work of a student of Gauss in 1847, when the concept was known to very few mathematicians.

Finally I'm going to raise the question of whether someone can be a poet and a mathematician at the same time. Pascal assures us at the beginning of his Pensées: "As long as geometricians have good insight, they can be sensitive; as long as sensitive people can apply their insight to geometric principles, they can be geometricians too." Despite this, historically only the 18th century Italian mathematician Mascheroni and the 19th century French mathematician Cauchy could possibly be counted as


历史上仅有的几位诗人兼数学家：意大利的马斯凯罗尼（左），法国的柯西（中），智利的帕拉（右）。

强算得上诗人，二十世纪智利诗人帕拉也曾做过数学教授。而人类历史上惟一能够在两方面都有杰出贡献的或许惟有欧玛尔•海亚姆了，这位十一世纪的波斯人比多才多艺的达•芬奇还早出生四百年，他的名字不仅因给出三次方程的几何解载入数学史册，同时又作为《鲁拜集》一书的作者闻名于世。上个世纪初，十四岁的 T• S• 艾略特偶然读到爱德华•菲尔茨杰拉德的英译本《鲁拜集》，立刻就被迷住了。他后来回忆说，当他进入到这光辉灿烂的诗歌之中，那情形"简直美极了"，自从读了这些充满"璀璨、甜蜜、痛苦色彩的"诗行以后，便明白了自己要成为一名诗人。

注释

1.1849 年，匈牙利诗人裴多菲在反抗俄奥联军的一次战斗中失踪，此后的一个多世纪里，他一直被认为是"死在哥萨克士兵的矛尖上"。直到不久以前，俄罗斯研究人员才找到档案，揭示他作为战俘被押送到西伯利亚，并于 1856 年死于肺结核。因此他去世时应为 33 岁。

2. 柏拉图先生的用词向来较有特色，在他的最后一篇著作里，他把那些无视数学对于探求理想的重要性的人形容为"猪一般"。

3. 叔本华的这个观点正好与柏拉图唱反调，柏拉图声言要把诗人赶出他的"理想国"，同时又称"上帝是位几何学家"。

poets, while the 20th century Chilean poet Parra was a professor of mathematics. Perhaps the only one in human history who made great contributions in both fields was Omar Khayyam, the 11th century Persian who was born four centuries earlier than the versatile Da Vinci. He made his mark in the history of mathematics for his geometric solution of cubic equations; and he became known to the world as the author of the Rubáiyát. When the fourteen-year-old T.S. Eliot came across Edward Fitzgerald's English translation of the Rubáiyát at the turn of the 20th century, he immediately became enthralled. He recalled the splendor of entering the world of this magnificent poem and realized, after reading those lines full of "dazzling, sweet and painful colors", that he wanted to be a poet.

Acknowledgments The author is grateful to the referees of the Notice of AMS for their valuable opinions and suggestions, particularly to Prof. Preda Mihailescu for insightful, precious ideas and discussions offered during my visit at the Mathematisches Institut, Universität Göttingen. They all made this paper more readable.

致谢：本文英文译本刊登在今年四月份的《美国数学会通讯》上。承蒙《美国数学会通讯》同意本刊转载《数学家与诗人》英译，表示感谢！

医学护理先驱南丁格尔的统计思想和方法

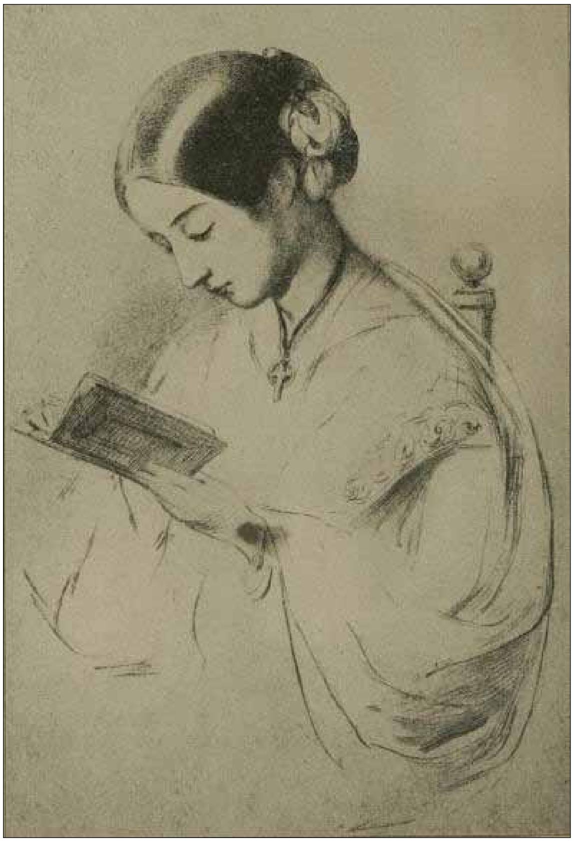
冯振举 杨宝山

大多数人都知道弗洛伦斯•南丁格尔对医学护理事业的重要贡献，她被认为是医学护理领域的奠基人和医疗卫生条件改革的先驱者。由于南丁格尔在医疗卫生条件改革中应用了大量的统计数据和统计方法，为表彰她在统计学研究领域所做出的重要贡献，英国皇家统计学会和美国统计学会曾聘任她为会员，这方面却鲜为人知。她的数学才智对其所献身的医学护理事业曾起到关键性作用。

一、生平及主要社会活动 >>>

弗洛伦斯•南丁格尔（Florence Nightingale，1820-1910），英国人。她的父亲，威廉•爱华德•南丁格尔，在剑桥大学受过良好的教育，母亲芬妮•史密斯，出身于英国望族，家庭富有。南丁格尔的幼年生活极为优裕，充分享受了维多利亚时代的安逸生活。7 岁的南丁格尔已经能熟练

地写信；10岁时能用法语写作；12岁开始，父亲威廉教给她意大利语，拉丁语，希腊语，哲学，历史以及通常不为那时的女性所学习的数学，使她受到了良好的教育。同时，南丁格尔学习了维多利亚女王时代的年轻姑娘们特别期望拥有的社交礼仪和家庭技能。



当时著名的英国数学家西尔维斯特（James Joseph Sylvester，1814-1897）给南丁格尔做过一段时间的数学家庭教师，使她系统地学习了代数、几何和算术。虽然南丁格尔达到了进入剑桥大学继续深造的水平，但那时只有男性才能进入大学接受教育，所以她没能进入大学学习更多的知识。

在当时的社会环境下，南丁格尔发现医院里的护理条件极为简陋，觉得英国也需要有像法国圣温森•戴保罗慈济院这样的机构，由修女来照顾病人。护理工作开始在她心中萌芽，她要做一名护士！19世纪的英国，护士工作被认为是有名望的妇女所不适合的职业。父母对于女儿所要从事的护士职业很不满意。那时，在英国浓厚的封建意识的影响下，一般出身高贵的妇女都在家过着养尊处优的奢侈生活，很少有外出工作的，更不用说参加社会地位低下、受人歧视的护理工作，护士职业不被人尊重，威廉不想让他的女儿获得那种不好的“名声”。

虽然如此，南丁格尔仍然继续坚持从事护理工作的信念。为此在29岁时，她拒绝了与她交往很长时间的男友的求婚。但她的父母仍然感到婚姻对于他们那个阶层的妇女来说是必要的，他们对她学习护理工作的要求充耳不闻。两年后，南丁格尔与布莱克威尔（Elizabeth Blackwell）的会见，尤其是布莱克威尔作为第一个在美国获得医学学位的女性的经历，使她坚定了自己的立场，决定献身于护理事业。最终她得到父母的理解和支持，父母开始帮助她实现她在医学领域的理想，并允许她去德国接受培训。

1851年南丁格尔离开家去德国的一个医院就职，两年后返回伦敦成为“伦敦患病妇女护理会”不要报酬的负责人，后来发生的一个决定性事件永远的改变了她的生活轨迹。

1854年9月英国和法国军队入侵克里米亚，支持土耳其与俄国的战争。英国士兵人员伤亡惨重，南丁格尔自愿到前线照顾伤员，她发现那里的情境是如此悲惨，英国士兵的死亡原因不仅仅是战争导致的创伤，绝大多数的死亡是因为他们到达医院以后所感染上的疾病。南丁格尔认为这完全不可接受并尽力报告她所发现的情况，英国军队对她的报告不感兴趣，事实上不感兴趣的部分原因是他们蔑视一个“弱小的”妇女所尽力告诉他们怎样来执行一个大男人的事务——战争。在南丁格尔锲而不舍的层层汇报下，最终人们听从她的建议并开始执行医疗卫生改革，结果死亡率急剧下降。这是南丁格尔在历史上第一次对社会环境应用了统计学的分析方法努力的结果，具有重要意义。

在克里米亚战争期间，南丁格尔彻底重塑了护理职业的形象。她和她的护士制定了病人护理标准，包括卫生和营养，这极大的减少了军队医院里由于感染和疾病所导致的死亡。她的辛苦工作感动了著名的作家朗费罗（Henry Wadsworth Longfellow，1807-1882），他创作了一首诗把她与“提灯女郎”的形象联系在一起，并赞美她的精神是高贵的，是女界的英雄。

1859年，南丁格尔出版了一本《医院摘要》，对医院建筑与医院管理提出革命性的改革理论。同年，她又完成了一本《护理摘要》，是当时的一本畅销书，后来成为护士学校的教科书。1860年6月24日，她在伦敦的圣•托马斯医院创建的南丁格尔护士训练学校开学，从此正式建立了护理教育制度，南丁格尔也被公认为是现代护理事业的鼻祖。她的个人远见和抱负，开创了现代护理专业的伟业，这对整个人类都是一项空前的贡献。[1]

二、南丁格尔生涯中的数学教育 >>>

1840年，弗洛伦斯•南丁格尔请求她的父母让她学习数学来代替做家务。她的母亲没有同意，认为家庭责任不能因为学习数学而荒废，而女儿的最终归宿还是婚姻，那时人

们认为对于已婚妇女来说，数学是没有用处的。但是她的父亲非常喜爱数学，并经常与女儿进行交流。事实证明，数年后，南丁格尔的数学方法挽救了在斯库台湖的克里米亚战争中的英国军队，并为医院的卫生条件改革提供了大量的数据支持。

在经历了长时间的家庭争论之后，南丁格尔被准许有数学家庭教师，前面提到的西尔维斯特是她的家庭教师之一。她学习了算术、几何、代数，并且在她从事护理生涯之前，她还花费时间给孩子们辅导这些科目。在英国博物馆可以看到，她为了教算术和几何而手写的课程计划，包括她根据儿童的生活实际所编写的故事性的问题。她归纳出了一些提示，告诫小学教师：要写下所有下个星期上课的笔记；没有准备好的课千万不要上；学生将会问什么；并告诉学生有些知识是需要自己亲手去准备的。她的课程计划也表现出对女孩教育的关注：女孩的算术过去被忽视了；她们的地理学知识应更具有算术的特点。她写的笔记里面经常会涉及到一些递进式的追问，如：驯鹿有多高？你也这么高吗？你有多高？ 3 英尺是多少？一码吗？从赤道到欧洲的最高点有多远？你上学的路程有多少？两英里吗？现在，如果你一天走两个地理英里（赤道 1 分的弧长），那么你走到赤道应该是多长时间等等。[2]

南丁格尔赞成问答式的教学，在后来的岁月里，她写关于护理方面的著作时，总希望苏格拉底的方法能对她提问的艺术起到帮助作用，所以她认为：那些读者不是跟我学习而是她们自己在学习。

南丁格尔对数学的兴趣超出了这个学科自身，这可以从 1846 年间她写给丈夫的信中看到。例如，5 月她写到，“达朗贝尔这样伟大的数学家自由自在地所表现出来的有趣的性格，据说这是精密科学以外的特权，那就是享受每天都有一些新的真理来回报你的工作这样一种乐趣。”信中显示了她幽默的一面。在 9 月参加完一个政治性的演说后，她写到:“我已经发现了一个新的对数体系来统计演说中出现‘英王陛下’的次数……”。[2]

南丁格尔的努力促成了一种革命性思想的形成，即社会现象能够客观地测量并能服从数学的分析，她在医用统计学方面的工作给人留下了深刻的印象。作为用图解的方法表示数据的先驱之一，她发明了彩色的极区图（polar-area charts）来形象地描述医疗统计数据。尽管其它的说服办法都失败了，她的统计的方法和结论却让军事当局的权威人士信服了，国会及维多利亚国王最终执行了她关于医院改革的建议。在美国内战期间，南丁格尔是美国政府军队的健康顾问。英国战争部门也要求她对在加拿大的军队医护工作负责。她在那个时期的数学活动包括确定“用雪橇运输的平均速度”以及计算“穿越加拿大最长的距离运输病人所需要的时间”等。

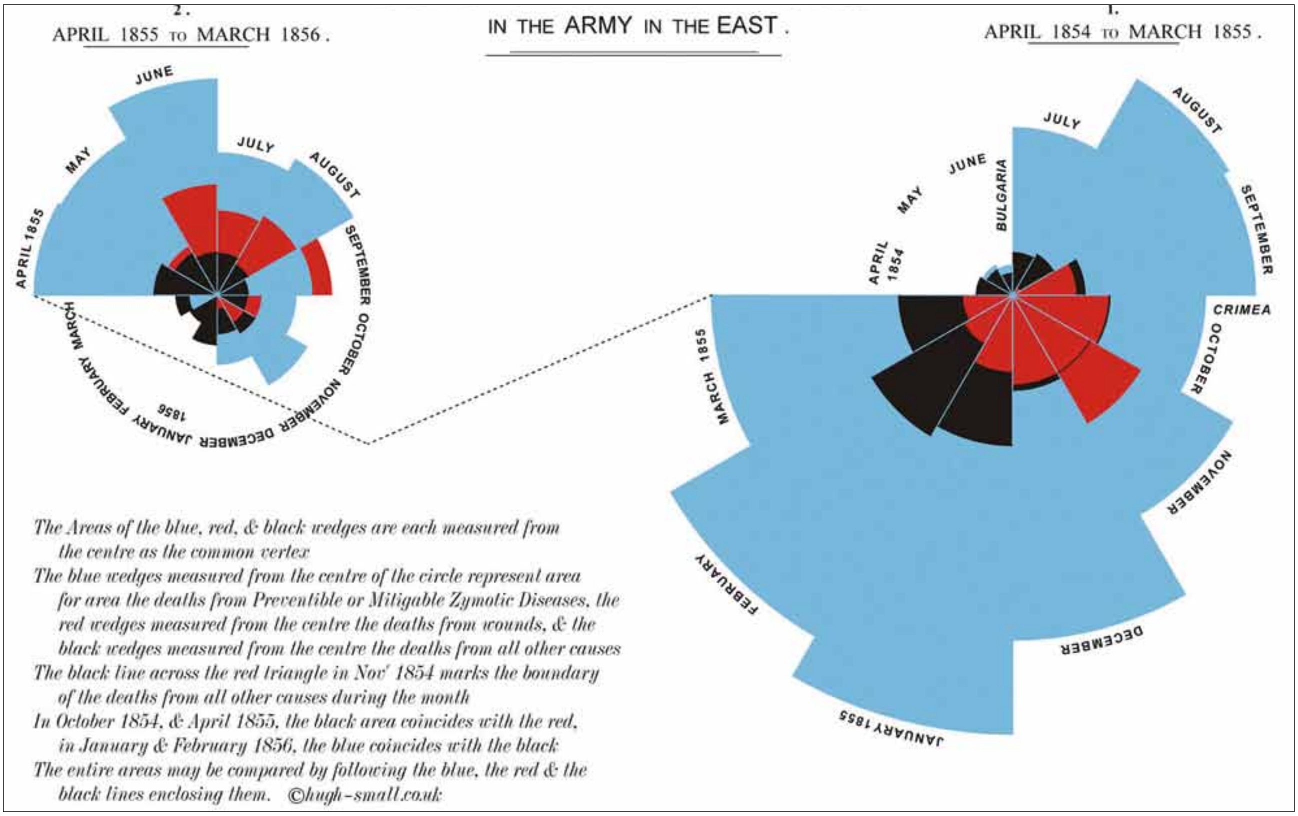
三、作为统计学家的南丁格尔 >>>

很少有人知道南丁格尔在历史上的贡献之一，是她应用图形的方法来传达复杂的统计信息，以便引起大家重视的思想。

1854 到 1856 年的克里米亚战争期间，法国陆军医院有护士护理伤病员，而英国的战地医院管理不善，救护条件很差，又没有护士护理伤病员，士兵死亡率很高。南丁格尔主动提出申请，志愿前往战地担任护理工作。在英国政府的批准下，她率领 38 名护士奔赴前线，在 4 所战地医院服务。

当时前线用品匮乏，水源不足，医疗卫生极差。但南丁格尔毫不气馁，以满腔的热情救护伤病员，竭力排除种种困难。她重组医院，改善伤员的营养和卫生条件，整顿卫生间、化验室和厨房以及器具和药物的供应，加强伤口护理。她对伤员充满同情心和责任感，为他们解决必需用品和食物，组织士兵家属协同工作，增加他们的营养，从而使战地医院面目大大改观。在斯库台湖前线的日子里，南丁格尔收集数据并系统化这些实践的记录。她用这些数据作为依据来改善城市以及军队医院条件。[3]

一段时期以来甚至连统计学家都深信统计是“所有知识里面最干巴巴的东西”。南丁格尔基于她宽广的数学训练打下的坚实基础，成为在标准化的数据收集、表格和绘图表示等方面的改革者。值得一提得是，南丁格尔对医院统计的贡献离不开医学统计学家威廉•法尔（William Farr，1807-1883）的热心帮助。法尔



南丁格尔制作的极区图

不仅为她提供了大量统计资料，而且针对她“不宽容任何人、尤其不宽容自己”的性格特点，不断提醒她：统计的作用在于帮助分析研究问题，而不是为某个主观论断提供证明。[4]在这个时期，她也受到被认为是社会统计学的奠基人——比利时统计学家凯泰勒特（Adolphe Quetelet，1796-1874）的影响。

南丁格尔统计的死亡率显示，在改进卫生条件的方法下，死亡人数会急剧减少。她的卫生改革措施被执行以后，在半年左右的时间里，伤病员的死亡率从 42.7% 下降到了 2.2%。[5]

在证实了克里米亚战争中悲惨的卫生条件后，南丁格尔于 1858 年写了《Notes on Matters Affecting the Health, Efficiency and Hospital Administration of the British Army》，这篇有影响的文章里面包含几幅她称为“鸡冠花”的图表。这种图清晰的显示了非战斗原因，主要是可预防的因素所导致的死亡远远超过与战争受伤有关的死亡。

后来，南丁格尔意识到她在克里米亚战争中发现的问题不仅仅局限在战争时期的医院，已经拥有大量统计数据的南丁格尔，将注意力转移到大范围的公共健康改革。正是因为南丁格尔为进一步的社会改革所投入的系统的数据收集以及形象的数据处理，她的传记作者库克称她为“热情的统计学家”。

四、南丁格尔的统计方法 >>>

排除医学方面的因素，南丁格尔绘制的“鸡冠花”——极区图引人注意的地方是通过面积表示频率，她作的极区图很像饼状图。但是，又与饼状图有所区别，“鸡冠花”保持角度不变但却拥有不同的半径。

上图是南丁格尔制作的极区图。原作外部面积是蓝色的，中间较暗的面积是黑色的，中间较浅的面积是红色的。在原图左下角有一段文字内容是对图表的说明：

蓝色、红色和黑色的楔形面积从中心出发的有共同顶点的规则图形；从圆心出发的规则的蓝色楔形面积代表可阻止的或可减轻感染疾病的死亡，红色楔形面积代表受伤人数，黑色楔形面积代表其它原因导致的死亡数；穿过 1854 年 11 月红三角的黑线表示当月死亡与其他原因导致的死亡的分界线；1854 年 10 月和 1855 年 4 月，黑色的面积与红色的面积一致，1856 年 1 月和 2 月，蓝色面积与黑色面积一致。[6]

描写南丁格尔的影片

图左中的每一部分表示从 1855 年 4 月到 1856 年 3 月期间的月死亡率。右图表示从 1854 年 4 月到 1855 年 4 月的数据。每个楔形被分成三部分表示三种不同的死亡原因。以右图为例，最里面红色部分表示受伤导致的死亡，黑色的中间部分表示其他原因，外面最大的蓝色部分表示可预防疾病导致的死亡。从图中可以看出因为可预防疾病导致的死亡占有很大一部分比例，因此，南丁格尔的图形形象地描述了在战争期间医院需要较好的卫生条件具有多么重要的地位。

极区图是饼状图的变异。饼状图中，圆或“饼”有一个共同的半径。整个的面积根据类别按比例分割，来显示它们相对的频率。例如，如果一类事物里面包含的数目是另一类的两倍，那么它在饼状图中的面积是另一类面积的两倍大。

在极区图中，圆根据每种类别被分成相等的角度或者“楔形”。楔形的半径不同，每一个半径等于代表它那种类别频率的平方根。平方根作为半径是因为一个圆的面积是；使用频率的平方根作为半径意味着在极区图中的楔形面积仍然互相成比例。

极区图的优点在于它不仅显示了每一类别的相对百分比，也给出了全部数据的总和。尽管它具有创新意义和形象化的特点，极区图后来还是被饼状图和条形图所取代，因为在没有计算器的年代要去找到平方根，需要大量艰苦的手工计算。南丁格尔的许多图表中表示每年军队因疾病，受伤和其他原因死亡的数据有 36 个平方根，每月有三个。其次，画图本身还需要用手并需要直尺和弯曲的模板，考虑到时间和效率，选择饼状图和条形图更具有吸引力。

“要想理解上帝的思想我们必须研究统计，因为这是对他的意图的测量。”[7] 南丁格尔如是说。南丁格尔在统计学和统计图形发展史上之所以有重要影响是由许多原因所致。其中最重要的是，她作为一个社会活动家的地位以及通过观察图表中提供的统计数据，可以被用来作为医疗改革的有力依据。

1863 年时，英国的疾病命名与分类混淆不清，各地医院各自为政。南丁格尔制定了医院统计的标准模式，被英国各医院相继采用，使得医院能够收集统一的数据并制作统计表。[8] 南丁格尔是第一个当选为英国皇家统计学会的女性会员，也是美国统计学会的荣誉会员。她的《Notes on Matters Affecting the Health，Efficiency and Hospital Administration of the British Army》获得维多利亚女王颁发的圣乔治十字勋章，这是使用了她的统计数据和图表所第一次出版的文献之一。现代统计学的鼻祖之一皮尔逊（Karl Pearson，1857-1936）认为南丁格尔在应用统计领域是一个“女先知”。[8]

五、结语 >>>

南丁格尔的性格比较复杂。她敢于挑战维多利亚女王时代的传统思想，勇于站出来拒绝婚姻和家庭，尤其是考虑到她来自上层社会的特殊身份。她为实现自己的理想所表现出来的坚韧的奉献精神，以及在维多利亚女王时代为妇女自由而呐喊的不屈性格都是令人叹服的。

南丁格尔是一个男女平等主义者。她为争取学习数学的权利，成为一个护士的权利，以及每一项妇女的权利而战斗。但是她也反对极端主义，认为虽然女人要去做男人能做的事情，但也不能仅仅因为男人做过这件事情，而不考虑这件事情是否是妇女所能做的最好的事情而盲目去做。

南丁格尔的一生是积极进取的一生。她致力于医学护理事业的改革，把病人的护理工作作为一门学问进行研究，创办了世界上第一个护士学校，出版了专业的护理书籍，为护理事业的正规化奠定了坚实的基础。她在对医院护理事业的改革中，创造性地运用了统计学的知识，用数据反映的事实作为支持改革的论据，并把这些数据用图形的方式形象的直观处理，让人一目了然，反映了南丁格尔实事求是的态度

和科学的思维方式。

南丁格尔真正做到了把一生献给护理事业。1912 年国际护士会（ICN）倡议全世界都以南丁格尔诞辰日 5 月 12 日为国际护士节，缅怀和纪念这位当之无愧的护理先驱——弗劳伦斯 • 南丁格尔。她锲而不舍锐意进取的开拓精神，以及对于护理事业的无限忠诚与热爱，尤其是对患者的大公无私的爱，值得我们每个人深思。

致谢：本文受全国教育科学“十五”规划国家级课题（BHA050023）、曲阜师范大学校级课题（XJ200826）、曲阜师范大学博士科研启动基金（BSQD09030）资助。

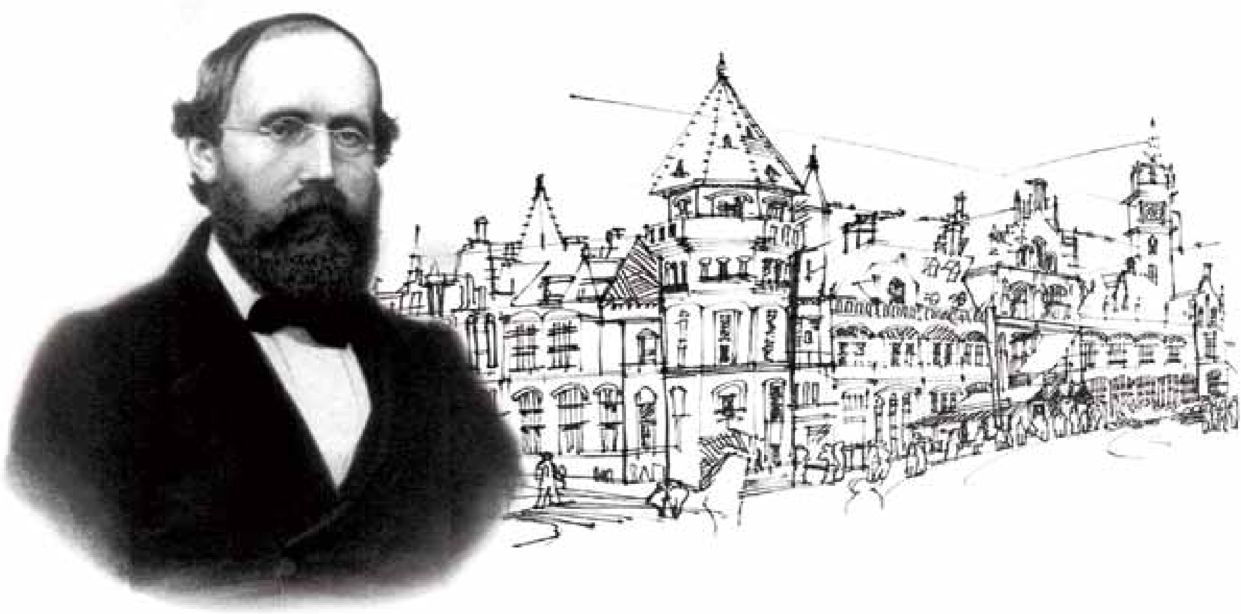
参考文献

1. 王国强: 弗洛伦斯 • 南丁格尔。《实用护理杂志》, 1999, Vol. 15(1):61.
2. S. Lipsey: Mathematical Education in the Life of Florence Nightingale. Newsletter of the Association for Women in Mathematics, 1993, Vol. 23(4):11-12.
3. R. Webber: In Honor of Florence Faculty, and New Nurses. Dermatology Tology Nursing, 2005, Vol. 17(4): 306.
4. 徐勇勇等: 南丁格尔——医院和军队卫生统计的改革先驱。《中国医院统计》, 1994(6), Vol. 1(2): 127.
5. N. Glass: Florence Nightingale: casting light on a disputed reputation. The Lancet. Vol 359. March 23, 2002: 1073.
6. Polar-Area Diagram. http://www.cottlan.edu/lriddle/women/nightpiechart.htm/ 2006-12-9.
7. L. McDonald: Florence Nightingale and the early origins of evidence-based nursing. Evid. Based Nurs. 2001(4): 68-69.
8. C. Audain: Florence Nightingal. http: //www.scottlan.edu/lriddle/women/nitegale.htm/ 2006-12-9.

冯振举（1977-），曲阜师范大学数学科学学院副教授、博士，主要从事数学教育、数学史的研究。曾在《课程 • 教材 • 教法》、《数学教育学报》、《西北大学学报（自然科学版）》、发表论文多篇。

杨宝山（1962-），西北大学数学系副教授、博士，主要从事近现代数学史的研究。曾在《科学技术与辩证法》、《自然辩证法通讯》、《数学通报》等刊物上发表多篇论文。

Riemann



黎曼猜想漫谈(三)

卢昌海

12 休闲课题：围捕零点

听说时下流行一种休闲方式叫做 DIY（Do It Yourself），讲究自己动手做一些原本只有工匠才做的事，比方说自己动手做件陶器什么的。在象我这样懒散的人看来这简直比工作还累，可如今许多人偏偏就兴这个，或许是领悟了负负得正（累累得闲？）的道理吧。既是大势如此，我们也乐得共襄盛举，安排“休闲”一下，让大家亲自动手用黎曼 - 西格尔公式来计算一个黎曼 ζ 函数的非平凡零点。

DIY 一般有个特点，那就是课题虽然选得颇见难度，做起来通常却是挑最简单的来做，以免打击休闲的积极性。我们计算零点也一样，挑相对简单的零点来计算。那么什么样的零点比较容易计算呢？显然是那些听黎曼的话，乖乖地躺在 critical line 上的零点——因为否则的话黎曼猜想早被推翻了。

在黎曼 - 西格尔公式中有许多复杂的东西，其中最令人头疼的是求和，因为它使计算量成倍地增加。但幸运的是那个求和是对 $n^2 < t/2\pi$ 进行的，因此如果 $t < 8\pi \approx 25$，求和就只有 $n = 1$ 一项。这显然是比较简单的，因此我们狡猾的目光就盯在了这一区间上。在这一区间上，黎曼 - 西格尔公式简化成为：

$$Z(t) = 2\cos[\theta(t)] + R(t),$$

这就是我们此次围捕零点的工具。

在正式围捕之前，我们先做一点火力侦察——粗略地估计一下猎物的位置。我们要找的是使 Z(t) 为零的点，直接寻找显然是极其困难的，但我们注

Riemann

意到 $2\cos[\theta(t)]$（通常被称为主项）在 $\theta(t) = (m+1/2)\pi$ 时为零（m 为整数），这是一个不错的出发点。由上节中 $\theta(t)$ 的表达式不难证明，在所有这些使 $2\cos[\theta(t)]$ 为零的 $\theta(t)$ 中，$\theta = -\pi/2$（即 $m = -1$）是使 t 在 $0<t<25$ 中取值最小的，它所对应的 t 为 $t\approx14.5$。这是我们关于零点的第一个估计值。纯以数值而论，它还算不错，相对误差约为百分之三。

接下来我们对这个估计值进行一次修正。修正的理由是显而易见的，因为 $t\approx14.5$ 时 $R(t)$ 明显不为零。为了计算 $R(t)$ 我们注意到 $t\approx14.5$ 时 $(t/2\pi)^{1/2}\approx1.5$，因此 $R(t)$ 中的参数 N [$(t/2\pi)^{1/2}$ 的整数部分] 为 1，p [$(t/2\pi)^{1/2}$ 的分数部分] 约为 0.5。由此可以求出 $R(t)$ 中的第一项——$C_0(t/2\pi)^{-1/4}$——约为 0.3。

为了抵消这额外的 0.3，我们需要对 t 进行修正，使 $2\cos[\theta(t)]$ 减少 0.3。我们采用线性近似 $\Delta t \approx \Delta F(t)/F'(t)$ 来计算这一修正值。为此注意到 $2\cos[\theta(t)]$ 在 $t\approx14.5$ 处的导数为

$$-2\theta'(t)\sin[\theta(t)] \approx -2(1/2)\ln(14.5/2\pi)\sin(-\pi/2)\approx0.83.$$

由此可知 t 需要修正为 $t+\Delta t\approx14.5-0.3/0.83\approx14.14$。这个数值与零点的实际值之间的相对误差仅为万分之四。但是需要提醒读者的是，这种估计——无论它多高明——都不足以证明零点的存在，它至多只能提供一个围捕零点的范围。

那么究竟怎样才能证明零点的存在呢？我们在上节已经提供了方法。那就是通过计算 $Z(t)$ 的符号，如果 $Z(t)$ 在某两点的符号相反，就说明黎曼 ζ 函数在这两点之间内存在零点。我们上面所做的估计就是为这一计算做准备的。现在我们就来进行这样的计算。由于我们已经发现在 $t = 14.14$ 附近可能存在零点，因此我们在 $14.1 \le t \le 14.2$ 的区间上撒下一张小网。如果我们的计算表明 $Z(t)$ 在这一区间的两端，即 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 具有不同的符号，那就证明了黎曼 ζ 函数在 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 之间存在零点[注12.1]。下面我们就来进行计算：

对于 $t = 14.1$，

$$(t/2\pi)^{1/2}\approx1.498027,\ \theta(t)\approx-1.742722.$$

因而主项 $2\cos[\theta(t)]\approx-0.342160$，剩余项 R(t) 中 $p\approx0.498027$，从而其中第一项（C_0 项）$C_0(t/2\pi)^{-1/4}\approx0.312671$。由这两部分（即主项及剩余项中的第一项）可得：

$$Z(14.1) \approx -0.342160 + 0.312671 = -0.029489.$$

类似地，对于 $t = 14.2$，

$$(t/2\pi)^{1/2} \approx 1.503330,\ \theta(t) \approx -1.702141.$$

因而主项 $2\cos[\theta(t)] \approx -0.261934$，剩余项 $R(t)$ 中 $p \approx 0.503330$，从而其中第一项（C_0 项）$C_0(t/2\pi)^{-1/4} \approx 0.312129$。由这两部分（即主项及剩余项中的第一项）可得：

$$Z(14.2) \approx -0.261934 + 0.312129 = 0.050195.$$

显然，如我们所期望的，$Z(14.1)$ 与 $Z(14.2)$ 符号相反，这表明在 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 之间存在黎曼 ζ 函数的零点。当然，我们还没有考虑 $C_1 \sim C_4$ 项。这些项中带有 C_0 的各阶导数，计算起来工作量非同小可，有违休闲的目的，因此就不费心了。熟悉计算软件的读者可以用 Mathematica、Maple 或 Matlab 一类的工具来算一下。我们把所有这些计算结果都列在下表中：

	t=14.1	t=14.2
N	1	1
p	0.498027	0.503330
$\theta(t)$	−1.742722	−1.702141
$2\cos[\theta(t)]$	−0.342160	−0.261934
C_1 项	0.312671	0.312129
C_2 项	0.000058	0.000097
C_3 项	0.001889	0.001872
C_4 项	0.000001	0.000002
C_5 项	0.000075	0.000074
$Z(t)$	−0.027446	0.052042

注 12.1

要注意的是，$Z(t)$ 在一个区间的两端具有不同符号只是 Riemann ζ 函数在该区间存在零点的充分条件，而非必要条件。换句话说，假如我们不幸发现 $Z(t)$ 在我们所取的两点上具有相同的符号，不能直接得出结论说 Riemann ζ 函数在这两点之间不存在零点。至于这是为什么，请大家 DIY。

从这些结果中可以看到，剩余项中的高阶项的贡献虽然有所起伏，但与第一项相比总体上很小。对于我们来说，这显然是很幸运的结果，因为否则的话，我们就得休闲不成反卖苦力了。这还是 t 较小的情况。随着 t 的增加，由于高阶项中所含 t 的负幂次较高，其贡献会变得越来越小[注 12.2]，但要严格表述这种趋势并予以证明，却绝非轻而易举。事实上黎曼 - 西格尔公式作为 $Z(t)$ 的渐进展开式，其敛散性质与误差估计都是相当复杂的。

现在我们知道了黎曼 ζ 函数在 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 之间存在零点。如果我们再仔细点，注意到 $Z(14.1)$ 与 $Z(14.2)$ 距离 $Z(t) = 0$ 的远近之比为 0.027446:0.052042，用线性内插法可以推测零点的位置为：

$$t \approx 14.1 + (14.2 - 14.1) \times 0.027446 / (0.027446 + 0.052042) \approx 14.1345.$$

这与现代数值 $t = 14.1347$ 的相对偏差只有不到十万分之二！即使只估计到 C_0 项（这是我们自己动手所及的范围），其误差也只有不到万分之二。

好了，猎物在手，我们的简短休闲也该见好就收了。大家是否觉得有点成就感呢？要知道，黎曼 ζ 函数的零点可是在黎曼的论文发表之后隔了四十四年才有人公布计算结果的哦。当然，我们用了黎曼 - 西格尔公式，但这没什么，一个好汉三个帮嘛，再说了，DIY 哪有真的百分之百从头做起，连工具设备都不包括在内的？想象一下，如果你 DIY 出来的陶器能够把缺陷控制在万分之二以内，那是何等的风光？当然，倘若你可以退回一百多年，把这个结果抢在格拉姆（Jørgen Gram，1850-1916）之前公布一下，那就更风光了。

在本节最后，还有一件可能让大家有成就感的事要提一下。那就是我们所用的估计零点的方法——即从使 $2\cos[\theta(t)]$ 为零的点出发，然后依据 $R(t)$ 的数值对其进行修正[注 12.3]，最后用 $R(t)$ 的符号来确定零点的存在，暗示黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点数目大致与 $\cos[\theta(t)]$ 的零点数目相当。而后者大约有（请大家 DIY）$\theta(t)/\pi \sim (t/2\pi)\ln(t/2\pi) - (t/2\pi)$ 个。不知大家是否还记得，这正是我们在第五节中介绍过的黎曼的三个命题中迄今无人能够证明的第二个命题！当然，我们这个也不是证明（真可惜，否则的话，嘿嘿 ...），但这应该使大家对我们休闲手段之高明有所认识吧？

13 从纸笔到机器

黎曼 - 西格尔公式的发表大大推进了人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的计算。如我们在前两节所看到的，黎曼 - 西格尔公式中的求和项数是由 $n^2<(t/2\pi)$ 确定的，这表明用黎曼 - 西格尔公式计算一个位于 $s = 1/2+it$ 附近的零点所需的计算量为 $O(t^{1/2})$。而在这之前人们所用的欧拉 - 麦克劳林（Euler-Maclaurin）公式计算同样的零点所需的计算量约为 $O(t)$。这两者的差别——也就是黎曼 - 西格尔公式相对于欧拉 - 麦克劳林公式的优越之处——随着 t 的增大而变得越来越明显。

黎曼 - 西格尔公式发表大约四年后，哈代（Godfrey Hardy，1877-1947）的学生、英国数学家蒂奇马什（Edward Titchmarsh，1899-1963）成功地计算出了黎曼 ζ 函数前 1041 个零点的位置，它们全都位于 critical line 上。这是十一年来数学家们首次突破我们在第八节提到过的由哈奇森（J. I. Hutchinson）于 1925 年创造的 138 个零点的记录。蒂奇马什的工作在黎曼 ζ 函数非平凡零点计算史上的地位是双重的：从计算方法上讲，它是数学家们首次用黎曼 - 西格尔公式取代欧拉 - 麦克劳林公式进行大规模零点计算；从计算手段上讲，蒂奇马什的计算使用了英国海军部用来计算天体运动及潮汐的一台打孔式计算机（punched-card machine），这是数学家们在零点计算上首次用机器计算取代传统的纸笔计算。这两个转折是数学与技术相辅相成的结

注 12.2

但另一方面，随着 t 的增加，Riemann-Siegel 公式中的求和所包含的项数会逐渐增加，因此计算的总体复杂程度并不呈现下降趋势。

注 12.3

对于求和中有不止一项的情形，修正所依据的不仅仅是 $R(t)$，但思路是类似的。

Riemann

果，它奠定了直到今天为止人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点进行计算的基本模式。

蒂奇马什之后零点的计算因第二次世界大战的爆发中断了十几年。战后最先将计算推进下去的是著名的英国数学家图灵（Alan Turing，1912-1954）。图灵其实早在战前就对黎曼猜想产生了兴趣。与当时许多其他年轻数学家一样，图灵对希尔伯特（David Hilbert，1862-1943）的数学问题很感兴趣，这其中又尤以第十问题与第八问题（黎曼猜想是第八问题的一部分）最让他着迷[注 13.1]。他后来主要的研究都是以这两个问题为主轴展开的。1936 年图灵到普林斯顿大学读研究生，在那里见到了来访的哈代——他原本希望能在普林斯顿见到哥德尔（Gödel，1906-1978），可惜后者当时已经去了欧洲。那时哈代对黎曼猜想的态度已经相当悲观。这种悲观情绪对图灵产生了影响，他觉得这么多年来所有证明黎曼猜想的努力都归于失败，也许是到了换个角度思考问题的时候了。人们一直无法证明黎曼猜想，也许并非因为它太难，而是因为它根本就不成立！

一个数学命题，它的成立需要证明，不成立同样需要证明。假如黎曼猜想真的不成立，我们怎样才能证明这一点呢？ 我们当然可以试图从数学上直接证明其不成立，这是一种方法。但还有一种办法，那就是找到一个反例，即找到一个不在 critical line 上的零点。这种方法的好处是不在乎多少，只要一个反例就足够了。被后世誉为“计算机与人工智能之父”的图灵显然对后一种方法情有独钟。当时图灵已经提出了后来以他名字命名的图灵机的概念。很自然的，他希望建造一台机器来计算零点。但是这一工作起步不久，英国就卷入了二战，图灵开始参与英国情报部门破译德军密码的工作，建造机器的计划被搁置了下来。战争结束后，图灵渐渐恢复了建造机器及计算零点的计划。图灵虽然是以其对计算机及人工智能领域的卓越贡献著称的，但他在传统数学领域也有相当深厚的功力，早在读本科的时候，他就曾独立证明了概率论中著名的中心极限定理（可惜比 J. W. Lindeberg 晚了十余年）。在建造机器的同时，图灵对计算零点的数学方法也进行了研究，并做了一些改进。

经过几年的努力，到了二十世纪五十年代初，图灵终于完成了他的机器，并且比创造战前记录的蒂奇马什略进一步，计算出了前 1104 个零点。不过他试图寻找黎曼猜想反例的努力并不成功，因为所有这些零点全部位于 critical line 上，黎曼猜想在他计算所及的范围内岿然不动。在那之后，图灵的机器坏掉了。几乎与此同时，他的个人生活也遭遇了极大的挫折。他于 1952 年被控犯有当时属于违法的同性恋行为，受到强制药物治疗及缓刑的处罚。两年后他被发现因氰化物中毒死于寓所。多数人相信他是自杀[注 13.2]。

在图灵之后，随着计算机发展的加速，数学家们对零点的计算也越来越快。1956 年，D. H. Lehmer 计算了前 25000 个零点；两年后 N. A. Meller 把这一记录推进到了 35337 个零点；1966 年，R. S. Lehman 再次刷新记录，他计算了 250000（二十五万）个零点；三年后这一记录又被 J. B. Rosser 改写为 3500000（三百五十万）…

黎曼 ζ 函数的零点计算步入了快车道！

14 最昂贵的葡萄酒

验证了三百五十万个零点虽不足以证明什么，但对黎曼猜想还是有着一定的心理支持作用。不过许多数学家对这点心理支持作用很不以为然，其中有一位数学家最为突出，不仅不以为然，而且还“顶风作案”，跟同事打赌！

这位打赌的数学家是德国波恩马克•普朗克数学研究所（Max Planck Institute for Mathematics）的查

注 13.1

Hilbert 第十问题是：给定一个具有任意多未知数的 Diophantine 方程，设计一个过程，能用有限多次运算确定该方程是否具有整数解。Turing 对计算机及人工智能的研究与此有着密切的关系。

注 13.2

图灵与约翰•纳什（影片《美丽心灵》的主角）颇有相似之处：两人都对纯数学有浓厚的兴趣，研究成果却对应用领域影响深远；两人都对物理学有过一些兴趣；两人都有为军方服务的经历；两人后来的精神世界都偏离了常轨…

基尔（Don Zagier，1951- ）。对查基尔来说，区区三百五十万个零点简直就是 zero evidence，因为他认为黎曼ζ猜想的反例根本就不可能出现在这么前面的零点之中，因此在他看来当时已完成的所有有关零点的计算其实都还远没有涉及到真正有价值的区域。那么要计算多少个零点才可能对黎曼猜想具有判定性的价值呢？查基尔通过对一些由黎曼ζ函数衍生出来的辅助函数的研究，认为大约要 300000000（三亿）个零点。

查基尔的怀疑论调很快遇到了对手。二十世纪七十年代初，马克•普朗克数学研究所的访客名单中出现了一位铁杆的黎曼猜想支持者：蓬皮埃利（Enrico Bombieri，1940-）。这是一位非同小可的人物，他在不久之后的 1974 年获得了数学最高奖——菲尔兹奖。蓬皮埃利深受哲学家奥卡姆（William of Occam，1288-1348）的科学简单性原则（俗称奥卡姆剃刀）的影响，对他来说，一个不在 critical line 上的零点就象交响乐中的一个失控的音符，是完全无法令人接受的。

一个怀疑、一个深信，怎么办呢？查基尔提议打赌。不过人生苦短，两人都意识到自己未必有机会能在有生之年见到黎曼猜想被证明或证伪。为了不使赌局太过遥遥无期，双方决定以查基尔认为具有判定性价值的前三亿个零点为限。如果黎曼猜想在前三亿个零点中出现反例，就算查基尔获胜； 反之，如果黎曼猜想被证明，或者虽然没被证明但在前三亿个零点中没出现反例，则算蓬皮埃利获胜 [注 14.1]。他们定下的赌注为两瓶波尔多葡萄酒（Bordeaux）。

查基尔估计这个赌局要分出胜负也许得花上三十年，因为当时计算机的运算能力距离能够计算三亿个零点还相差很远，而且计算黎曼ζ函数的零点没什么应用价值，在 CPU 时间十分昂贵的时代并不是人们热衷的计算课题。可是没想到仅仅过了几年，1979 年，由布伦特（Richard Brent，1946-）领导的一个澳大利亚研究组就把零点计算推进到了前 81000000（八千一百万）个零点。不久由特里奥（Herman te Riele,1947-）领导的一个荷兰研究组更是成功地计算出了前两亿个零点。所有这些零点都毫无例外地落在黎曼猜想所预言的 critical line 上。这一系列神速的进展对查基尔的钱包显然是大大的凶兆，到这时他已经知道自己大大低估了计算机领域的发展速度。不过特里奥在两亿个零点处终止计算还是让查基尔松了一口气，他庆幸道：“毫无疑问他们有能力推进到三亿，但感谢上帝，他们没那么做。现在我总算有几年时间可以喘息了。他们是不会为了多算 50% 而推进的。人们会等待能够算到十亿个零点的那一天，那将是许多年后的事了。”

查基尔的如意算盘原本打得不错，计算零点不象百米赛跑，在百米赛跑中由于比赛记录已经逼近人类所能达到的速度极限，因此大家不惜为百分之一秒争个你死我活。计算零点却是一条没有尽头的征程，计算能力的发展在相当长的时间内也是没有尽头的。在这种没有尽头的征程上，仅仅多算百分之几十的零点是不够刺激的，人们更感兴趣的是数量级上的推进。这正是查基尔认为自己可以喘息几年的心理屏障。可惜人算不如天算。查基尔万万没有想到他的一位好朋友伦斯特拉（Hendrik Lenstra，1949-）当时正在荷兰，不仅在荷兰，而且与特里奥同在一个城市——阿姆斯特丹！ Lenstra 是知道查基尔和蓬皮埃利的赌局的。如今眼看好戏就要开演了，正自心痒难搔，特里奥竟然不合时宜地在两亿个零点处停了下来，伦斯特拉的那份难受就甭提了（大家以后可得留神好朋友啊！），套用一句韦爵爷的话说，那真是“生可忍，熟不可忍”。于是他给特里奥做思想工作：你知不知道，如果你算到三亿，查基尔就会输掉一个赌局！特里奥一听原来计算零点还有这么伟大的意义，那还等什么？把查基尔干掉啊！于是大家一鼓作气把计算推进到了 307000000（三亿零七百万）个零点处。那是在 1982 年。

查基尔输了。

查基尔兑现了诺言，买来两瓶葡萄酒，蓬皮埃利当场打开其中一瓶与查基尔共享。这一瓶酒，用查基尔的话说，是世界上被喝掉的最昂贵的葡萄酒。因为正是为了这两瓶酒，特里奥特意多计算了一亿

注 14.1

严格讲，他们的条款还忽略了一种可能性，那就是 Riemann 猜想在数学上被证伪，但反例并不在前三亿个零点之中（或虽然在前三亿个零点之中，但尚未有人进行计算）。显然，这个忽略对 Zagier 比较不利，不过它对赌局后来的发展没有产生影响。

个零点。这花费了整整一千个小时的 CPU 时间，而特里奥所用的计算机的 CPU 时间在当时大约是七百美元一小时。换句话说，这两瓶酒是用七十万美元的计算经费换来的，被他们喝掉的那一瓶价值达三十五万美元！

喝完了那瓶酒，查基尔从此对黎曼猜想深信不疑。只不过，蓬皮埃利相信黎曼猜想是因为它的美丽，是因为奥卡姆剃刀；而查基尔相信黎曼猜想是因为证据，是因为他觉得证据已经足够强了。

15 更高、更快、更强

三亿个零点摆平了查基尔，但显然远不是对黎曼 ζ 函数非平凡零点进行计算的终点。不过在介绍进一步进展之前我们先要对零点计算做一点补充说明。

当我们说到零点计算的时候，一般人会很自然地认为所谓零点计算，顾名思义就是计算零点的数值。不知读者在上一节时有没有想过这样一个问题：那就是三亿个零点，即使每个只保留十位数字，写下来也有三十亿个数字（如果加上小数点、等号及零点编号等，则数字还要翻上一番）。以每页三千个数字而论，起码要一百万页纸才能记录下来！当然，计算结果不是非得记录在纸上不可的。但是三十亿个数字差不多是 3GB，这在今天虽然算不了什么，在 1982 年却是非同小可的数量，用任何方式记录都并不容易。以计算机硬盘为例，当时容量为几个 MB 就算很大了，价格十分昂贵，而要想记录三亿个零点却要上千个这样的硬盘！若果真如此，查基尔岂不还大大低估了他那两瓶葡萄酒的价值？

其实狡猾的特里奥并没有计算那些零点的具体数值。事实上除了最初那些小范围的计算外，我们前面介绍的大规模零点计算并不给出零点的具体数值，而只是验证零点是否在 critical line 上。因此，当人们说“计算了前 N 个零点”时，实际指的往往只是验证了前 N 个零点是否位于 critical line 上[注 15.1]。

但是不计算零点的数值，又如何判断零点是否在 critical line 上呢？其实很简单。我们在第十一节中介绍过，要研究黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点，只需研究 $Z(t)$ 的符号改变即可。假如在区间 $0<t<T$ 内 $Z(t)$ 的符号改变 N 次，则黎曼 ζ 函数在 critical line 上该区间内至少有 N 个零点。另一方面，我们虽不确定是否所有零点都在 critical line 上，却知道它们全部位于 critical strip — $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ — 内（参阅第七节），而人们早就知道如何计算 critical strip 内位于区间 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 的零点总数（最早的方法是由黎曼本人给出的对 $d\xi(s)/2\pi i\xi(s)$ 沿矩形区域 $\{0<\mathrm{Re}(\rho)<1,\ 0<\mathrm{Im}(\rho)<T\}$ 作边界路径积分——参阅第五节）。显然，只要我们能够证明：

1. 在 critical strip 内位于区间 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 的零点总数为 N；
2. 在 critical line 上位于区间 $0<t<T$ 的零点至少有 N 个

就可以推知黎曼 ζ 函数的前 N 个零点全部位于 critical line 上。由于这两者都不涉及零点的具体数值。因此我们可以不计算零点数值就直接证明黎曼 ζ 函数的前 N 个零点（或更一般地，复平面上某个区域内所有的零点）都位于 critical line 上，这正是大多数零点计算所采用的方法。

对黎曼 ζ 函数零点的计算越推进（即 N 越大），我们在复平面上沿虚轴方向延伸得就越高（即 T 越大）。随着计算机运算速度越来越快，特里奥的三亿个零点的记录很快就失守了。四年后，由他本人及 J. van de Lune 领衔将计算推进到了十五亿个零点。此后 van de Lune 及其他一些人继续进行着零点计算。不过这时已经很少有人象当年的图灵那样觉得有可能通过零点计算直接找到黎曼猜想的反例，也再没有象查基尔那样敢于下注的勇士了。人们在计算零点上的兴趣和投入遂大为下降。这其中一个显著的变化就是逐渐用廉价的小型或微型机取代以往的大型机，且往往使用机器的闲散时间而非正规工作时间来进行计算。尽管如此，计算机技术的神速发展还是抵消了所有这些因素带来的不利影响。零点计算仍在推进着，只是速度变得缓慢起来，这种趋势一直延续到

注 15.1

举个例子来说，虽然早在 1982 年特里奥就“计算了”前三亿个零点，但直到几年后 Odlyzko 与特里奥才合伙对区区两千个零点做了真正的数值计算（精度达小数点后一百位），并以此为基础一举否证了 Mertens 猜想（参阅第六节）。

Riemann

二十世纪末（2000 年）。

但是到了 2001 年 8 月，德国伯布林根（Böblingen）IBM 实验室的 Sebastian Wedeniwski 启动了一个被称为 ZetaGrid 的计划，建立了迄今为止最强有力的黎曼 ζ 函数零点计算系统，重新将零点计算推向了快车道。ZetaGrid 系统将零点计算通过计算机网络分散到大量的计算机上，从而极大地拓展了资源利用面。ZetaGrid 刚启动的时候，加入系统的计算机只有 10 台，半年后就增加到了 500 台，这些都是 IBM 实验室的内部计算机。一年后，Wedeniwski 将 ZetaGrid 推向了互联网，任何人只要下载安装一个小小的软件包就可以使自己的机器加入 ZetaGrid，此举很快吸引了大量的参与者。如今在 ZetaGrid 上的联网计算机数平均已在一万以上，虽然 ZetaGrid 上的多数计算是利用各台机器的闲散 CPU 时间进行的（比如通过背景过程或屏保程序），但由如此大量的计算机所形成的总体运算能力依然十分可观。截至 2004 年 7 月，ZetaGrid 所计算的零点累计已达 8553 亿个（其中有六百万个是由本文作者贡献的 :-)，而且还在以大约每天十亿个以上的速度增加着。

16 零点的统计关联

除了不计算具体数值这一特点外，前面所介绍的那些大规模零点计算还有一个特点，那就是都只针对前 N 个零点。换句话说，所有那些计算都是以第一个零点为起始的。它们所验证都只是复平面上 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 之间的零点。除了这类计算外，在零点计算中还有一类计算也十分重要，那就是针对一个虚部很大的区间 $T_1<\mathrm{Im}(\rho)<T_2$ 的计算（即从某个很大的序号开始的零点计算）。这类计算中最著名的人物是 Andrew M. Odlyzko，他在二十世纪八十年代末和九十年代初对序号在 $10^{20}-30769710$ 和 $10^{20}+144818015$ 间的总计 175587726 个零点进行了计算。2001 年和 2002 年，他更是把计算的起始点推进到了第 10^{22} 和 10^{23} 个零点附近，所计算的零点数目也分别增加到了一百亿和两百亿。Odlyzko 的这些计算不仅所涉及的区域远远超出了 ZetaGrid 的验证范围，而且还包含了对零点数值的计算。这些计算对于研究黎曼猜想的意义不仅在于它们提供了有关这一猜想的新的数值证据，更重要的是它们为研究黎曼 ζ 函数非平凡零点在 critical line 上的统计关联提供了数据。这也正是 Odlyzko 进行这类计算的目的。

那么 Odlyzko 为什么会研究起零点的统计关联来呢？这还得从二十世纪七十年代初说起。当时英国剑桥大学有位来自美国的研究生叫做蒙特哥麦利（Hugh Montgomery），他所研究的课题是零点在 critical line 上的统计关联。

蒙特哥麦利这个名字不知大家有没有觉得面熟？对了，本系列各篇文章所引的共同题记正是出自此人！

我们以前谈论零点分布的时候，所关心的往往只是零点是否分布在 critical line 上。蒙特哥麦利的研究比这更进一步。他想知道的是，假如黎曼猜想成立，即所有零点都分布在 critical line 上，那它们在 critical line 上的具体分布会是什么样的？

在蒙特哥麦利进行研究的时候虽然已经有 Rosser 对前三百五十万个零点的计算结果（参阅第十三节），但如我们在上文中所说，那些计算并不涉及零点的具体数值，从而无法为他提供统计研究的依据。因此 Montgomery 只能从纯理论的角度来研究零点在 critical line 上的统计关联。

蒙特哥麦利对零点分布的理论研究从某种意义上讲恰好与黎曼对素数分布的研究互逆。黎曼的研究是着眼于通过零点分布来表示素数分布 （参阅第五节），而蒙特哥麦利的研究则是逆用黎曼的结果，着眼于通过素数分布来反推零点分布。

不幸的是，素数分布本身在很大程度上就是一个谜。除了素数定理外，有关素数分布的多数命题都只是猜测。而素数定理，如我们在第七节中看到的，与零点分布的相关性非常弱，不足以反推出蒙特哥麦利感兴趣的信息。于是蒙特哥麦利把目光投注到了比素数定理更强的一个命题，那便是哈代与李特尔伍德（J. E. Littlewood，1885 - 1977）于 1923 年提出的关于孪生素数分布规律的猜测，即迄今尚未证明的著名的强孪生素数猜想（有关这一猜想的介绍可参阅拙作孪生素数猜想）。蒙特哥麦利以黎曼猜想的成立为前提，以黎曼的公式及哈代与李特尔伍德所猜测的孪生素数分布规律为依据，研究提出了有关黎曼 ζ 函数非平凡零点在 critical line 上的分

Riemann

布规律的一个重要猜测：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left|\left\{(t',t'')\ \middle|\ 0\le t'\le t''\le T,\ \ \frac{2\pi\alpha}{\ln(T/2\pi)}\le t''-t'\le\frac{2\pi\beta}{\ln(T/2\pi)}\right\}\right|}{\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}}$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[1-\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2\right]dt,$$

上式中 t' 和 t'' 分别表示一对零点的虚部，α 和 β 是两个常数 ($\alpha<\beta$)。很明显，上式表示的是零点的对关联（pair correlation）规律。这一规律被称为 Montgomery - 对关联假设（Montgomery pair correlation conjecture），其中的密度函数 $\rho(t)=1-[\sin(\pi t)/\pi t]^2$ 被称为零点的对关联函数（pair correlation function）。

从上述分布规律中可以看到 $\lim_{t\to 0}\rho(t)=0$，这表明两个零点互相靠近的几率很小。换句话说黎曼 ζ 函数的非平凡零点有一种互相排斥的趋势。这一点与蒙特哥麦利最初想象的很不相同。蒙特哥麦利曾经以为零点的分布是高度随机的，如果那样的话，对关联函数应该接近于 $\rho(t)\equiv 1$。这一分布也不同于蒙特哥麦利当时见过的任何其它统计分布——比如 Poisson 分布或正态分布——中的对关联函数，它与素数本身的分布也大相径庭。这一分布究竟有何深意呢？对蒙特哥麦利来说还是一个谜。

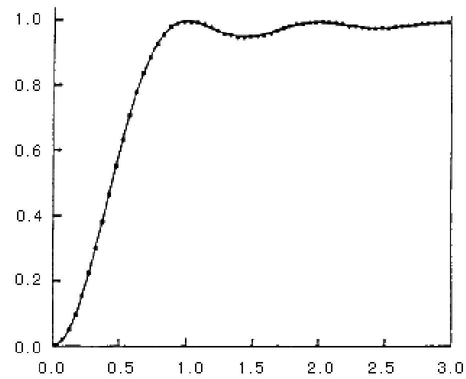
大家也许还记得，在第五节中我们曾经介绍过黎曼提出的三个命题，其中第一个命题 (也是迄今唯一被证明的一个) 表明在区间 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 上黎曼 ζ 函数的非平凡零点的数目大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。由此不难推知（请读者自行证明）黎曼 ζ 函数相邻零点的间距（即虚部之差）大约为 $\Delta t\sim 2\pi/\ln(T/2\pi)$。这一间距随 t 而变，这使得 Montgomery - 对关联假设的形式比较复杂。有鉴于此，蒙特哥麦利之后的数学家（比如 Odlyzko）对零点的虚部做了处理，引进了间距归一化的零点虚部：

$$n=\frac{t}{2\pi}\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right),$$

利用这一定义，相邻零点的间距被归一化为 $\Delta n\sim 1$，而蒙特哥麦利对关联假设可以简化为（请读者自行证明）：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left|\left\{(n',n'')\ \middle|\ 0\le n'\le n''\le N,\ \alpha\le n''-n'\le\beta\right\}\right|}{N}$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[1-\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2\right]dt.$$



零点的对关联函数

Montgomery - 对关联假设提出之后，一个很自然的问题就是：零点分布果真符合这一假设吗？这正是 Odlyzko 登场的地方。由于 Montgomery - 对关联假设涉及的是对关联在 $T\to\infty$ 情形下的极限分布，因此要想对这一假设进行高精度的统计检验，最有效的办法是研究虚部很大的零点的分布，这也正是 Odlyzko 将零点计算推进到 10^{20} 及更高区域的原因。我们在上方的图中给出了蒙特哥麦利零点对关联函数（曲线）及由 Odlyzko 利用 10^{20} 附近七千万个零点对之进行统计检验的结果（数据点）。两者的吻合几乎达到了完美的境界。

1972 年春天，刚刚完成上述零点统计关联研究的蒙特哥麦利带着他的研究成果飞往美国圣路易斯　参加一个解析数论会议。在正式行程之外，他顺道在普林斯顿高等研究所做了短暂的停留。没想到这一停留却在数学与物理间造就了一次奇异的交汇，我们黎曼猜想之旅也因此多了一道神奇瑰丽的景致。

未完待续

《中国数学会通讯》是中国数学会的机关刊物，主要刊登国内外数学界的重要信息，报导中国数学会与各省市自治区数学会、学科分会等的活动情况。主要栏目包括：学术活动信息，数学教育与普及，数学精品文章（数学的历史、进展、价值、趣事等），人物专栏，学科介绍，书讯与书评等。

主　　编：马志明
常务副主编：严加安，王长平
副 主 编：巩馥洲，丁彦恒
编　　委：蔡天新，段海豹，冯荣权，胡作玄，贾朝华，李文林，刘建亚
陆柱家，曲安京，王维凡，余德浩，张英伯，张立群
责任编辑：武建丽

《中国数学会通讯》为季刊，彩色印刷，图文并茂，
全年的总订费为 50 元（含邮费）。

订阅办法：请将订费邮汇至北京中关村东路 55 号（邮政编码：100190），中国数学会办公室；
或行汇至中国数学会
开 户 行：北京工商行海淀西区支行
帐　　号：0200004509089161419
电　　邮：cms@math.ac.cn
电　　话：0086-10-62551022

2011 年第 1 期要目：

- 2011 年数学界迎新春茶话会在京举行
- 中国数学会正副理事长、秘书长会议纪要
- 中国数学会十届七次常务理事会会议纪要

陆柱家译：2010 年奈旺林纳奖、高斯奖、陈省身奖章
马志明：我们与数学强国的差距
李文林：数学“麦加”哥廷根巡礼
王建方：搞科研，也需要学会忘记
严加安：十六行诗（六首）

《中国数学会通讯》编辑部供稿

复数及其文化意义

薛有才

虚单位 i 以及由此产生的复数 $a+bi$ 在数学的发展史上具有非常重要的文化意义，它与非欧几何等现象改变了人们对于数学的认识，对于人类思想史、认识论的发展产生了重大影响。

1 复数的历史

历史上第一个遇到虚数的人是印度数学家婆什迦罗（Bhaskara Acharya, 约 1114-1185 年），他在解方程时认为方程 $x^2=-1$ 是没有意义的，原因是任何一个实数的平方都不会是负数。

大约过了 300 多年，1484 年法国数学家许凯（N. ChuQuet, 约 1445-1500 年）在《算术三篇》一书中，解方程 $x^2-3x+4=0$ 时得到的根是 $x=1.5\pm\sqrt{2.25-4}$。由于根号里的数是一个负数，所以他被这个“怪物”弄得不知所措，于是他发表声明称这个根是不可能的 [1]。

可以说，婆什迦罗与许凯都“发现”了虚数，但是他们没有认识到这将导致一种新的数的诞生，从而放弃了这个重大的机会。

时间大约又过了 60 多年，1545 年意大利数学家卡尔达诺（G. Cardano, 1501-1576 年）在他的著作《大术》中记载了如下的乘法运算：$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$。这是世界数学史上第一次明确表示虚数的符号，也是虚数第一次的数学表示方法。当时，他用的符号是：RM: −15. 其中的 R 表示根号，M 表示负数符号，它宣告了虚数的诞生。卡尔达诺明白一个负数开平方是不允许的，所以无法解释负数的平方根是不是“数”，于是他在书中写到：“不管我的良心会受到多么大的责备，事实上 $(5+\sqrt{-15})$ 乘以 $(5-\sqrt{-15})$ 刚好是 40”！他称 $\sqrt{-15}$ 这个数为“诡辩量”或“虚构的”量。他认为一个正数的根是真实的根，而一个负数的根是不真实的，虚构的，或者是虚伪的数，虚构的数，也是神秘的数。这就如他在书上所写的：“算术就是这样神秘地进行，它的目的正像人们说的又精密又不中用。”[2]。这里，不管卡尔达诺对虚数的认识是如何的肤浅，但他毕竟是世界上第一个记述了虚数的人，也可以说是他“发明”了“虚数”。

到了 16 世纪末，法国数学家 F. Viete 和他的学生 T. Harriot 可以说是首先“承认”复数的数学家。虽然他们也认为应该把虚数排斥在数系以外，但在碰到解方程一类问题时，可以“开通一点”, 把它当数来对待。

几乎是在同时，意大利数学家邦别利登上了虚数的舞台。1572 年，邦别利在解三次方程 $x^3=7x+6$ 时也碰到了虚数的问题，但与前人不同的是，他认为，为了使方程存在的这种根得到统一，必须承认这样的数也为该方程的根，而且类似的数都应该得到承认，让它们进入数的大家庭，他还创造了符号 $R[Om9]$ 表示虚数 $\sqrt{-9}$ [3]。

虚数就这样在承认与不承认之间一直被拖着，时间很快就进入了 17 世纪，1629 年，荷兰数学家吉拉尔（A. Girard, 1595-1632 年）在他的《代数新发明》一书中引入了 $\sqrt{-1}$ 表示虚数（虚单位），而且认为引入虚数不仅对于解方程是有用的，而且能满足一般运算法则。

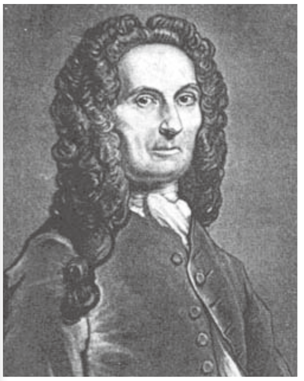
第一个正确认识虚数存在性的数学家当属法国著名

对复数使用和研究做出贡献的数学家

法国人 F. Viete (1540-1603)

荷兰人 Albert Girard (1595-1632)

法国人笛卡儿 (1596-1650)



法国人 De Movire (1667-1754)

哲学家、数学家笛卡儿。虽然他在开始时也认为负数开平方是不可思议的的事情，但后来他认识了虚数的意义与作用，开始公开为虚数辩护，并第一次把方程“虚构的根”之名称改为“虚数”，以与“实数”相对应。他也称类似于 $a+bi$ 这样的数为“复数”，这两个名称一直使用到今天。特别是，他用法文 imaginaires 的第一个字母 i 表示虚数 $\sqrt{-1}$。于是虚单位诞生了。

到了 18 世纪，虽然对于复数是不是数还存在很大的争议，但它却已经进入了数学的运算之中。微积分发明人之一的德国数学家莱布尼茨就应用复数进行有理函数的积分运算，尽管他并没有明确承认复数。特别是在这一阶段发现了许多漂亮的复数公式，使得人们对它充满了好奇，吸引人们更多地去研究它。如下就是一些著名的公式：

1722 年，法国数学家棣模佛（De Moivre）发现了著名的棣模佛公式：

$$(\cos x+i\sin x)^n=\cos nx+i\sin nx\ .$$

1743 年，瑞士数学家欧拉发现了著名的欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x\ .$$

由欧拉公式，我们立即可得

$$e^{i\pi}+1=0\ .$$

这一公式真是太神奇了！它把自然数 e，圆周率 π，虚单位 i，实单位 1 以及数 0 联系在一起。这是自然界的奇妙，还是数学的奇妙，我们无从而知。但这一公式确是造化弄人，妙不可言。

1777 年 5 月 5 日，欧拉在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中，公开支持 1637 年笛卡儿用字母 i 表示虚数 $\sqrt{-1}$ 的思想 [1]。可惜的是，这一思想同样没有引起人们的注意。

与此同时，许多数学家希望找到虚数的几何表示，特别是像实数那样在数轴上找到点与之对应。第一个作出这种努力的数学家是牛津大学的数学家沃利斯（J.Wallis, 1616-1703）。虽然他并没有解决这一问题，但他确实在这方面付出了努力。

真正解决了虚数几何表示的数学家首先应是丹麦业余数学家、测绘员韦塞尔（C. Wessel），他在 1797 年向丹麦科学院递交了题为《关于方向的分析表示：一个尝试》的论文，在坐标平面上引进了实轴与虚轴，从而建立了复数的几何表示。韦塞尔发现，所有复数 $a+bi$ 都可以用平面上的点来表示，而且复数 $a+bi$ 与平面上的点一一对应。这样一来，复数就找到了一个立足之地而且开始在地图测绘学上找到了它应用的价值。但同样地，他的思想也没有引起注意。

与此同时，爱尔兰数学家哈密尔顿（W. R. Hamilton, 1805-1965）发展了一个复数的代数解释，每个复数都用一对通常的数来表示：(a,b)，其中 a,b 为实数。哈米尔顿所关心的是复数的算术逻辑，而并不满足于几何直观。他指出：复数 $a+bi$ 不是像 1+2 那样意义上的一个加法或求和，加号在这里仅仅是一个记号，不表示运算，bi 不是加到数 a 上去的。复数 $a+bi$ 只不过是实数的有序数对 (a,b)，并给出了有序数对的四则运算：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$$

同时，这些运算满足结合律、交换率和分配率。由此，复数被逻辑地建立在实数的基础上，而且事实上已经是实

瑞士人欧拉(1707-1783)

丹麦人 Wessel (1745-1818)

爱尔兰人哈密尔顿 (1805-1865)

德国人高斯 (1777-1855)

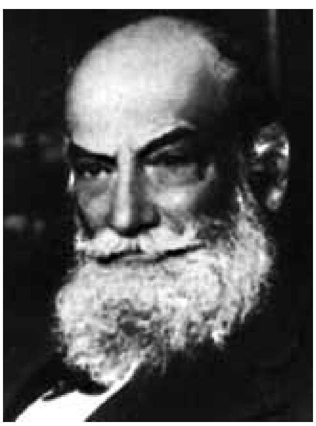
数系的推广。

1831 年，数学王子高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）又一次清楚地表示复数的几何形式，并且指出："迄至目前为止，人们对虚数的考虑依然在很大的程度上把虚数归结为一个有毛病的概念，以致给虚数蒙上一层朦胧而神奇的色彩。"[4] 他支持笛卡尔、欧拉等人用 i 表示虚单位的意见。由于高斯在数学界的地位与影响，也由于复数长时间的发展，数学家们从此开始逐渐承认了复数。但是，并没有真正从思想深处解决虚数的地位问题。对它仍然存有疑虑，仅仅把它看做是一个"符号"。

复数在几何上找到了它的位置以后，数学家们对它的研究就多了起来。18 世纪末，以欧拉为首的一些数学家，开始发展一门新的数学分支——复变函数论。19 世纪以后，由于法国数学家柯西、德国数学家黎曼、魏尔斯特拉斯等人的巨大贡献，复变函数论取得了飞速的发展，并且广泛地运用到了空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理学等方面。

真正把复数应用到工程部门并取得重大成就的是俄罗斯的"航空之父"尼古拉•儒可夫斯基（1847-1921），1890 年他在俄国自然科学家会议上作了《关于飞行的理论》的演说。之后他研究了围绕和流过障碍物的流体运动，并于 1906 年发表了论文《论连接涡流》，创立了以空气动力学为基础的机翼升降原理，找到了计算飞机翼型的方法。而这一切都依赖于复数与复变函数论。

从此，复数有了用武之地，也就正式获得了承认。



俄罗斯航空之父儒可夫斯基利用复数变化找到了计算飞机机翼的算法

2 复数的文化意义

复数的诞生，在人类历史文化进程中具有重要意义，特别对人类关于数学的认识具有重要的影响。

我们先来看在复数以前人们对于数以及数学的认识。在复数以及非欧几何诞生以前，人们总把数学与物理、天文等自然学科一样看待，认为数学也是自然科学的一部分，它的定理就对应着真实的自然规律。但是，复数的诞生，这个虚无缥缈的"i"明明是人们为了解决负数开方问题而引入或说创造的"数"，现在却找到了巨大的用途。由此也就引起了人们对数学的更深层次上的思考。再加上 19 世纪非欧几何的诞生等一系列重大数学成果的产生，促使人们对数学的本质问题进行深入探讨。

要考察复数的意义，我们就必须考察数学与数的本质。恩格斯曾经说过，"数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的，最简单的说，是研究数与形的科学"。由此，数学应该是与实践、经验密切相关的，也就是数学是反映客观实在的。那么，数学是如何反映客观实在的呢？首先，数学在初始阶段虽然也是以现实世界的空间的形式与数量关系为研究对象，但随着数学的进步，在古希腊时就已经把这些材料对象"表现于非常抽象的形式之中"，其目的就是为了"能够在其纯粹状态中去研究这些形式和关系，那么就必须完全使它们脱离其内容，把内容放置一边作为不相干的东西，这样我们就得到没有面积的点，没有厚度和宽度的线，各种的 a 和 b，x 和 y，常数和变数"[5]。所以，

数学虽然也是以现实的材料作为研究对象，但由于它的研究方法——抽象性，所以在考察对象时已经完全舍弃了其具体内容与质的特点。由此可知，数学是不同于其它自然科学的。其次，数学抽象方法的特殊性还表现在它具有的特殊意义，“尽管一些基本的数学概念是建立在对于真实事物或现象的直接抽象之上”。“数学中还有一些概念与真实世界的距离是如此之遥远，以致常常被说成‘思维的自由创造’。由于这些远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌现出来的概念渐渐取代了直接观念化的对象，数学有时又被称之为创造性的艺术”。[6] 如此，如虚单位“i”等人为的数学对象就是在这样的“间接”抽象之上——为了运算的顺利——而被创造出来的，并且随着数学研究的深入，越来越多类似于虚单位“i”这样的人类创造物逐渐成为数学的主要研究对象，由此也就确定了数学的文化性质。

复数、四元数、非欧几何等一系列事件，接连冲击着人们从古希腊就形成的“数学是与客观规律以及真理等价的”观念，从而为人们深入思考数学的本质带来了机会。而这一探讨的结果就是颠覆了人们两千多年来对于数学固有的认识，促使人们认识到数学与物理空间有着本质的区别：数学是人们的创造物，数学是人们创造出的一种用于描述自然现象的语言，或者说数学是文化。“数学可以是来自经验启示的一种创造，但它并不等于客观世界的规律”。[7] 由此，数学就失去了其天然的真理性，而只留下其文化的本质。

数学真理性的丧失[8]，带来的是人们思想上的革命，认识上的革命。过去，由于认为数学是以客观经验作为基础的，数学定理就与客观规律、客观真理完全等同起来；其次，也正因为这种认识，使得人们的思维与数学创造性被严格局限于直观与经验之中。现在，由于数学的文化性质，人们就无需再顾忌数学的经验性，而可以展开思维的翅膀，进行更为自由的、广泛的、更为理想化的创造性研究。再次，数学丧失了真理性，也就不能再与物理、化学、天文学等自然科学等同了，就必须从自然科学中分离出来。数学从自然科学中独立出来，既不意味着它割裂了其与自然科学两千年来形成的血肉联系，也不意味着数学会因此迷失方向而陷于停顿状态，而是有了其特有的文化精神。此时，数学的研究一方面继续受到来自于自然科学与社会实践提出来的问题的驱动，而另一方面是受到数学自身发展的驱动；数学的研究范围、研究对象更为广阔，动力更加充分。数学不再是科学的化身，而是要为科学提供语言、方法和工具，提供各种各样的模式供科学，包括自然科学、社会科学与人文科学选择；进一步地，它要为人们提供数学的理解方式和思想观念。

由上可知，复数、非欧几何与哥白尼的日心说，牛顿的引力定律，达尔文的进化论一样，对人类认识论、思想的进步产生了巨大的影响。遗憾的是，这一事实在一般思想史上却没有受到应有的重视。

作者介绍：

薛有才，毕业于山西师范大学数学系，数学教授。主要研究方向为计算数学，数学教育，科学技术哲学。曾在国内外学术刊物上发表学术论文 150 多篇，出版《数学文化》等大学教材、专著 10 余部。

参考文献

1. 梁宗巨：世界数学史简编。辽宁人民出版社。1988 年，149-150 页。
2. M. 克莱因：古今数学思想（第一册）。上海科学技术出版社，1979 年，294 页。
3. 鲁又文：数学古今谈。天津科学技术出版社，184 年，117 页。
4. 〔美〕莫里兹编著，朱剑英编译：数学家言行录。江苏教育出版社，1990 年，96 页。
5. 恩格斯：反杜林论。人民出版社，1956 年版，37 页。
6. 郑毓信：数学教育哲学。四川教育出版社，2001 年，55 页。
7. 郑毓信：数学文化学。四川教育出版社，2001 年，216 页。
8. 克莱因：数学：真理性的丧失。湖南科技出版社，1997，89 页。

数学的发端和演变

曹之江

1

今日的数学，已是一个无比庞大复杂的知识体系，它的思想与方法的触角已延伸到社会各门科学技术与人们日常生活的一切领域，成为了人类社会生活中一个不可或缺的内容。现在的它，已被中外各国的教育体制一分为二，即初等数学与高等数学。所谓初等数学，粗糙地说就是指十七世纪英国牛顿在创立“流数与反流数”(即微分与积分法)之前，人类所积累的数学知识，也就是我们常说的古典数学。现在人们已把这些古典数学在做了规范化处理以后编入了中小学课本。至于在牛顿之后近三、四个世纪中发展起来的现代数学，特别是以微积分为主体的高等数学，业已成为理工科大学的必修主课。因为一切工程技术人员都要以高等数学作为叙述与推导工程技术原理、进行复杂的工程设计与计算的手段，而各学科的科研人员，则更需要应用现代数学对各类物质运动进行表述、计算以及构建各种数学模型。至于大学里的非理工专业，尽管不需要将数学直接应用到本专业，但据笔者所知，至少在中国，他们也已开设了数学课程供学生选修。这里我们还需要提到自十九世纪发展起来的非功利性抽象数学，即现在被人们称为“核心数学”的理论数学，它们现在虽尚未得到直接应用，且远离人们的直接经验，但也为各综合大学数学系师生和各有关研究所的专业人员所专攻，并取得了很大成绩。综上所述，我们可以看出，数学业已成为当代教学与文化不可或缺的组成部分，是当代人类文明的支柱力量。

2

我们在前面的文章“漫谈数学文化”（参见《数学文化》2011/ 第 2 卷第 1 期第 59 页）中已经提到，数学不以现实世界中任何物质内容作为自己的研究对象，具有一种超现实性的品格。若是如此，那么数学的学术应当是一种无源之水和无根之木，它如何又能发展成今天那样的一个无比庞大的知识体系呢？它如何又能够成为一种社会的科技文化和人类文明生活的支柱呢？因此，数学究竟是一种什么样的学问，是我们必须要弄明白的。为了说明这一切，我们需要从初等的、古典的数学谈起。

人类在形成与创立的初期，首先就需要一种在生产实践和交际中使用的语言。当今天的小学生，他们在数学课堂上首先碰到数字 1, 2, 3, ……，这些我们今天称之为自然数的符号，虽然它们并没有单位、量纲，并不专指任何具体事物，以示一种抽象的东西，但是，当学生们初次见到了它，仍是那么的亲切与自然，他们想到的是一匹马、两头牛、三棵树等等。这些数学符号原来不过就是他们的一种特殊的生活语言。这些数字后来尽管衍生成为小数、分数，甚至成为代数课程中的更抽象的字母符号 $A, B, C, \cdots$，X, Y 等，他们仍然感到这一切都是生活中的数量描述，完全符合自己的经验，而并不感到陌生。这些数字，它们虽然不是专指某类特殊物质，但却可适用于定量描述一切物质，它们虽然是描述事物的语言，但这种语言是定量的、有特殊性、具有某种转换演算的技巧。因此，人们把它专列出来成为一种训练的技

术。这也许是古典数学的最初来源与发端吧。在这里尚需指出的是，在古典数学中，除了事物的数量关系描述以外，尚包含着一种形态描述，这就是初等几何的来源。这是出于古人对丈量土地和计算、测量多种器物而产生的。在初等几何中我们见到最简单的事物的抽象形态就是直线和圆周，以及由它们所界定的几何形体，如多边形、球、各种锥体等。这些对事物形态进行简单描述的语言，它们也与对事物进行定量描述的语言一道，归入到朴素的古典数学内容之中。

3

然而，到了中世纪，资本主义的产业革命与生产关系在欧洲已初露端倪。以粗浅的感性经验为基础而综合起来的知识，已不能满足人们日益增长的需求。人们已不再完全相信由上帝所赐予的直接经验，而认为一切都需要理性的归纳分析来认识事物的本质。在这个时代里，出现了如哥白尼、伽里略、开普勒、费尔马、笛卡尔等伟大的先驱，形成了人类理性智慧大放光芒的时代。这时，在数学上也开始不限于对量的那种孤立、静态的描述，而进入到了对量进行动态描述时代，并出现了微积分的方法，从而使得理性主义在数学中大放异彩。在朴素的古典数学中，一个字母所代表的量是静态的、孤立的，在方程式中出现的也不过代表未知的孤立的量而已。而我们今天所需要的是，要描写天上日月星辰的运动、大海中航船的位置、生活中各种量之间的变化依赖关系等，于是在数学中出现了变量与函数的概念。

在人类的语言中，量的概念和符号由静态发展到动态，这在数学上就产生了一个划时代的变化。在变量数学中，数就演变成了函数——变量之间的一种依赖关系。人们最初所理解的函数只不过是一种公式或一种演算，如 s=vt（距离等于速度乘以时间），A=BH（矩形面积等于底乘以高）等。这里 v 与 H 若是常数，人们就可发现，这公式所表述的，只不过是最简单的变量关系（正比关系）。若把函数视为是一种演算，则我们早先所知道的演算只是加减乘除而已。因此它们所经过重叠运算所能得到的函数，则是多项式，或两个多项式相除所得的有理函数。我们在后继的学习中就会发现，这种有理函数虽然也有万万千千，但它们却远不能去表述自然界的一切现象。例如，地球围绕太阳的运动、一杯高温热水的冷却过程等，都是不能用有理函数来表述的。因此为了定量描述自然界的一切现象和过程，我们就必须冲破由四则运算来构造函数的束缚，这就是后来人们创造出各种无理函数和超越函数的由来。

4

上文提到人类社会发展到中世纪，已不能满足于用朴素的古典数学语言去静止的描述世间万物，而必须要有一种新的数学语言去动态的描述自然界的万物及其运动。而这个新数学，是必须要以人的理性智慧去创造的，这里就包括要去创立一个足以描述各种物质运动的新型函数体系及相应的演算方法。这是一项与人类的现代科学思想史同时发展壮大起来的极其浩大而复杂的工程。在这项工程中，伟大的牛顿与莱布尼兹走出了决定性的一步。1687 年，牛顿在他的“自然哲学的数学原理”一书中，同时提出了全新的动力学理论与相应的“流数”法（微积分法）。牛顿在这里所创立的微积分方法是为了描述与计算他的新动力学而提出的，所以其后的两个世纪中，微积分方法只是作为各种自然科学与工程科学的一种技术手段而存在，它只是各种物质科学的一种附庸，没有自己的独立地位，更没有严密的逻辑系统。当时的科学界，人们只是忙于应用微积分方法去开疆拓土，建立本门学科的基础与应用理论，没有人去关心并完善微积分学本身的基础，因此微积分在创立的两个世纪内，常常不能做到自圆其说，有时还产生很大的矛盾。在十八世纪，有人竟笑话牛顿的“流数”与莱布尼兹的“微分”是“逝去了量的鬼魂”，而无人能够起来反驳，从而导致了所谓的第二次世界数学危机。而风雨飘摇中的微积分由于在各学科中具有有效的应用得以保存发展。

到了十九世纪科学家们才回过头来整理紊乱的微积分学的基础。这里特别值得提出来的是法国科学家柯西（当时因为数学还不是一门独立的学科，因此尚没有纯粹的数学家），他整理了一个完整的微积分学的理论系统，这个柯西系统一直延用至今。然而，当时的学术界认为微积分学要做到逻辑上的完全严密化，首先必须做到实现功利化。而当时微积分学是没有功利化的，要实现功利化的最大难处是它的论域问题，也就是它立论的数值基础。而我们从古典数学以来，所具有的数域是上帝所赐予的自然数域，以及它的衍生物小数、分数所构成的被人们称之为有理域的数域。这个有理数域大可以测量和计算天体之间的距离，小可以测量原子的直径。人们每天都要接触与应用它，是十分得心应手的工具。然而，在理论上它却是不严实的，在数学上称之为不完备或不连续的。早在纪元前五百年，古希腊人就发现，单位正方形的对角线长度是不能用数（有理数）来表示的，这就是说我们若将有理数都标到一条无限长的数轴上，则在单位正方形对角线的长度的点上（现在人称之谓 ），就是一个空隙。人们因为不能理解，就把这种不能用有理数来表示的几何长度，统称为无理数。后来人们证明了，在数轴上这种无理数何止千千万万！二十世纪初，有一个法国人勒贝格，他发明了一种测量数轴上任何一个数集合的容积尺度。他发现在任何有限闭区间（a, b）上，所有无理数的勒贝格尺度是 b-a，即区间长度，而所有有理数的尺度是零。这说明有理数尽管密密麻麻，无

处不在，但它却少到在区间上不占任何地盘，而无理数却占到整个区间。这种情况说明了所有的有理数在数轴上竟不占地位，因此将它铺在数轴上，几乎处处都是千疮百孔的。这种情况在数学上就称之谓不完备的或不连续的。而我们的微积分学，不能建立在千疮百孔的有理数域上，必须建立在完备的或连续的、严实的数域上。因为只有在这样的数域上，它才能建立严密的极限理论和包含各种超越函数的体系，它才能实现公理化和理论上的严密化。

5

上面提到的，我们要在变量数学中建立的新数域就是所谓的实数域。这个实数的建立，在理论上是非常抽象和玄虚的，很难为人们所理解。我们在这里只能够把它们说成为与数轴上的点一一对应，而且严实无隙的数集，是它实现了几何直线与数系的和谐统一。这个和谐统一不是上帝所给的，而是人类自己用理性智慧创造出来的异彩。然而，我们应该说，这实数是不“实”的。数学家们把它的主体无理数说成是“无限位的不循环小数”。而一个“无限位”的数是人们完全不能去把握的，因此对于人们来讲，这个实数不是一种实在，而人们日常实际接触与使用的数仍然只是有理数。于是实数只是人们一种理性上的实在。这样看来实数及建立在其上的数学都只是在逻辑演绎上有价值，而人们在实践上应用的仍是有理数。

在数学上，较之于有理数系，实数则是多了一个完备性和连续性（完备性、连续性在数学上是完全等价的命题）。然而，要在有理数公理上增加一个完备性公理，从而构造出一个新的数系，并证明这个新数系的实在性和相容性，这是谈何容易的事！而这件伟大而艰巨的事却在十九世纪下半叶由许多数学家们去完成了。这里我们需要特别指出的是德国的康托与戴德金。康托把有理数的基本列（一种无限浓缩的数列）称之为实数，戴德金则把有理数的分割称之为实数。他们二人都各自建立了构造实数的代数元素，赋予并证明了它们具有有理数的各种公理性质。此外，还特别证明了它们具有完备性。这样他们就完成了实数系的建立，在历史上称之为一维连续统理论。连续统理论的建立不仅在数学上，而且在科学史上都是一件划时代的大事，它不仅使数学摆脱了对物理学和其他科学的附庸地位，成为了一门独立发展的大学科，而且在思想上也深深地影响了其他科学的发展。在这里我们还应该讨论一下在实数上兴起来的微积分科学是如何应运而生的，它的内容、方法及意义等，但限于篇幅，就不能在本文里讨论了。

作者介绍：

曹之江，教授。1934 年 11 月出生于浙江省上虞县。1953-1957 年就读于北京大学数学力学系，毕业后志愿建设边疆，到内蒙古大学任教。任教期间，曾先后任内蒙古大学数学系主任、内蒙古大学副校长、教育部数学力学教学指导委员会理科数学组组长等职。2003 年被教育部授予首届国家级教学名师奖。

奥博沃尔法赫数学研究所全景

黑森林中的数学胜地

简记奥博沃尔法赫数学研究所之传统与文化

欧阳顺湘

我曾有幸在一些著名的数学研究所或中心短期学习。它们各具特色，总是我心中美好的记忆。德国波恩大学豪斯朵夫（Hausdorff）数学所隐于泊波尔斯多夫宫（Poppelsdorfer Schloss）前长长的草地边上一典雅的小楼，犹记行走在楼梯的木板上会咯吱作响。我造访过英国剑桥牛顿（Isaac Newton）数学所，它和图书馆等许多崭新的小楼组成的建筑群（剑桥数学中心）座落在“乡村”中，袭人的漂亮。我也到过意大利Cetraro掩于海滨山腰的国际数学暑期中心，那里盛开着烂漫的红花，整山遍满着绿色的葡萄架；特别令人难忘的是中、晚餐要乘电梯下到深深的悬崖脚一临海小餐馆。而我最近前往学习了一周的德国黑森林中的奥博沃尔法赫（Oberwolfach）数学所无疑是其中极具魅力的一个。这里不但是一个清秀可人的胜地，而且也许是所有青年数学家一生中都值得去拜访一次的“麦加”圣地。

我第一次听说奥博沃尔法赫数学所是两年前有同事邀我一起申请去那

里学习，但我因故未去；后来有老师也建议我们应该去看看，还特别提到那里的图书馆。我且简记我所粗略了解的奥博沃尔法赫数学所，与广大数学爱好者一起来感受这个数学所的传统与文化。

今昔

奥博沃尔法赫数学研究所位于德国西南部巴登-符腾堡州（Baden-Württemberg）黑森林中小山村Oberwolfach-Walke上的一山腰。黑森林是德国最大的森林山脉（长约200千米，宽约60千米），山上森林密布，远望黑压压一片，因而得名。数学所德语名称为Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach，缩写为MFO。“Ober”在德语中有“上方、高处”的意思，所以该数学所也被人称为上沃尔法赫数学研究所。习惯上人们常以地名“奥博沃尔法赫”称呼它。

二战中期，德国为加强军事力量而创立了几个国家研究所。时任弗莱堡（Freiburg）大学校长、德国数学会主席的数学家威廉•聚斯（Wilhelm Süss）利用此机会于1944年创立了奥博沃尔法赫数学所。主要为了躲避可能的空袭，聚斯选中黑森林中一个为打猎者服务而建的小旅馆Lorenzenhof作为数学所。历经发展，数学所现在由三个主要建筑组成，一为宿舍楼（含咖啡厅），一为图书馆和会议厅，另一为较长期的研究人员的宿舍。

现在看来，选择这样一个至今仍远离尘嚣的地方反而成为奥博沃尔法赫的一大特色。短期中和志同道合的同事独享这里的孤独，该是很惬意的事情。而且数学所事实上并没有为纳粹服务，却通过数学家的合作，在战后为改善德国与其他国家破缺的关系提供了帮助。关于数学所的详细信息和历史，可以参考其主页[1]以及文[1, 2]等资料。


Oberwolfach-Walke 小村

学术

奥博沃尔法赫数学所与其它很多数学所，如德国波恩的马克斯•普朗克数学研究所（Max-Planck-Institut für Mathematik）不同的是它没有永久固定的研究人员（除主任外）。奥博沃尔法赫只有少数短期研究人员及部分工作人员，如“Research in Pairs”（RiP）项目资助各学科二到四名来自不同地方的学者结伴在奥博沃尔法赫进行为期两周至三个月的合作研究。奥博沃尔法赫主要以会议的方式逐周接待访问学者。通常如果研究人员固定，则研究兴趣也往往局限于某些方向。与奥博沃尔法赫数学所研究人员的流动相应的是它的研究兴趣的多样性：不但涉及数学各学科，也旁及和数学有交叉的诸如物理、生物、医学以及天文等领域。

从1949年到1953年奥博沃尔法赫每年仅组织三到五次会议。后来随着条件的改善，特别是自1969年新建了客房后，会议数逐渐增多。现在除圣诞和新年假期外，每年52周中有50周在组织会议。迄今为止，它已经组织了好几千次会议。奥博沃尔法赫的网页上列有它历年所组织的会议的详细信息。基于一些会议，一系列有影响的论文集等著作也随之出版。

奥博沃尔法赫的住宿每周可以容纳55-60名访问者。其中除了最多有10名是参与RiP项目的研究员外，其它人（约60%是来自德国以外的地区）都是受邀前来参加每周的会议的。

奥博沃尔法赫因人数的限制，因此每周或组织一个共约45至48名专家参加的研讨会（Workshop），或三个平行的16人左右的迷你型研讨会（Mini-workshop），或两个约24人的讨论班（Seminar）。此外，每年春、秋两季（一般分别在4月初和10月初）各举行一次45人参与的“学习群”（德语“Arbeitsgemeinschaft”，英文“Study Group”）的会议。

[1] 主页为 http://www.mfo.de

Wolfach 小镇

沃尔法赫的街道

沃尔法赫的小河

奥博沃尔法赫还有一个针对巴登-符腾堡州的中小学教师和图书馆员的培训周。同时，它还为准备参加奥林匹克数学竞赛的学生进行为期一周的最后训练。

一般各领域的数学家可以向奥博沃尔法赫提前申请组织会议。对各会议感兴趣的数学家，除学习群的活动是向组织者申请外，都需直接向数学所主任申请。

研讨会给专家们提供机会报告自己研究的最新结果和新方法，并开启将来的研究计划。迷你型研讨会的主要目的是刺激新的研究：如联合研究力量对某问题进行攻关，或共同引领特别有趣的发展。为这样的目的，小型团队往往较合适，而年轻人作为新鲜血液也被强调给予机会来参与甚至组织这样的活动。

我所参加的是一个讨论班，类似于一个短课或暑期学校。两位组织者系统地介绍马氏过程遍历论以及他们在该领域取得的最新成果。他们同时还邀请了 3 位相关的专家来做报告。我们学习时间安排较紧，除周三下午外，每天安排有共 5 个多小时的报告，且下午开课前为自由讨论、答疑时间。

学习群的传统自上世纪 50 年代就开始了。其想法类似于布尔巴基讨论班（Séminaire Bourbaki）, 选定某论题，以讲课的方式来学习新近由其它数学家在该领域取得的结果。例如，2009 年度春季学习群的主题是“最优运输”[2]。一般参与者向组织者申请加入，而第 $n+1$ 次的组织者及主题则由第 n 届活动的人员投票推荐。

奥博沃尔法赫将它比作流水式热水器（a continuous-flow water heater）。它将数学家邀请来，提供理想的条件，进行密集的研究活动以影响、刺激各研究领域的发展。对于年轻的博士生，这里是很好的新兵训练营。

[2] 2010 年菲尔兹奖获得者法国数学家 Villani 是这方面的专家，撰有一本 990 余页该方向的专著。

旅途

一般每周日下午各地与会人员乘穿行在山谷中的火车，先到达小镇 Hausach 或再前行抵达沃尔法赫（Wolfach）。我是从比勒费尔德（Bielefeld）一路南行经过 6 个多小时的火车转乘先到沃尔法赫。沃尔法赫实在是一个小得可爱的小镇，有着一条不长且整洁古朴的步行街；与此相垂的是一条山谷小河，民舍傍河而筑。这里通行的列车车厢不长，铁轨也是来往共用。未到奥博沃尔法赫，即可以预先感受到数学所的宁静。沃尔法赫距离数学所约 5 公里。到访者也可以乘一小时一趟的公交车到 Walke 站再步行上山或坐出租车。与会的人员一般在周六上午离开。我参加的讨论班的与会人员离开时，奥博沃尔法赫请出租车按各人的离开时间分批免费接送到火车站。据最新的通讯消息，从 2011 年起奥博沃尔法赫对所有来访者提供免费的出租车接送服务。

资助

奥博沃尔法赫提供免费食宿。我这次行程，因西门子基金对 2008 年夏到 2013 年夏期间奥博沃尔法赫讨论班的支持，还可以申请到 200 欧元以内的旅费资助。奥博沃尔法赫作为一个非盈利机构，也接受各种赞助。图书馆里挂有小纪念牌说明哪段时期何公司或基金提供了资助。有的国家的相关机构也有专项经费设在奥博沃尔法赫以资助其国家的数学家到这里进行研究和学习，如美国国家自然科学基金（面向青年数学家）、日本数学会（青年数学家优先）。我看到美日的数学家能有这样的资助的说明时，自然想起有关陈省身先生的一个故事。陈先生把获得“邵逸夫科学奖”的 100 万美元奖金捐给了一些国家的数学所，附信说：“希望将来在中国数学家到贵所时能给以更多的照顾”（见演讲 [3]）。

住宿

住宿楼

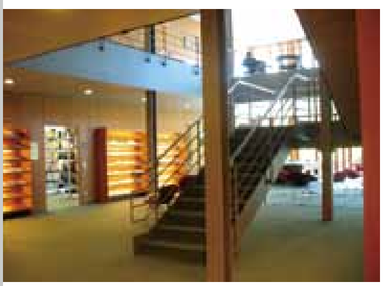
住房

国际象棋

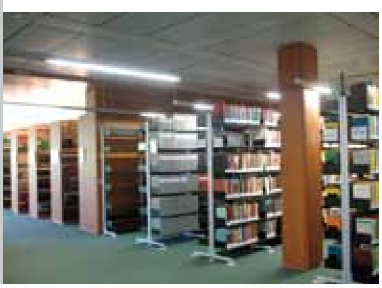
图书馆里外

外景

一个报告厅



楼梯



部分藏书

食宿

最早期的到访者的食宿相当简朴，须自带伙食，并且要亲自收集柴火。现在的奥博沃尔法赫仍有着家的气氛。住宿宽敞、简洁而舒适；红色的地毯垫出满屋的温暖。住宿楼层里还有巨型国际象棋摆在地面。一日三餐都在底层的咖啡厅。除早餐较固定外，午餐、晚餐的食物几乎每天每次都不雷同，可以尝到许多别具特色的食品。很感谢数学所为数不多的工作人员。

图书馆

图书馆一共两层，上层主要是报告厅，下层主要为图书收藏与研究、文娱场所。图书馆里面有黑板、书桌、复印机和计算机等设备；也有运动、娱乐场所和器材，如乒乓球室、台球桌以及置有钢琴、提琴等乐器的音乐室。

图书馆主要收藏数学相关的文献，其量之丰，去访问过的人无不称赞。据奥博沃尔法赫网页的介绍，按美国数学会的评价，它的图书馆排名第十。它目前收藏有 45,000 多本书，27,000 多卷期刊，且订有 500 多种纸版期刊以及 3,000 种电子期刊。与其它图书馆开始更多地转向电子期刊订阅相比，奥博沃尔法赫订的纸版期刊是很多的。图书馆这样良好的基础设施，也极大地吸引着数学家们前往合作研究：不但无需携带所需资料前往，或许还可以找到以前较难寻获的文献。

图书馆的另一特色收藏是许多精心挑选的数学软件。在现代数学研究和教育中，数学软件所起的作用已经不亚于各种文献。该收藏的目的是建立一个永久的数学软件基地，使得软件的查找、使用和评价等更加有效。读者在其主页[3]可以浏览各分类介绍的软件。

图书馆内设施

讨论用黑板

乒乓球室

音乐室

图书馆的咖啡机免费使用。我在奥博沃尔法赫的留言薄上看到，此前有不少人留言建议添置咖啡机；正佐证了厄多斯（Paul Erdös）的名言“数学家是将咖啡转换成定理的机器”。其它饮料，如矿泉水、啤酒等只收很少的费用。

[3] 主页为 http://orms.mfo.de

咖啡厅、餐桌和座位

咖啡厅

咖啡厅

餐桌

餐巾袋

交流

学科交叉与合作研究在现代数学的研究中越来越突出。虽然互联网的发展使得交流越来越容易，但数学家们还是很乐于面对面的交流，因为这样的交流所得有时可能比书斋中独自冥思苦想更有效。此外，数学家们从初次见面到相互认识、成为朋友也往往为将来的合作奠定基础。

我参加的那次会议有来自德、英、美、韩国以及俄罗斯、瑞典等国的；来自中国的一共有 4 人（都在欧洲学习）。宿舍没有电视、电话，也没有网线，而且咖啡厅的无线信号在房间中也很弱。其假设是与会者都在咖啡厅互相讨论，而不是留在各自房间里。咖啡厅晚上放有很多水果、面包等，都免费自用。下午正式会议之前为蛋糕、咖啡时间（这也是很多数学所的习惯，如 Hausdorff 数学所下午有休息时间，提供免费点心）。

一起就餐是很好的交流机会。很多西方大学的研究组都有一个很好的传统——相约一起前往午餐。奥博沃尔法赫就餐时的座位分配很能促进交流。除早餐按个人习惯或早或晚外，中餐、晚餐时间统一且座位是随机安排的。就餐时须找到带有自己名字标签内盛餐巾的小布袋入座，其目的是尽量使不同的人有机会同桌共餐、互相了解。

远足

会议从周一到周五上下午一般都安排有报告，但周三下午是传统的远足活动。愿意一起远足的人，中饭后不久就要出发，凭借着一张简易地图，爬山、步行约两个多小时到达一个小餐馆。休息约一小时后，再步行回去。返回数学所时，灯火初上，已是晚餐时间。长途远足有益身心，还可以在一种更加开放的环境里互相交流。

周三下午的远足

林中穿行

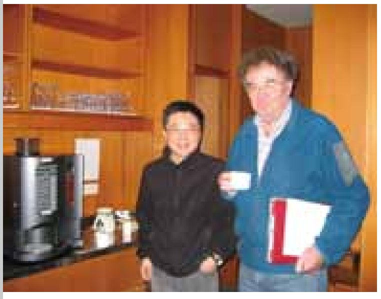
餐馆小憩

林中穿行

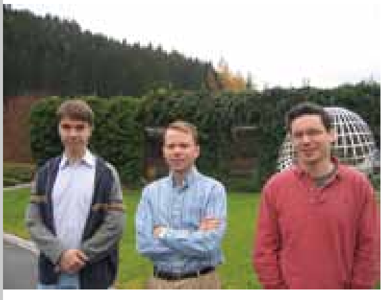
山顶风光

2010 年菲尔兹奖得主在研究所

林登施特劳斯（右）于 2008 年



吴宝珠（左）于 2008 年



斯米尔诺夫（左）于 2007 年

维拉尼（右）于 2002 年

年轻人

奥博沃尔法赫特别鼓励年轻人的申请。比如讨论班的主要参与者是年轻的博士生和博士后，并如前述还有旅费资助。目前奥博沃尔法赫各会议有特别的经费资助博士研究生。奥博沃尔法赫也提供短期的博士后职位给取得博士学位 5 年之内的博士，如“Oberwolfach Leibniz Fellows”。此外，针对年轻人还设有数学奖，著名的有奥博沃尔法赫奖，候选人的博士学位要求为 10 年之内取得的。因证明了朗兰兹纲领自守形式中的基本引理而获得 2010 年度菲尔兹奖的越南（/ 法国 / 美国）数学家吴宝珠（Ngo Bao Chau）即获得过 2007 年度的该奖。

开放的环境

奥博沃尔法赫所有住宿房间没有钥匙，离开房间不能也不用锁门。除了周六午后、周日午前这个数学所基本上没人的时间，图书馆、宿舍大门也都不锁。啤酒等部分收费饮料是各人自取，只在一纸上自行计数，离开前将钱放到一盒中结清即可。这样一种开放的环境，在这里是如此自然，不但是人与人之间相互的信任和尊重，也是促进彼此交流的催化剂。其实，与此类似，很多大学，不仅仅是数学系，许多人的钥匙是主钥匙，能开很多办公室的门。我们读下哈尔莫斯（Halmos）在他的数学传记《我想作数学家》中一段描述和评论（参考 [4]，原著第 130 页，译著第 168-169 页）就足以理解这样的传统的高贵了：

“系秘书给了我一把钥匙，一把主钥匙！它可打开 Eckhart 大楼中所有的数学办公室。这是一个古老而高贵的传统，增进了系里同僚间的气氛。我们都是学者，家庭中的一员，我们尊重他人的隐私，但正如一个家庭，我们彼此不设防。每个人的图书都对别人开放，如果我从图书馆借来一本杂志，你随时都可以来翻阅你要的文献。其它大学的访问学者可以在某人的办公室里躲上几个小时。主钥匙常被使用，但从未被滥用，这是一个很好的管理方法。”

数学家图库

奥博沃尔法赫维护着一个著名的图库 [4]，主要是著名数学家及数学活动的照片。这个图库基于 Konrad Jacobs 教授捐的他所收藏的大量世界各地数学家的照片，也包含了 George M. Bergman 等教授拍摄的数学家图片。奥博沃尔法赫现在不但公开征集数学家或数学活动的图片，而且自 1998 年开始就利用数学家来访的机会为他们摄影存档：包括全体参会人员的集体照和组织者的个人照片。譬如，在 2010 年数学家大会获得菲尔兹奖的四位数学家林登施特劳斯（Elon Lindenstrauss）、吴宝珠（Ngo Bao Chau）、斯米尔诺夫（Stanislav Smirnov）、维拉尼（Cédric Villani）都曾在这里留下身影。

手写的历史

手写的东西总是比计算机敲出来的亲切。奥博沃尔法赫有着一些与手写有关的有趣的传统：

1. 著作签名：参会的数学家被邀请在其被图书馆所收藏的著作上签名；

2.《摘要》与《问题》：咖啡厅里有两本厚厚的《奥博沃尔法赫摘要》(Oberwolfach Abstracts)、《奥博沃尔法赫问题》(Oberwolfach Problems)。前者记录每个会议的组织者手写的摘要及参会人员的签名；而后者包含有来来往往的数学家留下自己的问题，对前人的评论、问题做出的自己的注释和解答。即使在因特网已经使得这样的交流极其方便的情况下 [5]，这样一本问

[4] 主页为 http://owpdb.mfo.de

题集的存在至今还是很有意思的。

3. 建议簿：咖啡厅入口旁的书桌上有一本供来访学者留言的小册子。读者可以留下反馈、评论以及建议等。我看到的那本大约是从1986年开始记录的，其中不乏对数学所的赞扬，对工作人员的感谢，也有很多有益的建议以及有意思的对话。意见簿本身也构成奥博沃尔法赫历史的一部分。

Boy曲面

图书馆和宿舍之间草地上的有一由2厘米宽的钢片编成的Boy曲面模型。这个曲面很受欢迎，如现在用谷歌搜索关键词“Boy Surface”可以得到约28,400,000个结果。Boy曲面由德国数学家Werner Boy在他1901年的论文中作为实投影平面在三维空间中的浸入而首次构出。这原是Boy的导师希尔伯特留给他的作业（证明相反的结论）。

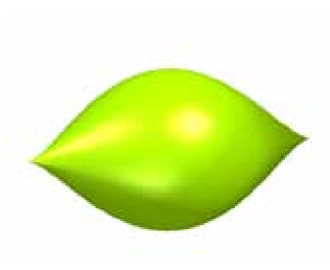
Boy并不知道此曲面的视觉呈现效果。直到1978年Bernard Morin才借助于计算机的辅助得以找到该曲面的第一个参数化表示。文[5]中介绍了许多曲面的参数表示及图形，其中包括Boy曲面，以及同为非定向曲面且同样有趣的克莱因瓶、莫比乌斯带的参数表示和图形。奥博沃尔法赫的这个模型建于1991年，具有三重旋转对称性且使得曲面的Willmore能量最小[6]。

漂亮的科普

奥博沃尔法赫数学所不但为数学家们的合作研究提供得天独厚的环境，也为普通大众走近数学而不遗余力。

从2000年开始德国每年确定一个主题，举办科学年活动以唤起公众，特别是年轻一代对科学的兴趣。2008年被定为德国数学年。奥博沃尔法赫为此策划了名为“IMAGINARY”[7]的流动数学与艺术展[8]。该展览以图片、互动和立体电影等形象直观的方式使公众能“看”到数学，并有许多数学家撰写的普及文章介绍数学背景（如[6]）。展览不但在德国各地展出过，还在加州伯克利、巴黎、维也纳和剑桥

Boy 曲面



柠檬

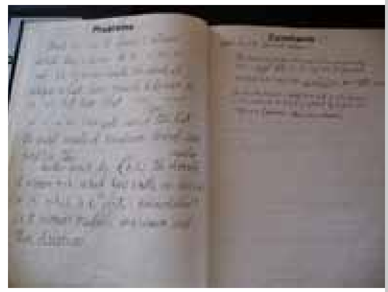
[5] 如在“Mathoverflow”(http://mathoverflow.net)，数学研究者可以讨论各自研究中碰到的问题；而在“Polymath”(http://polymathprojects.org)，数学家们则在积极进行大型合作。著名数学家如陶哲轩（Ter-rence Tao）等都积极参与这两个论坛。

[6] 有趣的是，我在的那周，另一个平行的讨论班主题即为Willmore泛函。

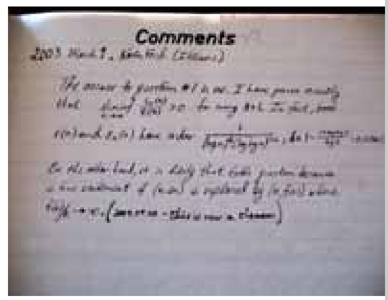
[7] 可以译为想象，或具双关含义的虚数。

手写的历史

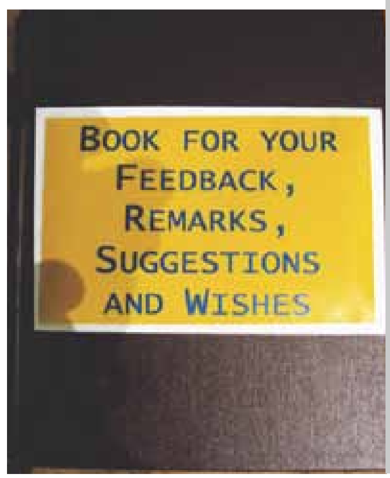
问题、摘要册



问题与评论

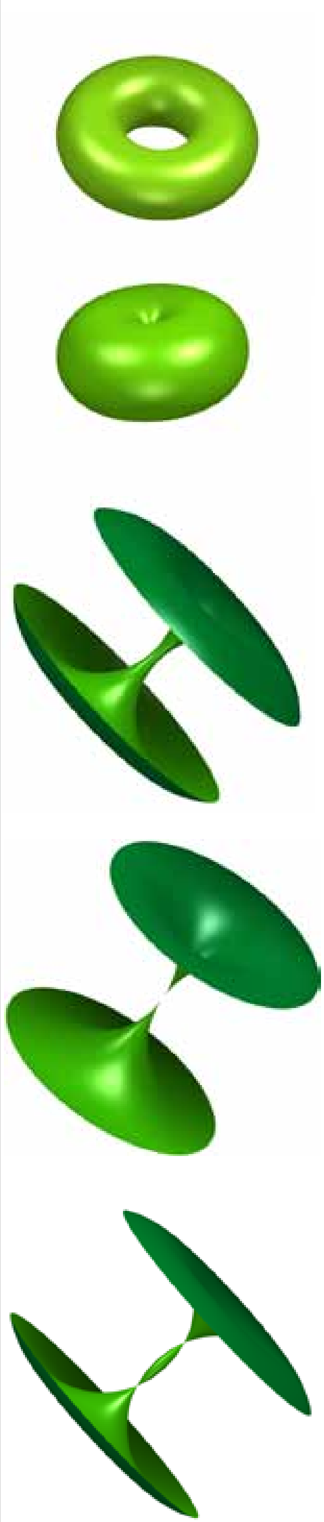


评论



意见簿

环面的变化



等地展出过。

展览中特别有趣的是一系列由各代数方程对应的各种形状的几何曲面，如海马、苹果、红心等形状优美的图形。同时它还提供得到这些曲面的软件 Surfer[9] 让参观者以“玩”的方式进行“几何”体验。例如，方程

$$1.2(x^2+z^2) = 5y^3(0.25-y^2)^3$$

的解 (x, y, z) 组成柠檬状的曲面。如读者希望看到更多图片，可以到其主页欣赏或参考 Surfer 的图库。他们也将部分曲面制成漂亮的海报出售。如我所在大学数学系的走廊即张贴了许多。

在 Surfer 中你不但可以对曲面进行着色、移动以观察曲面的各部分，还可以交互式地自行探索各种代数方程所对应的曲面以及在系数变动情形下曲面的变化。左图为 Surfer 图库的中“环面”（亦可参考 [6]）

$$x^2+y^2+z^2+a^2-b^2=4b^2(x^2+y^2)$$

通过取不同的参数 a, b 得到。

由左图可以看出，某些方程有奇异点（对应曲面的“尖点”）。按 Surfer 软件的介绍，d 阶代数方程可能产生的奇异点的最大数目 $\mu(d)$ 当 $d \geq 7$ 时至今未知。许多带奇异点的图片也可在 Surfer 软件的图库找到[10]。

某 5 阶方程得到的带 $31(=\mu(5)!)$ 个尖点的曲面

MiMa 博物馆

奥博沃尔法赫联合其它部门于 2010 年 1 月底在数学所附近新成立了一个 MiMa 博物馆，即矿物与数学博物馆（Minerals and Mathematics）的简称。因为时间关系，我没能去参观。其主页[11]介绍了部分内容。MiMa 主要展出奥博沃尔法赫的两大特点：独一无二的黑森林矿藏和数学所指导下的数学知识。博物馆也特别重视矿物的晶体结构与数学的联系（其中蕴含如准晶、彭罗斯拼图等热点研究问题）。同时，MiMa 也是上述“IMAGINARY”展览的永久展览地。

从展览到博物馆，一个世界著名的数学所，将科普做到如此的精致和用心，是很值得我们尊敬和学习的。

影响

奥博沃尔法赫数学所，这个成长在小山村里的数学所有如广袤黑森林

[8] 主页为 http://www.imaginary2008.de

[9] 主页为 http://www.imaginary2008.de/surfer，软件免费下载。

[10] 或参考 http://www.calendar.algebraicsurface.net，这里有各种曲面的简短介绍和动画视频。

[11] 主页为 http://www.mima.museum

[12] 主页为 http://www.cirm.univ-mrs.fr

[13] 主页为 http://www.birs.ca

里璀璨的明珠，以其充满魅力的传统和文化，吸引数学家们纷至沓来；亦如星星之火，点燃了数学家们建立类似的数学所的激情。其中尤其著名的有法国马赛 Luminy 的国际数学会议中心 [12]，加拿大的阿尔伯塔省的班夫（Banff）国际数学创新与发现研究站 [13] 等。马赛的数学中心早在 1954 年就被提议设立，但直到 1982 年才召开第一次数学会议（见 [7]）；而班夫研究站则是在 2003 年正式对世界科学共同体开放的（见 [8]）。这些数学中心在介绍其创始历史或缘由时无不提及受到奥博沃尔法赫数学所的启发。

致谢：作者感谢奥博沃尔法赫数学所档案馆（Archives of the Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach）允许作者使用 2010 年四位菲尔兹奖获得者在奥博沃尔法赫的照片以及图书馆外景图。

2011 年 2 月于德国比勒费尔德

参考文献

1. A. Jackson, Oberwolfach, Yesterday and Today, Notices Amer. Math. Soc. 47, no. 7, 758-765,2000.
可下载自 http://www.mfo.de/general/history/jackson.pdf

2. A. Jackson, Oberwolfach, Celebrates its Sixtieth Anniversary, Notices Amer. Math. Soc. 51，no. 9, 1064-1066，2004.

3. 张奠宙，《陈省身大师与数学文明》，宁波大学“做人做事做学问”名家系列讲座第 66 讲演讲。
http://student.nbu.edu.cn/ycCampus/showNews.aspx?columnID=1028&newsID=12854

4. P. Halmos, I Want to Be a Mathematician, Springer-Verlag, 1985 (中译《我要作数学家》，马元德等译）

5. A. J. P. MacLean, Parametric Equations for Surfaces, 2006.
可下载自 http://www.vtk.org/VTK/img/ParametricSurfaces.pdf

6. Klaus, Stephan, Solid Möbius strips as Algebraic Surfaces, 2009.
可下载自 http://data.imaginary-exhibition.com/IMAGINARY-Moebiusband-Stephan-Klaus.pdf

7. Luminy 的国际数学会议中心的网页：
http://www.cirm.univ-mrs.fr/Site_test/spip.php?article125&lang=en

8. 班夫国际数学创新与发现研究站的网页：
http://www.birs.ca/about/ creation-of-birs

作者介绍：

欧阳顺湘，现为德国比勒费尔德大学数学系博士后，研究方向为随机数学及其相关领域。

几何之美 I

宗传明

本文受到国家 973 项目 2011CB302400, 国家自然科学基金项目 11071003 和长江学者奖励计划的资助。
作者感谢贾朝华教授和项武义教授的润色建议。
通讯地址：cmzong@math.pku.edu.cn

引言

按照许多数学先哲（如庞加莱，哈代和冯 • 诺依曼等）的观点，数学不仅是一门科学，也是一门艺术。即数学也是一门追求独创和美的学问。

数学中确有一些艺术杰作：自然优美的问题，巧夺天工的构思，荡气回肠的结局。其独创性和优美程度绝不亚于柴科夫斯基的芭蕾舞剧或者雷诺阿的名画，只是对大众来说更难理解和欣赏而已。在这一系列短文中，我们将展示几何学中的几件“艺术珍品”。

对于一个数学家来说，欣赏学习他人的杰作不仅是为了（有可能）直接用到自己的工作中去，更重要的是为了提高修养，开阔眼界。从而使我们远离平庸，接近伟大。

本文将介绍波兰数学家博苏克（Karol Borsuk，1905-1982）于 1932 年提出的一个几何猜想。它非常直觉并且在二维空间和三维空间都是正确的。然而，这一看上去百分之百正确的猜想却于 1993 年被美国数学家 J. Kahn 和以色列数学家 G. Kalai 用组合的方法 99.9% 地否定了。更让人惊奇的是，他们的论证方法就像魔术一般，让人回味无穷。

1 观察

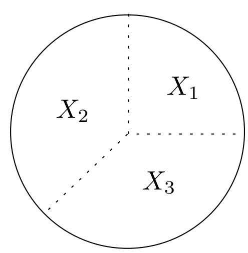
一个点集 X 的直径 $d(X)$ 是指它的点之间的最大距离。确切地说，

$$d(X)=\sup\{\|x, y\|: x, y\in X\}$$

其中 $\|x, y\|$ 表示 x 和 y 之间的欧氏距离。

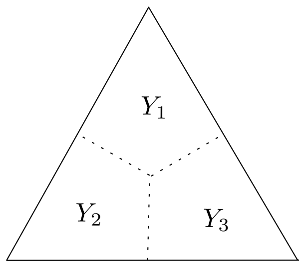
一个单位圆盘 X 可以被分为三块 X_1, X_2 和 X_3 使得每块的直径都小于圆盘的直径。即

$$d(X_i) < d(X),\quad i = 1, 2, 3.$$



一个三角形区域 Y 可以被分为三块 Y_1, Y_2 和 Y_3 使得每块的直径都小于原三角形区域的直径。也就是说

$$d(Y_i) < d(Y),\quad i = 1, 2, 3.$$



你能将圆盘或正三角形分成两块使得每块的直径都比原集合的直径小吗？

基于以上观察，人们容易猜测到如下结论：

定理 1. 每个二维的有界集合 X 都可以被分为三个子集合 X_1，X_2 和 X_3 满足

$$d(X_i) < d(X),\quad i = 1, 2, 3.$$

我们扼要介绍一下这一定理的证明思路。为了方便，我们用 $\overline{X}$ 表示 X的闭包，用 $\widehat{X}$ 表示 X的凸包。所谓凸包，即指

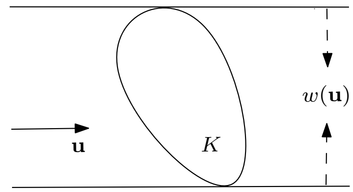
$$\widehat{X} = \left\{\sum \lambda_i x_i : \lambda_i > 0,\ x_i \in X,\ \sum \lambda_i = 1\right\}.$$

形象地说，$\widehat{X}$ 就是用橡皮筋将 X围起来所得到的区域。显然，对任一有界集合 X我们都有

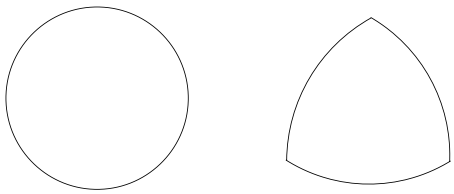
$$d(X) = d(\overline{X}) = d(\widehat{X}).$$

所以，对定理 1 来说只需研究凸区域[注 1]即可。

假设 K 为一个凸区域，$\mathbf{u}$ 为一个单位向量并用 $w(\mathbf{u})$ 表示 K 在 $\mathbf{u}$ 方向的宽度（如下图所示）。



如果存在一个只与 K 有关的常数 c 使得 $w(\mathbf{u})=c$ 对所有的单位方向都成立，我们就称 K 为一个等宽凸体[注 2]。例如，下图中的两个凸区域都是等宽凸体。

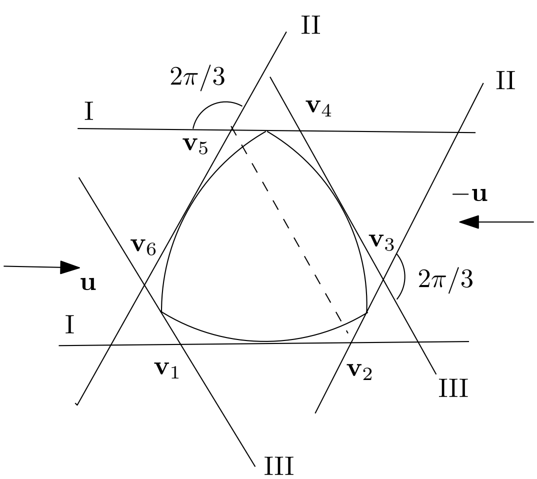


可以证明，对每一个凸区域 K 都可以找到一个相应的等宽凸体 K^* 同时满足

$$K \subseteq K^* \quad 和 \quad d(K)=d(K^*)$$

（这是凸几何中的一个基本结果，有兴趣的读者不妨尝试一下证明）。所以，要证明定理 1 我们只需讨论等宽凸体即可。

假设 K 是一个二维的等宽凸体并假设 I, II 和 III 是 K 的三对平行切线，其中每两对之间的夹角都是 $2\pi/3$（如下图所示）。我们取 I 的定向为 $\mathbf{u}$。



注 1

在 n 维欧氏空间，一个集合 K 被称为一个凸体，如果它是一个具有内点的有界闭集且满足

$$\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \in K,\quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, 0 \le \lambda \le 1.$$

也就是说，连接 K 中任意两点的整条线段都属于 K。容易验证，球，单纯形和立方体都是凸体。特别地，二维凸体被称为凸区域。

注 2

等宽凸体是一个非常重要的几何概念，已有上百年的历史，相关文献不下三百篇。想了解这一专题的读者可参考 Chakerian 和 Groemer 发表在论文集 Convexity and Its Applications (Birkhäuser，1983) 中的综述文章。

利用等宽以及所取特殊夹角的限制可以证明 $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_6$，$\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5$ 和 $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$ 两两平行。我们定义 $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$ 至 $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5$ 的距离与 $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5$ 至 $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_6$ 的距离之比为 $f(\mathbf{u})$。即

$$f(u)=\frac{\|v_2, v_3\|}{\|v_5, v_6\|}.$$

当 $\mathbf{u}$ 沿着顺时针方向转动时，$f(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{u}$ 的一个连续函数并且满足

$$f(-u)=\frac{\|v_5, v_6\|}{\|v_2, v_3\|}=\frac{1}{f(u)}.$$

所以，由连续函数的中值定理，存在一个单位方向 $\mathbf{u}_0$ 满足 $f(\mathbf{u}_0)=1$。这时所对应的六边形 $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4\mathbf{v}_5\mathbf{v}_6$ 恰好是一个正六边形。也就是说，*存在一个对边距离为 $d(K)$ 的一个正六边形 H 满足 $K\subseteq H$。*[注3] 这时我们很容易将 H 分成三块 Y_1，Y_2 和 Y_3 使得

$$d(Y_i)=\frac{\sqrt{3}}{2}d(K), \quad i=1, 2, 3.$$

这样我们就证明了定理 1。

事实上，我们证明了如下更强的结论：

定理 1* *每个二维的有界集合 X 都可以被分解为三个子集合 X_1，X_2 和 X_3 满足*

$$d(X_i)\le\frac{\sqrt{3}}{2}d(X), \quad i=1, 2, 3.$$

其中常数 $\sqrt{3}/2$ 是最佳的。

这是一个很好的开端。在此基础上既可以提出有意义的相关问题，也可以做更一般的猜想。但是，为了保险，我们再做一点观察。首先，通过归纳法可以证明：

在 n 维欧氏空间 E^n 中，单位球 B^n 可以被分成 $n+1$ 个子集 X_1，X_2，…，X_{n+1} 满足

$$d(X_i)<d(B^n), \quad i=1，2，\cdots，n+1.$$

假设 K 是一个具有光滑表面且包含坐标原点作为一个内点的 n 维凸体。也就是说，它的每一个边界点都有唯一的切平面。像通常一样，我们用 $\partial(K)$ 来表示 K 的边界。假设 $\mathbf{x}\in\partial(K)$，$H(x)$ 是 K 在 $\mathbf{x}$ 点的切平面，$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 是该平面的单位法向量。显然，

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{u}(x)$$

定义了 $\partial(K)$ 到 $\partial(B^n)$ 的一个满射。记为 $f(\mathbf{x})$。

如前面所说，$\partial(B^n)$ 可以被分成 $n+1$ 个直径均小于 2 的子集 X_1，X_2，…，X_{n+1}。定义

$$Y_i=\{\mathbf{o}\}\cup f^{-1}(X_i).$$

容易验证，如果 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}\in\partial(K)$ 满足

$$\|\mathbf{x}, \mathbf{y}\|=d(K),$$

那么一定有

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=-\mathbf{u}(\mathbf{y}).$$

由此可以导出

$$d(\hat{Y}_i)<d(K)$$

以及

$$K=\bigcup_{i=1}^{n+1}\hat{Y}_i.$$

这样，我们又证明了

定理 2 *每一个具有光滑表面的 n 维凸体 K 都可以被分成 $n+1$ 个直径都小于 $d(K)$ 的子集。*

2 猜想

博苏克 (Karol Borsuk, 1905-1982)

注 3

这一结论也许会提示读者想到如下问题：确定一个面积最小的凸区域 D，使得任一直径为 1 的平面集合都可以经过刚性变换后被 D 覆盖。这一问题具有悠久的历史，可以追溯到 Lebesgue。至今远未解决。也许读者还会想到蚯蚓问题：确定一个面积最小的凸区域 G，使得任一长度为 1 的平面曲线都可以经过刚性变换后被 G 覆盖。

1932 年，波兰数学家博苏克在苏黎世举行的世界数学家大会上提出了如下猜想[注 4, 5]：

Borsuk 猜想 n 维欧氏空间中的每一个有界集合都可以被分为 $n+1$ 个子集使得每个子集的直径都比原集合的直径小。

用 $\beta(X)$ 表示能将 X 分解成直径小于 $d(X)$ 的子集的最小个数。则 Borsuk 猜想可以被重新叙述为：

如果 X 是 n 维欧氏空间中的一个有界集合，那么

$$\beta(X) \le n+1.$$

博苏克于 1905 年 5 月 8 日生于波兰首都华沙。在近代历史上，波兰是一个多难的民族，曾多次受到外国列强的入侵和奴役。但她也是一个异常坚强和伟大的民族，在人类文明的历史上留下了许多灿烂辉煌的名字。例如，哥白尼，肖邦，居里夫人等等。而博苏克的求学年代正值波兰数学最辉煌的时期。那时，巴拿赫（Stefan Banach, 1892-1945），谢尔宾斯基（Wacław Franciszek Sierpiński, 1882-1969）等世界级数学家正处在他们事业的巅峰，数学中的波兰学派正在形成。18 岁那年，博苏克考入华沙大学，26 岁获博士学位。这其间，他曾师从谢尔宾斯基，马苏基耶维茨（Stefan Mazurkiewicz, 1888-1945）等著名数学家。随后，他到维也纳，苏黎世和因斯布鲁克游历访问了一年，得到了门格尔（Karl Menger, 1902-1985），霍普夫（Heinz Hopf, 1894-1971）和 Victoris 的指导。1938 年他晋升为华沙大学副教授。那时，他已经因为证明博苏克 - 乌拉姆定理而成为一名备受瞩目的拓扑学家。可惜，和许多同时代的人一样，他的似锦数学前程被第二次世界大战所中断。

Borsuk-Ulam 定理 任一从 $n+1$ 维单位球的表面到 n 维欧氏空间的连续映射一定把某一对对径点映射到同一点。

1939 年 9 月 1 日，纳粹德国入侵波兰。作为一名有着强烈民族自尊心和正义感的热血青年，博苏克奋起加入了波兰抵抗组织并参加了 1944 年 8 月的华沙起义。由于起义惨遭失败，博苏克被捕并被关押到了朴卢斯高集中营。解放前夕，他成功逃离了集中营，从而幸免于难。

1945 年 7 月 22 日，波兰解放。8 月 31 日，伟大的巴拿赫去世。毫无疑问，第二次世界大战不仅毁坏了波兰人民的家园和生活，也摧毁了波兰的数学。1946 年，博苏克被任命为华沙大学教授。从此，他逐渐承担起复兴波兰数学的重任。1952 年，波兰开始筹建科学院，他是第一批通讯院士之一，四年后升为院士。

博苏克是一位杰出的拓扑学家，对映射理论，形状理论，同伦论等都有开创性贡献。许多数学名词冠以他的名字，如 Bing-Borsuk 假设，Borsuk-Spanier 群，Borsuk-Ulam 定理，Borsuk 猜想等等。他发表了近两百篇论文，出版了四部专著。由于他的杰出贡献，生前曾获得许多国际国内荣誉。博苏克于 1982 年 1 月 24 日在华沙去世。1983 年，波兰科学院编辑出版了博苏克全集。本文中关于博苏克的许多生平信息均源于他的全集。

3 尝试

通过类似定理 1 的证明思路，我们也可以证明 Borsuk 猜想的三维情形。当然，可想而知，具体细节要困难得多。

定理 3 每一个三维的有界集合 X 都可以被分解为四个子集合 X_1，X_2，X_3 和 X_4 满足

$$d(X_i) < d(X), \qquad i = 1，2，3，4.$$

不失一般性，我们假定 $d(X)=1$。早在 1953 年凯

注 4

具有光滑表面的 n 维凸几何体所构成的集合在所有 n 维凸几何体构成的 Hausdorff 空间中是稠密的。所以，基于定理 2，几乎所有几何学家都不会怀疑 Borsuk 猜想的正确性。

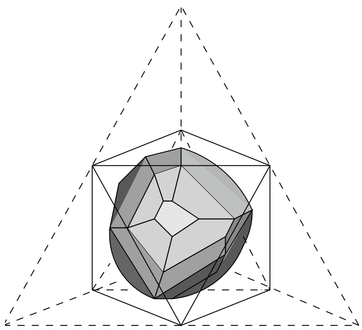
注 5

在数学的研究过程中，提出好的问题和猜想是第一重要的。因为它指出了探索方向。Borsuk 猜想就是这样一个典范。它与许多其它数学问题密切相关 (参见 [3])。对它的研究极大地促进了组合几何的发展。

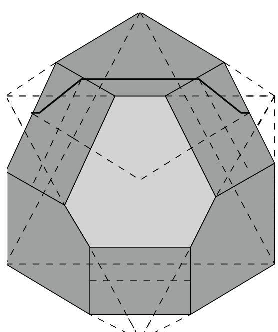
尔（David Gale, 1921-2008）证明了如下结果：

在 n 维欧氏空间中，每一个直径为 1 的集合都能被嵌入到一个边长不大于 $\sqrt{n(n+1)/2}$ 的正规单纯形中。

这是非常本质和艰难的一步，通常被称为 Gale 引理。作为这一引理的特例，X 可以被嵌入到一个边长为 $\sqrt{6}$ 的正四面体 T 中。如下图所示，将正四面体 T 切掉四个边长均为 $\sqrt{6}/2$ 的正四面体，我们得到一个边长为 $\sqrt{6}/2$ 的正八面体 C。由于 $d(X)=1$，我们得到 $X\subseteq C$。



更进一步，由于 $d(X)=1$，我们还可以从正八面体 C 切掉三个适当的棱锥（每对顶点可以去掉一个）从而得到一个包含 X 的如下形状的多面体。我们称之为 D。



可以证明，多面体 D 可以被分解成四块 X_1，X_2，X_3 和 X_4（分解较复杂，从略）满足

$$d(X_i)<d(X),\qquad i=1，2，3，4.$$

定理 3 得证。[注 6]

关于定理 3 的定量改进我们有如下猜想：

Gale 猜想 三维欧氏空间中的每一个有界集合 X 都可以被分成四个子集合 X_1，X_2，X_3 和 X_4 满足

$$d(X_i)\le\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)/6}\,d(X),\qquad i=1，2，3，4.$$

4 离散化

拉曼 (David Larman, 1942-)

1984 年，拉曼 (David Larman, 1942-) 提出了如下问题：

Larman 问题 假设 $\mathcal{A}$ 是 $\{1, 2, \ldots, n\}$ 的一族任意两个都至少有 k 个公共元素的子集。那么 $\mathcal{A}$ 一定能被分成 n 个子族使得每一个子族中的任意两个集合都至少有 k+1 个公共元素吗？

尽管 Borsuk 猜想和 Larman 问题在形式上大相径庭，实际上它们是密切相关的。假设 $\mathcal{A}$ 中每个集合 ($\{1, 2, \ldots, n\}$ 的子集) 的元素个数均为 h，$\mathcal{A}$ 中任意两

注 6

这一定理首先是由 Perkal 于 1947 年证明的。后来，Eggleston，Grünbaum，Heppes 等人又给出了简化证明和定量改进。所谓的定量改进是指寻求最小的 $c<1$ 使得每块的直径都不大于 c。这里所介绍的思路是由 Grünbaum 于 1957 年发现的。

个集合都至少有 k 个公共元素且确有两个仅有 k 个公共元素，$\mathcal{A}$ 最少可以划分成 $l(\mathcal{A}, n, k)$ 个子族使得每个子族中的任意两个集合都至少有 k+1 个公共元素。定义

$$\sigma: \mathrm{A} \longrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad A \in \mathcal{A}$$

其中

$$x_i = \begin{cases} 0 & i \notin A \\ 1 & i \in A \end{cases}$$

如果 A 和 A' 具有 j 个公共元素，那么

$$\|\sigma(A), \sigma(A')\| = \sqrt{2(h-j)}$$

由此可以导出

$$\beta(\sigma(\mathcal{A})) = l(\mathcal{A}, n, k).$$

这一离散形式对正面尝试 Borsuk 猜想没有作用。但是，如果能够证明

$$l(\mathcal{A}, n, k) > n+1,$$

那就彻底否定了 Borsuk 猜想。

拉曼是一位杰出的几何学家，曾任伦敦大学学院教授，伦敦数学会副主席，获多项国际国内学术荣誉。1975 年，他与 C.A. Rogers 合作给出了 Busemann-Petty 问题的第一个反例。这是一项杰出的数学成就。就创造性和重要意义而言，它与下一节提到的意外结局是同一水平的。

Busemann-Petty 问题 假设 C_1 和 C_2 是两个中心对称的 n 维凸几何体（以坐标原点为中心）。如果对任一过坐标原点的超平面 H 都有

$$v_{n-1}(C_1 \cap H) > v_{n-1}(C_2 \cap H),$$

是否一定能够导出 $v_n(C_1) > v_n(C_2)$?

提到英国的大学，人们首先想到的一定是剑桥和牛津。其实，伦敦大学学院，帝国理工学院和伦敦政治经济学院也都是世界级的大学。就伦敦大学学院而言，迄今已有 21 位校友（教员和学生）荣获诺贝尔奖，3 位获菲尔兹奖（K. F. Roth, A. Baker 和 T. Gowers）。

5 意外的结局

1981 年，P. Frankl 和 R. Wilson 在《组合数学》（Combinatorica）的创刊号发表了如下结果。为了叙述方便，我们用 $|X|$ 来表示集合 X 中元素的个数。

Frankl-Wilson 定理 取 $m = 4q$，其中 q 为某一素数的方幂。设 S 是一族集合，其中每个集合都是 $\{1, 2, \ldots, m\}$ 的 $m/2$ 元子集，且任意两个集合都不相交于 $m/4$ 个元素。那么

$$|S| \leq 2\binom{m-1}{m/4-1}.$$

这是一个非常深刻的组合定理，其证明也很复杂。由于本文的目的所限，我们不在此赘述其证明。但是，我们列举它的如下推论来佐证它的重要性。

将 n 维欧氏空间 E^n 用 $g(n)$ 种颜色着色。若能达到每一对距离为 1 的点都有不同的颜色，那么

$$g(n) \geq 1.2^n.$$

回到 Borsuk 猜想。为了叙述方便，我们定义

$$\beta(n) = \max\{\beta(X)\},$$

这里的极大取遍所有 n 维有界集合 X。显然，Borsuk 猜想就是

$$\beta(n) = n+1.$$

让数学界震惊的是，J. Kahn 和 G. Kalai 于 1993 年证明了如下结论：

定理 4 当 n 充分大时，

$$\beta(n) \geq 1.2^{\sqrt{n}}.$$

特别地，当 $n \geq 2015$ 时 $\beta(n) > n+1$。

取 $m = 4q$，这里 q 为某一素数的方幂。我们定义 $W = \{1, 2, \ldots, m\}$，G 为 W 中的元素生成的所有无序二元数组构成的集合，V 为 W 的一个 $2q$ 元子集，V' 为 V 在 W 中的补集，$S(V)$ 为所有的无序数组 $\{a, b\}$ 构成的集合，其中 $a \in V$，$b \in V'$，$\mathcal{A}$ 为所有 $S(V)$ 构成的集合族。容易验证

$$|G| = \frac{m(m-1)}{2}$$

和

$$|\mathcal{A}| = \frac{1}{2}\binom{m}{m/2}.$$

如果 U 和 V 均为 W 的 $2q$ 元子集且满足 $|U\cap V|<q$，那么我们容易导出 $|U\cap V'|>q$。所以 $|S(U)\cap S(V)|$ 在 $|U\cap V|=q$ 时达到极小值。我们记这一极值为 k。由 Frankl-Wilson 定理，$\mathcal{A}$ 中任一多于 $2\binom{m-1}{m/4-1}$ 个集合的子族都有两个集合 $S(U)$ 和 $S(V)$ 满足

$$|S(U)\cap S(V)|=k.$$

所以，由于 $S(V)$ 都是 G 的子集，

$$l(\mathcal{A}, m(m-1)/2, k) \ge \frac{\frac{1}{2}\binom{m}{m/2}}{2\binom{m-1}{m/4-1}}.$$

当 $n=m(m-1)/2$ 且充分大时，由上式可得

$$l(\mathcal{A}, n, k) \ge 1.203^{\sqrt{n}}.$$

再由素数分布的定理可以导出

$$\beta(n) \ge 1.2^{\sqrt{n}}$$

对所有足够大的自然数都成立。

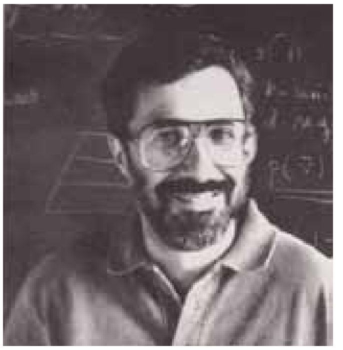
Borsuk 猜想的意外解决是当年轰动数学界的事件。美国数学会 1993 年出版的大事记（What's Happening in the Mathematical Sciences）就以 Disproving the Obvious in Higher Dimensions 为题介绍过这一成果。[注 7]

Jeff Kahn 和 Gil Kalai 都是当代杰出的组合数学专家。前者是美国罗特格大学教授，在随机 ±1 矩阵，相交系等领域做出过多项重要工作；后者是耶路撒冷大学教授和以色列数学会主席，在概率方法在组合问题中的应用和多面体的组合理论等领域做出了杰出贡献。毫无疑问，Borsuk 猜想的解决已将 Kahn 和 Kalai 这两个名字写入几何学的史册。

注 7

在过去的二十年中，许多数学家改进了 Kahn 和 Kalai 的结果并发现了多种不同的证明方法。至今已知的结论是：当 $n\le 3$ 时 Borsuk 猜想正确；当 $n\ge 298$ 时 Borsuk 猜想有反例；当 $4\le n\le 297$ 时，Borsuk 猜想还未解决。作为 $\beta(n)$ 的上界，Schramm，Bourgain 和 Lindenstrauss 曾证明：对每一个 n 维有界集合 X 我们有

$$\beta(n) \le (1.5+o(1))^{\sqrt{n}}.$$



Gil Kalai (1955-)

后记

许多年前，在维也纳的一次舞会上约翰·施特劳斯的夫人遇到了勃拉姆斯。寒暄之余，施特劳斯夫人递给勃拉姆斯一把纸扇，请他题字留念。勃拉姆斯略加思索，在扇面上飞快地写下了《蓝色多瑙河》的主旋律。正当施特劳斯夫人惊愕之际，他又在下面写道“可惜不是我作”。

参考文献

1. M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer, Berlin, 1998.
2. P. Frankl, R. Wilson, Intersection theorems with geometric consequences, Combinatorica, 1 (1981), 357-368.
3. B. Grünbaum, Borsuk's problem and related questions, Proc. Symos. Pure Math. 7 (1963), 271-284.
4. J. Kahn, G. Kalai, A counterexample to Borsuk's conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993), 60-62.
5. D. Larman, Open problem 6, Convexity and Graph Theory (M. Rozenfeld, J. Zaks, eds.) North-Holland, Amsterdam, (1984), p. 336.
6. C.M. Zong, Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry, Springer, New York, 1996.

未完待续


上个世纪复旦大学的数学楼。楼上曾经安装过中国第一台计算机。

旦复旦兮，吾将上下而求索

——李源潮校友访谈录

摘自 《复旦改变人生》/ 燕爽 主编 / 复旦大学出版社

我 1978 年进入复旦学习，83 年离开。在这 6 年中，4 年是学生，2 年是老师。实际上，作为学生的时间还不到 4 年，因为我们是 77 级，那一级由于入学时间的缘故损失了小半年。我做过管理系老师，后来又在复旦团委工作过，然后到了团市委。所以我对复旦是很有感情的，因为复旦既是我作为学生的最后一个阶段，也是踏入社会的一个重要阶段。

在进入复旦前，我已经跨出学校，在社会上劳动和工作了近十年。当时我是一个已经有 4 年教龄的老师了，是业余工业专科学校的老师。他们认为像我这样在上海已经有份较好的工作，还要去读大学，是不是有点不值得。但是，我从小学开始就有一个目标——读大学。读完大学，还要读硕士、博士，最后做科学家，这是我从小之梦。当时我常看的就是《十万个为什么》、《科学就是力量》之类的图书杂志。所以，十年来我一直希望能有机会上大学，不能上大学总是有些耿耿于怀。因此我去报了名。当时家里和同事都不知

复旦图书馆：复旦学子吸收知识营养的地方

道，只有单位领导知道，因为需要单位出证明。我们还要继续工作，没有很多时间复习，那时也没什么复习的资料和复习的概念。到考试那天，我是请假去的。上午参加考试，下午回来继续工作，然后第二天再去考。

我不是第一批拿到复旦录取通知书的，当时以为自己没有考上。没拿到通知书的时候，我就告诉自己，尽自己的努力，至于能得到什么，是社会给你的。凡是经历过文革的人，都明白这个道理，很多事情是不能超越社会的。但是，反过来，一个人要力求能主宰自己。这就叫作唯物史观和个人努力的结果。唯物史观就是承认人是社会的一员。个人努力又叫主观能动性，也不能缺少。缺少了个人努力，那么整个人也就缺少前进的动力。因此，我当时就边工作，边等消息，等拿到录取通知书的时候感觉是失而复得。

我从小学开始就有一个目标——读大学。读完大学，还要读硕士、博士，最后做科学家，这是我从小之梦。当时我常看的就是《十万个为什么》、《科学就是力量》之类的图书杂志。

我接到入学通知书时的心情，和现在中学刚刚毕业的同学不太一样，既有一种激动的心情，感觉自己十年梦圆，人生翻开了新的一页，同时又有很冷静的思考，毕竟我们耽误了十年。十年到农村去，有了各种社会经历，得了人生的经验和体会，也叫做上了社会大学。但是，能再真正地、正规地上大学，而且是在全国知名学府读书，机会实在是难得啊，所以一定要珍惜这个来之不易的机会。

当初为什么选择复旦呢？当时，四所大学最有名：北大、复旦、清华、哈军工。在我们上海中学，大家都瞄准这四所学校。照上海人的说法，特别是在我们中学的提法，复旦就是上海的北大。这对我是有影响的，所以我就选择了复旦。为什么报考数学系呢？当时很多人是因为哥德巴赫猜想报考数学系的，但我不是。我原来是教师，教数学，但是曾经在一堂电子课上讲微积分时讲错了一题。我在讲电容积分公式的时候，我讲了一半感

觉不对，差了一个常数。回头上去看，原来在一个积分上我讲错了。虽然我在黑板上马上更正了，但我还是觉得自己的数学功底不好，所以去读数学。我本来的想法很简单，学好数学后回来还当我的教师。我最愿意的还是做教师。

苏步青校长和李源潮校友（右一）在一起聊天

我刚到复旦的第一印象，觉得和想象里的复旦没有什么不同，就是想象中的这么一个庄严学府。我在中学里就喜欢去图书馆，所以我从大门进去后，先去看了图书馆，觉得它很不错，接着就拐到了数学楼。数学楼也是一个非常经典的建筑，是复旦最老的楼之一，我很喜欢。我去数学系报到，很激动，负责报到的老师也很高兴、很激动，对我们很热情。接着我来报到的是一个小女孩，扎两个小辫子，脸红红的，穿个娃娃衫，才 15 岁，是应届生。她比我们小十几岁，我的学生的年纪都比她大。所以，我心里头是一片沧桑啊。但是，和这些小孩一起学习反倒激励了我们，要珍惜这个宝贵的机会。十年之后再回到学校，我们的学习不是一种外在的动力，而是一种内在的追求。不会觉得四年时间太长，而是觉得时间太短。最好一天能当两天用，晚上能当白天用。如果说上帝要恩赐的话，我们需要的就是时间。时间流逝了十年，才知道时间之宝贵；因为没有机会能够进学堂，所以才觉得能进学府的不易。这是那时一代人的感情，一代人的思想。

我原来是教师，教数学，但是曾经在一堂电子课上讲微积分时讲错了一题。我本来的想法很简单，学好数学后回来还当我的教师。我最愿意的还是做教师。

尽管后来知道中国的高考就此开了闸门，但当时 78 级有没有还不知道呢。十年里能进入大学的人，连百分之一都没有，更不要说进复旦了。所以大家特别珍惜这样的机会，拼命地学习。学校老师讲，解放后从来没有见到过这么勤奋的一届学生。开始的时候是晚上 10 点半熄灯。大家吵着说，10 点半怎么行呢？功课做不完，怎么办？难道让大家都打电筒啊？我当时还作为学生代表，专门找了苏步青校长，把这个事情和他说了。苏校长说，来日方长，既要学习，还要注重身体，健康也是学生必要的。后来还是把熄灯时间延迟了一点，教室 10 点半熄灯，寝室 11 点熄灯。

11 点钟熄灯以后，一、二号楼前面的路灯下面全是人，都是数学系的。我们大部队都在路灯底下，大家读外语什么的，学习非常勤奋。晚上夜深人静，容易集中精神，问题是早上起不来。我记得当时每天早上我们寝室里面都要睡懒觉，全部睡到最后一分钟。但是又不能不吃早饭。所以，每天早上派一个人去食堂里买馒头，一人一个。离上课还差五分钟的时候，打第一遍铃，大家起来，拿着馒头往教室跑。所以我养成了一个习惯，晚上熬夜，早上起不来，不吃早饭，至今还是这个习惯。我现在外语也还可以，人家都以为我出去留学过。后来，我是在哈佛学过一段时间，不过我的外语不是在国外学的，而是在复旦学的，完全是“路灯底下的外语”。那个时候学外语很难，最难的就是单词记不住。不过也好，一旦把它记住了，就比较牢固，过了几十年还能用。

时间流逝了十年，才知道时间之宝贵；因为没有机会能够进学堂，所以才觉得能进学府的不易。这是那时一代人的感情，一代人的思想。

我最喜欢两门课。一是数学分析。数学分析是最有用的学问。所有你能够感觉到的问题，用数学分析一分析，很多事情难的就变成容易的了。二是概率论。概率论是最奇妙的学问。当时教数学分析的老师，一位是李贤平老师，一位是欧阳光中老师。欧阳老师教课教得最好，同学们第一爱听。他讲课清晰，吸引人，让你觉得不仅是进入了一个科学殿堂，也是进入了一个艺术殿堂。他把数学的美全部

复旦数学的胡和生院士，李大潜院士，谷超豪院士（后排左至右）和苏步青校长在一起

讲出来了。他的课，那不叫讲课，是讲课艺术。李贤平老师、教概率论的汪嘉冈老师，还有很多老师，课也讲得很好。

我最喜欢两门课。一是数学分析。数学分析是最有用的学问。所有你能够感觉到的问题，用数学分析一分析，很多事情难的就变成容易的了。二是概率论。概率论是最奇妙的学问。

讲得很好的老师中有的也很让我们害怕，比如像夏道行老师。夏道行老师是一个很有特点的老师。他教实变函数，课讲得很好，但考试特难。考试前他不给大家复习，也不说要复习什么，就说不难不难。到考试的时候却不得了，一共只考一个半题目，叫你证明一个定理，还有半个题目大概是送分的。他叫我们证明一个类似书上的定理，书上用了二十多页来证明。我记得实变函数是很厚的一本书，是夏老师自己写的，一共就学三个定理，一个定理要讲好多次，从这个引理引到那个引理，引来引去，最后得出一个结论。考试考到两个小时，大家谁也不交卷，都没考出来。夏道行老师虽然题目出得很难，但人很随和，便说“好，你们不交，那你们就再考吧”，一直考到吃饭，“十二点都过了，你们还是交吧。”最后，大家都交了，求着说“夏先生，这个太难了，你把我们都考糊了”。夏先生不紧不慢地说：“你们别害怕，我让你们都及格。”过去二三十年了，这门课的内容我现在已经印象不深了，但夏道行老师的风格给我的印象还是比较深的。

印象比较深的还有哥德巴赫猜想。我们进校的时候，老师就说：“你们千万不要碰哥德巴赫猜想，这东西害人的。你们现在的水平，根本就不可能做这个东西。等你们四年毕业，有你们研究的。”我们都记下了。但是社会上寄到数学系来的东西不得了啊，说哥德巴赫猜想他解决了。我还看到一个人以哲学的方式来解决“1＋1＝2”。系里就把这些东西发给学生看，说：“你们的任务就是把它看出问题来。”我当时还看了好几份这样的东西。你完全可以不睬他，但他不就永远钻牛角尖了嘛？所以你要给他找出问题，让他死了心。

谷先生听了之后说：“你能看这个，不错啊！”我和他就这样认识了，一直到现在我们都是很好的朋友。他给我们留下了很深的印象，学问很深，为人非常谦和，待人非常厚道。

当时，学校里有两位老师给我印象很深。一位是我们的系主任谷超豪老师。有一次，我们去听丘成桐教授的讲座，讲的是微积分的思想。讲座结束后，谷先生出来介绍丘成桐，随后就和大家一起出来了。当时我向他问了一个我们没学过的问题，谷先生就问我怎么注意到这个问题的。我说是在《希尔伯特的抽象几何》中看到的。谷先生听了之后说：“你能看这个，不错啊！”他就建议我看《数学的思想意义和方法》，一共三卷。这是他在莫斯科留学的时候看的书，是很经典的著作。我和他就这样认识了，一直到现在我们都是很好的朋友。他给我们留下了很深的印象，学问很深，为人非常谦和，待人非常厚道。

第二位是我的第一任班主任老师，叫孙芳烈。这个老师确实非常好，非常关心爱护学生，从学业到身心，一直到做人，真正是学生的导师。数学系许许多多老师对我的帮助都很大，但是对我们整个班级学生帮助最大的，首推孙芳烈老师。我们这个班上现在成名的也不少，数学系前后两任系主任雍炯敏老师和吴宗敏老师都是我的同学，在外国的也有很多。要说大家在学校里对哪个老师印象最深，能有交集、能取得共识的一定是孙芳烈老师。孙老师对学生非常好，一是她有一颗母仪之心，宽爱所有的学生，不管是年纪大还是年纪小的学生；二是她确实非常认真负责，一心扑在学生身上，帮助学生适应大学生活。在这一点上，我们全班同学都很感激她。她既是班主任，又是

数学教师，辅导我们数学分析。当时在数学系教我们的都是名教授，但孙老师是做辅导课做得最好的。所以，第一学年我们班数学分析考试有 14 个 100 分。苏校长为什么对我们印象深，包括我在内？就是这个原因。他说：“他们这个班不得了啊，14 个 100 分。”那时我们都不知道数学分析考试 14 个 100 分是很了不起的事情。

李源潮在演讲

大家的要求也很高，要是考 85 分，那就完了，就抬不起头来了。80 分以下，就觉得是不及格了。所以，当时大家学习很努力。那个时候在大学里学数学，你不进取就等着落后吧。你一个环节不进取，全学期就下来了；你一个学期下来，全学年就下来了；一个学年下来，大学就全下来了。这个就是山外青山楼外楼，争得上游莫骄傲，还有英雄在前头。就是这样，大家都往前走。

要说复旦历史上我最佩服的，那还是苏步青先生。他博学厚德，为人师表。我在复旦的几年，苏先生一直是我们的校长。他最关心的或者说他的宠儿就是数学系。在数学系里他最骄傲的，就是我们这一届学生。他对我们的要求也很严格。谷超豪、李大潜这些老师都是他的弟子。所以，在数学系，他是鼻祖，我们学生都很崇拜他。我经常去看他，毕业以后我也每年都去看他。他给我们很多很好的教诲，不仅是怎么做学问，而且是怎么做人。苏步青、夏道行、谷超豪，这些大知识分子，每个人有每个人的特点，跟他们在一起，确实是感觉不一样，给你一种人生的心理磨练。你就觉得是和一种精神境界高的人在一起，见贤思齐，与圣贤为伍。 然后你就会不断地提高自己，不仅提高自己的知识境界，也提高自己的精神境界。所以当时在学校里的很多老师，我们都很喜欢，特别尊重，甚至是崇拜。

苏步青、夏道行、谷超豪，这些大知识分子，每个人有每个人的特点，跟他们在一起，确实是感觉不一样，给你一种人生的心理磨练。

从第一年起，我就是校三好学生，后面三年都是市三好学生。市三好学生每个系只有一个。我的考试没有下过 85 分，只要有一门低于 85 分就不能评市三好学生。那个时候学习是非常艰苦的，很苦很累。我们七个人一个寝室，夏天非常热，没有电扇，热得睡不着。我们只能去冲个凉，然后跑回去睡一会儿，要不然睡不着。但是，这样有个好处，曾经沧海难为水，到后面，再苦的事情、再沉重的担子、再艰巨的挑战，不也就是这样么，就不怕了。我后来最不怕的就是考试，像夏道行老师这样的考试我都考过了而且还是八九十分，不差。

大学给予你的不光是知识。还有，第一，给予你一种进取精神；第二，给予你一种研究方法；第三，给予你一种科学思路。当时孙芳烈老师介绍我们看一本书，叫《科学研究的艺术》。这本书非常好，是俄国科学家写的。很薄一个小册子，可是讲了很多很好的东西，进取精神、研究方法、科学思路。大学学数学让我们学了一套理性思维。什么事情人家讲好，我总是说:“怎么好？好在哪里？”说富了富了，我说：“收入是多少？哪一类是多少？”分类，量化，这些都是学数学学出来的。很多人对我说：“你这个数学的逻辑思维特别强。”这就是学习的结果。

复旦帮助我走进了理性思维之门，在进复旦之前是没这种感觉的。能改变一个人命运最大的最普遍的方式，就是进入大学。在复旦，入学就表示我的人生转向另外一条路了。当时还是准备回去的，进了复旦以后才知道要统一分配，就不能指望回去了。统一分配，那希望做什么呢？当时是希望留在学校里，因为崇拜老师，所以想做大学教授。但事实上呢，在复旦转了一条路，并没有像自己预想的那样。因为我是共产党员，进校后就被指定做团支部书记。后来团总支改选，照例团总支书记都是教师做的，我是团总支副书记的候选人。但由于种种原因，团总支书记候选人在选支委的时候落选了，系党总支只能临时

把我推上去选团总支书记。选上团总支书记以后就一发不可收拾。

虽然大学毕业后留校，在管理系也做了一段教师，但还是走上了这条道路，做了五级团的书记，做了五个单位的党的书记。就此，这个书记就没再离身。后来即使我到了国家部委，做了副部长，也是兼机关党委书记。然后到省里做副书记，到市里做书记，到省里做书记。反正在复旦之前没做过书记，从进了复旦，到现在为止一直都是书记，也有二十七、八年了，做了十个书记。但这个不是我进复旦的初衷。你本来想走进这个房间，结果却走进了另一个房间。人的一生，还是要服从社会的需要，不服从社会的需要，什么事情也做不起来。

复旦帮助我走进了理性思维之门，在进复旦之前是没这种感觉的。能改变一个人命运最大的最普遍的方式，就是进入大学。在复旦，入学就表示我的人生转向另外一条路了。

谈起当时复旦的学风，我觉得主要是两条：第一叫做勤奋踏实，第二叫做追求真理。勤奋踏实，第一是非常勤奋，第二是非常踏实，没有人想弄点什么花头，而且从来没有。哪怕你考试考得不好，也没有什么可以抱怨的，就是自己功夫不到家。学习从来不敢分心，考试之前去打个电话就可能考不好，就是一点都不能分 心，叫做目不旁视。到考试期间，特别到后来考实变函数这种，真的目不旁视。复习阶段，最后的考研究生的阶段，有的同学，你对面看到他，他却没看到你，他脑子完全集中在思考数学问题上。我们在二号楼，离数学楼很远，考试期间去数学楼考场，一路上大家都不讲话。不能讲话，你一讲话也许就把你脑子里记的那些定理公式都冲跑了。冲跑了 20 个公式里的一个，你不就做不下去了嘛。

同时，大家也追求真理。大家不只是学习，我们也非常关心社会，关心真理。我们进校时还没开十一届三中全会。尽管学业繁忙，但我和世经系的王战还是一起成立了社会经济体制改革研究小组。卢新华写的《伤痕》，影响很大，这都是我们身边的同届同学。当时整个大学里面就是一种处变不惊的氛围，什么事情都可以做，做了什么事情也没什么了不起。哪一个大人物你都能接触，像过去我们只能在书上看到的苏步青先生，你也能跟他接触，跟他讨论问题，但是你还是那个普通的学生。大学是一个思想解放的场所，有一种包容与活跃，有一种自由进取的氛围，有不论权威还是新生之间的讨论和交融，这在社会其它地方是看不到的。

现在的复旦比我入校时，一个是大了，校园大了；一个是高了，那些教学楼高了；还有就是广了，复旦教授研究的范围广了。至于复旦的精神，我认为是“旦复旦兮，吾将上下而求索。”一个学校的优良传统，一个民族的优秀精神，会长久地发挥作用。我希望复旦人保持一种创业的热情，创新的勇气，创优的追求。 现在复旦人这么多，我相信要比我们那一代有更大的作为，但是最终还要靠实践的检验。

致谢：复旦大学出版社授权本刊全文转载此篇访谈，在此表示衷心感谢。

受访者介绍：

李源潮，复旦大学数学系 1977 届校友，现任中共中央政治局委员、中央书记处书记，中央组织部部长。

聊聊数学家的故事

ukim

（连载五）

写给那些，喜欢数学和不喜欢数学的人们

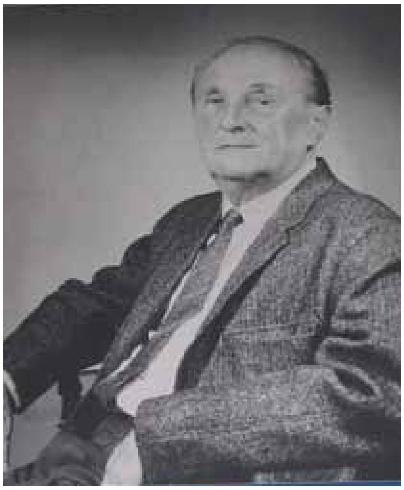
写给那些，了解数学家和不了解数学家的人们

故事二十二：波兰数学家

开始说说波兰的数学家，从巴拿赫 (Banach) 开始，他是最伟大的波兰数学家。巴拿赫在数学界的登场是一段美丽的传说 : -))

1916 年的一个夏夜，斯坦豪斯（Steinhaus）在一个公园里散步，突然听到了一阵阵的谈话声，更确切的是有几个词让他感到十分的惊讶，当听到“勒贝格（Lebesgue）积分”这个词的时候，他就毫不犹豫地走向了谈话者的长椅，原来是巴拿赫和 Nikodym 在讨论数学。斯坦豪斯就这样子发现了巴拿赫，并把他带到了学术界。他说：“巴拿赫是我一生最美的发现。”

波兰学派的人似乎喜欢在咖啡馆里讨论数学，Kuratowski 和斯坦豪斯是有钱人，他们一般在高档的罗马咖啡馆里谈论数学；巴拿赫，乌拉姆（Ulam）和 Mazur 穷一些，整天呆在一个苏格兰咖啡馆里，那里的老板挺不错，即使过了营业时间，也不会赶他们。这样子很多年轻的



波兰数学家斯坦豪斯 (1887-1972)

数学家都来到这里，每次有什么重大的发现，就记录在一个大的笔记本里，并保存在店里，这就是著名的苏格兰手册。当然，老板对他们好的一个原因就是他们每次都可以消耗大量的啤酒，据说有一次聚会长达 17 小时，其间，巴拿赫不停地饮酒，乌拉姆说巴拿赫是难以超越的，英文的原文是 difficult to overlast and to overdrink Banach，主要指能长时间豪饮。

德国人在二战的时候，需要大量的寄生虫繁殖疫苗，于是就雇佣了很多波兰人，把装有寄生虫的盒子戴在他们的手腕上，以人体作为寄主。巴拿赫曾经就拥有这么一个盒子，其报酬是不会像 Saks 一样被杀死。一半以上的波兰数学家死于战争。

故事二十三：剑桥的牛顿和哈代

牛顿名言：“我不知道世人怎样看我；可我自己认为，我好像只是一个在海边玩耍的孩子，不时的为拾到更光滑些的石子或更美丽些的贝壳而欢欣，而展现在我面前的是完全未被探明的真理之海。”这段话不同于牛顿说的那段“站在巨人的肩上”，因为“肩上”那句话是他出来吹捧一下胡克（Hooke），或者说讽刺一下这位挑战者，那个时代总是为着各种东西的发明权而喋喋不休。

牛顿的一生落落寡合，没有结婚，也没有知心的朋友，人们结交他

英国数学家哈代 (1877-1947)

都是因为他很高的地位和渊博的学识。一个同事回忆说他只见过牛顿笑过一次，当时，有一个人问牛顿欧几里德的《几何原本》如此的老朽，不知道有什么价值。对此，牛顿放声大笑。

对很多人来说，牛顿的贝壳尽管光滑尽管美丽，确实不如一块肥皂有用。数学家做的事情的确是这个样子，一种孩子般的游戏，追求一种纯粹的快感。牛顿之后的几百年，剑桥另一个大名鼎鼎的数学家哈代（Hardy）也说过这种话：“从实用的观点来判断，我的数学生涯的价值等于零。”

既然扯到哈代就说说他的轶事吧。他这个人有着多种怪癖，譬如永远不会希望见到镜子之类的，每次到一个旅馆，总是用毛巾把各个地方的镜子都遮起来。不说这些乱七八糟的，说一下子他用“数学”解决的恐船症。哈代每次做船的时候，总是怕船沉了。克服这个东西的一个方法是，每次不得不坐船航行的时候，他会给同事发个电报或者明信片什么的，说已经搞定了黎曼猜想，回来之后会给出细节的。他的逻辑是，上帝不会允许他被淹死，否则这又将是第二个类似于费尔玛大定理的事情。

故事二十四：更重要的是做人

爱尔多斯（Erdos）的沃尔夫奖金有5万美元之多（在三十年前是大数目），他却只留下了720美元，其余的都捐给了以色列作为奖学金。他说：“我记得有人告诉我说720美元在我已经很多了。”

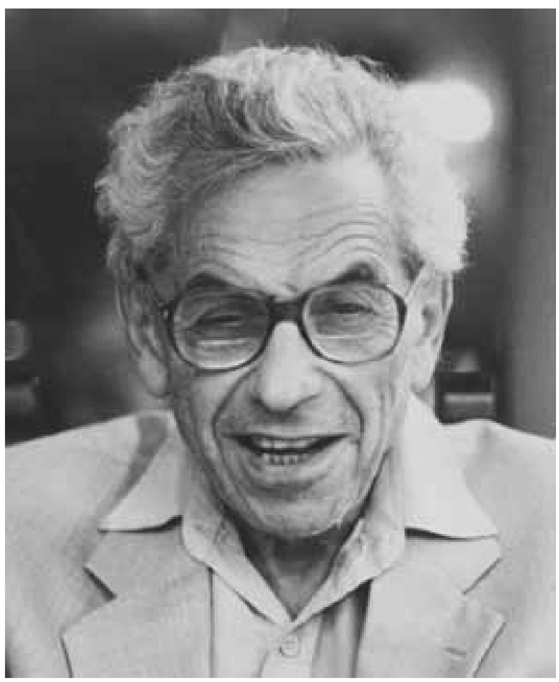
贝尔（Baire）是个公认的大好人，由于数学上的贡献，得到了瑞士颁发的一份奖金，有1000法郎之多，结果最后拿到了1500法郎。贝尔就问他的朋友Montel说：“竟然多了500法郎呀。我该怎么办，是应该给一位学生发奖学金，还是自己买一件外套？”Montel建议买外套。

北大王诗宬老师90年代初得到了一份3万元的奖金，他全部捐给了希望工程。90年代初3万块钱的概念大家是清楚的。

再说一段王老师的评论，记得看过阿蒂亚（Atiyah）的一个小册子，他评论道瑟斯顿（Thurston）能够自如地看到高维的复杂图形，托马逊（Thompson）可以“看”到一个群。瑟斯顿和托马逊都是得过菲尔茨奖的人。王老师给我们上课的时候，也做过这样的评论，说只要听懂了瑟斯顿的一句话就可以写一篇论文，威腾（E.Witten）就是一个神。呵呵。不过他说得更有意义的是紧接着的评论：“数学家有很多种，一种是像瑟斯顿这个样子的，很聪明，所以做的工作很出色；另外一种是尽管天资不是很出众，但是自己能够耐得住寂寞，非常的刻苦，所以后来也是很出色的”。

故事二十五：“那就是我”

曼德尔布罗特（Mandelbrojt）一次在列维奇维塔（Levi-Civita）家里做客，恰好朗道（E. Landau）去玩。朗道在当时是成了名的前辈，于是列维奇维塔举行了一个小小的聚会。其间，一个老先生对列维奇维塔讲，最



匈牙利数学家爱尔多士 (1913-1996)

近有一个荷兰的年轻人 Mondebroht 做的工作很出色，朗道问到那是谁呀？曼德尔布罗特不得不跳出来解释说，那个人不是荷兰人，是波兰人；那个人也不叫 Mondebroht，叫 Mandelbrojt；那个人其实就是我……

做一个注释，上次有人说 Mandelbrojt 的拼写有错误，我又去核实了一下，至少这个拼写的存在性是可以肯定的，可能并不唯一。反正他是现在那个最出名的做出了美丽的分形图片的孟德尔布罗特（Mondelbrolt）的叔叔。

王老师也有类似的经历。当年在伯克利加州大学的一个讨论班上，一个牛人主持，讲解一篇论文，王老师在其间提了一些很不错的想法。课下，那个牛人问阁下贵姓？“姓王。”牛人说，太巧了，我们今天讲的论文也是一个姓王的中国人写的。“那就是我……”

北京大学王诗宬院士

故事二十六：女数学家故事（1）

开始说一下 mm 数学家。她们做出的成就的的确确比不上男数学家的成就，但是我们依然能够发现她们的事迹中有很多的伟大，很多的美丽。

古希腊数学家希帕蒂亚（约 370--415）

从古希腊说起吧。那个时候，的确是一个很民主的时代，对于女性的歧视要远好于后来，很多伟大的数学家哲学家对女性参与数学的态度还是很好的，譬如说毕达哥拉斯（Pythagrass）学派当中就有女的信徒。毕达哥拉斯本人就很鼓励女性学者，当年有个兄弟会之类的东西，里面就有 28 个女孩，其中有一个叫做西诺的，后来就被毕达哥拉斯骗去做老婆了。这个女孩在当时是个比较有影响的数学家。苏格拉底（Socrates）和柏拉图（Plato）也曾经邀请过女性去他们的学院讲学。

从他们往后，女性在很多的行业中受到了歧视，在哲学数学自然科学这些领域更是如此了。

有一个令人心痛的故事，讲的是希帕蒂娅（Hypatia），她所处的时代就是柏拉图他们往后那么一点的时候。希帕蒂娅本身是个很优秀的数学家了（在那个时代），她的演讲很出名，而且解题也是高手，其父亲是亚历山大的一位数学教授。经常有一些数学家找她询问一些题目的做法，她也很少让大家失望。一个小故事说有人问她为什么不结婚，她回答说她已经和真理订了婚。不过希帕蒂娅后来极为悲剧，有个叫做 Cyril 的什么教长之类的人，声称数学家哲学家这帮人为异端，对他们大加残害，手段令人发指。在一个封斋的日子里，希帕蒂娅被从马车上拖到教堂，剥光衣服，身上的肉被一群狂暴的人用牡蛎的壳刮了下来。

未完待续

连载四

赵慈庚

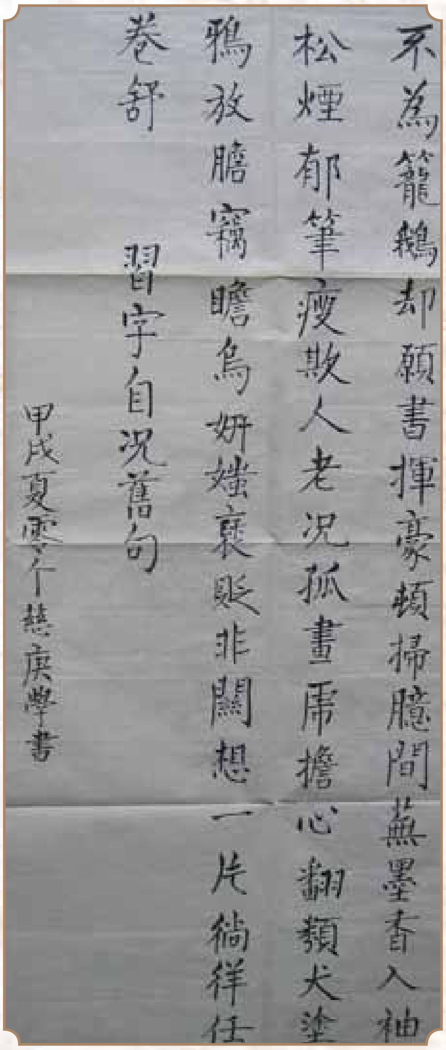
—— 妍媸褒贬非关想，一片徜徉任卷舒

蒋迅

当我拿起笔想写写赵慈庚先生的时候，发现自己对先生的了解其实很少。我谷歌了一番后，特别是在读到了马彤军和白尚恕先生写的文章“赵慈庚”后，终於形成了这样一段描述：赵慈庚 (1910 年 3 月 1 日 - 1999 年 2 月 4 日)，教授。直隶 (今河北) 定州人。1935 年毕业于北平师范大学数学系。曾任西北工学院副教授。建国后，历任北京师范大学副教授、教授，北京市高等数学研究会第一届副理事长。多次参与制定中学数学教学大纲，倡导和组织数学竞赛。粉碎“四人帮”后，他和北京大学江泽涵共同主编了一套《大学基础数学自学丛书》共 13 卷，并亲自撰写了其中的第一卷《一元函数微分学》。后来又合译卢丁的名著《数学分析原理》，这本书在他去世后又修订再版。1987 年上海教育出版社还整理出版了《赵慈庚数学教育文集》。赵慈庚先生因病于 1999 年 2 月 4 日在北京逝世，享年 89 岁。

我得以见到赵慈庚先生是在 1977 年刚恢复高考的时候。当时听说要高考了，我是既兴奋又着急，根本不知道该如何下手。好像是北京市数学学会邀请赵慈庚先生在北京科学会堂作数学题解题方法的报告，我好歹弄到了一张票，於是有机会第一次听到一位大学教授的报告。讲了些什么已经记不清了，只记得远远地看到了台上一位善良的老者。

1986 年赵慈庚先生退休，其实在退休前就因为年迈而不再担任固定的教学任务，但他始终在用自己的方式为数学

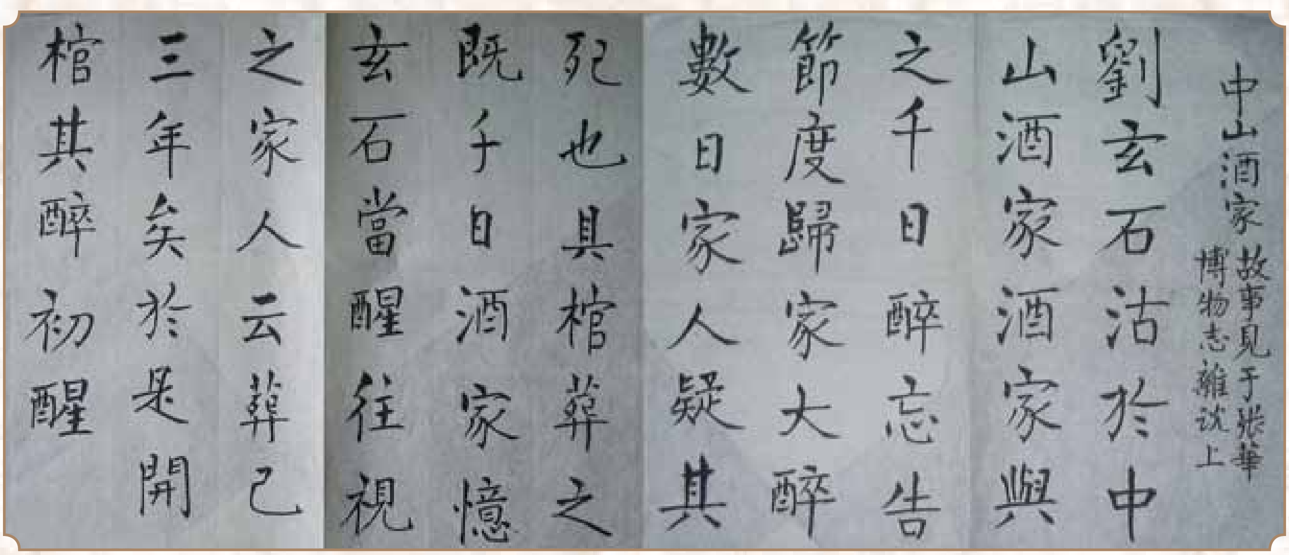


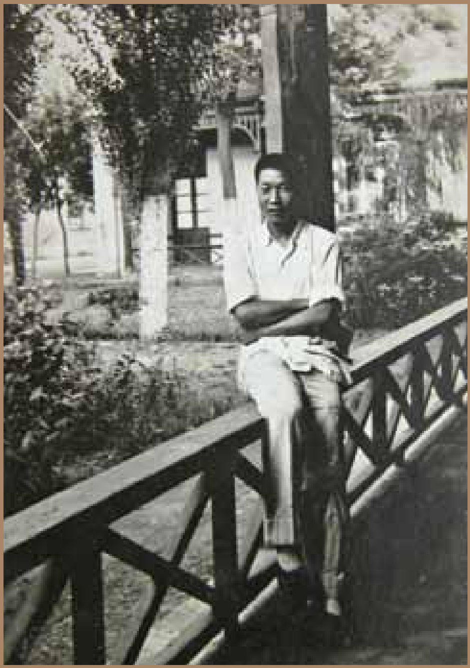
事业发挥着余热。马彤军和白尚恕先生的文章说，“除了整理自己的文稿外，他还花费了许多精力为中青年教师审核或修改论著。他对这些事情特别认真，一丝不苟，订讹勘误。”对这一点，我是耳闻目睹了的。我曾经看到过先生修改的手稿，蝇头小字遍布稿纸，有时是整段地改写，就像对待自己的作品那样。当时我的印象特别深刻，还从他的手稿中学习到一些文字编辑中的特别符号。后来自己写论文中还经常用到。

先生自幼年起就打下深厚的笔墨功底。这里是先生送给家父的两祯书法。在先生诞辰一百周年纪念的时刻，我特地拿出来与大家分享，以表晚辈对先生的崇敬。

左面这幅写的是：“不为笼鹅却愿书，挥豪顿扫臆间芜。墨香入袖松烟郁，笔瘦欺人老况孤。画虎担心翻类犬，涂鸦放胆窃瞻乌。妍媸褒贬非关想，一片徜徉任卷舒。习字自况旧句　甲戌夏零个慈庚学书”这是赵先生的一首旧诗，里面充满典故。相传，王羲之性好鹅，曾为一道士写了本《道德经》，换取白鹅一笼。后世往往释为模仿鹅之形态动作以入书法。第五句第二字疑为“虎”。古人有名言：“刻鹄不成尤类鸭，画虎不成反类犬”。书法作品常常这样写虎字。《诗·小雅·正月》：“哀我人斯，于何从禄？瞻乌爰止，于谁之屋？”，这里泛指富人屋上的鸟。“妍媸”指美好和丑恶，“徜徉”是徘徊的意思。从落款看，此篇写于“甲戌年”，这是干支年号，应为 1994 年。“夏”是指夏天。“零个”是赵先生的“室名”，“零”是谦词，“个”字很费解，可能是“侧室”之意。从整篇来理解，我猜想这是先生对自己一生，特别是退休后的生活的总结，正可谓“自况”。先生的一生，历经民国、抗战、反右、文革。到六十多岁以后才见到了拨乱反正，教育重新走上正轨。先生在风风雨雨中一直保持着清醒的头脑，坚守在数学教育的岗位上。这些在马彤军和白尚恕先生写的“赵慈庚”，赵籍丰老师写的“怀念我的父亲 ”和靳邦杰老师的“缅怀故人 深深的悼念 ”里记述得很清楚了。

下面一幅的这一段是先生从张华《博物志杂说》上抄录的：





1 | 2
3 | 4

图 1：青年赵慈庚
图 2：1961 年在北戴河疗养，那时有教师疗养制
图 3：1980 年代在家里
图 4：1935 年在北师大读书期间在和平门校址的校园里

『中山酒家』

故事见于张华博物志杂说

刘玄石沽于中山酒家，酒家与之千日醉，忘告节度，归家大醉。数日，家人疑其死也，具棺葬之。既千日，酒家忆玄石当醒，往视之，家人云葬已三年矣。於是开棺，其醉初醒。

张华 (232 - 300) 西晋文人，字茂先。张华死于非命，后被昭雪。张华编撰《博物志》，含十卷。故事说，刘玄石在中山一酒家喝酒，酒家给他“千日醉”，但忘了告诫他节制有度。他回家大醉，数天不醒，其家人疑他死了，就备棺把他葬了。到一千日时，酒家想起刘玄石应该醒了，就前去看望，他家里人说，已安葬三年了。於是把棺材打开，他的酒醉正好刚醒。於是有“玄石饮酒，一醉千日”的说法。因特网上大多是“白话文”化了的节录，这样的原文抄录也许是第一个。这段手迹凸显先生的文言文的功底。我在北京师大数学学院的网上还看到一篇先生在世时写的“1935 年数学系班史”，更印证了我的印象。

我最喜欢先生题词中的“妍媸褒贬非关想，一片徜徉任卷舒”这两句。我自己也已经过了而立之年，虽然经历远不及先生之多磨难。但他的精神永远对我是一个指导，一种激励。一旦认准了自己的路，我将义无反顾走到底。尽自己的所能为社会做出贡献。

1 | 2
3

图 1：1950 年代的赵慈庚

图 2：晚年的赵慈庚

图 3：赵慈庚先生去世前最后与系里老师合影

作者衷心感谢陈方权老师在作者写此文时提供的帮助

读郭沫若一篇短文有感

丁 玖

偶然翻到郭沫若先生一九五八年十二月十八日夜写的一篇短文，是他当天读了《人民日报》第八版一组《孩子的诗》的感想，其中前一段赞扬话这里不必重复，但后一段批评话颇有现实意义。这段话录之如下：

“但在十二首《孩子的诗》中，有一首可有问题。就是《也够太阳晒几天》的那一首。那是出于抄袭。我把四川南溪县的一首民歌和这首《孩子的诗》一并写在下边，便可以看出。

《四川民歌》
社里人口好几千，
人多力大定胜天。

每人挥下一滴汗，
也够太阳晒三天。
（已选入《红旗歌谣》）

《孩子的诗》
公社社员千千万，
人多力大胜过天。
每人流下一滴汗，
也够太阳晒几天。

这两首基本上相同，只是改了几个字。孩子们是善于模仿的，这样或许不能说是抄袭，但我觉得不好拿来表彰。

近来在大跃进的民歌中往往有这种倾向，即是把别处的民歌抄来，改头换面的换几个字便作为自己的东西。民歌的产量既多，谁也不能普遍看到。因此往往被混过，更因而被选或被称赞。这样实在是不太老实的作风。孩子可恕，大人断不可恕！”

听：大人抄袭，断不可恕！这就是时任中国科学院院长的郭沫若先生对“抄袭”现象的明确态度。他不光在立场上旗帜鲜明，在行动上也雷厉风行。你看，一见到中国第一大报未能发现的抄袭现象，尽管只是一首“可恕”孩子的诗，但他当晚就一针见血地对大人们提出了及时的忠告。

我相信一九五八年，“抄袭”，尤其是学术界的“抄袭”如有，大概还是“凤毛麟角”之现象。五十二年过去了，今年我们要庆祝中国共产党诞生九十周年，我们要纪念辛亥革命一百周年。伟大祖国变化巨大，大多走向好的方向，如国富民强；少数现状令人忧虑，“学术腐败”便是一例，其中，“抄袭”已成风气。

近来，我重温了 1937 年出版的美国数学家贝尔（Temple Bell）的名著《数学巨人传》（Men of Mathematics）。在谈论“数学王子”高斯的第十四章，作者告诉我们高斯的许多科学成果并

郭沫若

未发表，而只记载在他二十岁开始的“科学日记”上。出版，对他来说，“完全是次要的事”。他科学写作的原则是：“在自己身后只留下完美的艺术品，要极其完美，达到增一分则多，减一分则少的地步。”读到这些为科学负责任的伟大品质，我深深感动。“雁走留声，人走留名”，高斯在其身后，已被歌唱了一百五十年，还将永远被人歌唱。

我想起四年多前去世的匈牙利裔美国数学家哈尔莫斯（Paul Halmos）曾经告诫那些想发表文章的作者的幽默之语，大意是说：想象有人愿用一千美元换你不发此文，如你犹豫片刻，则该文就无发表之必要。哈尔莫斯借用的一千美元“学术良心磅秤”是条颇为俏皮并已数学化的关于“学术出版”的准道德标准线。如果我们的大学老师都听他的劝告，不光大跃进式的“凑数”论文数目血压计水银柱般地直线回落，而且论文质地会毫不犹豫地“芝麻开花节节高”，剽窃、抄袭现象也会像钱塘江落潮似地急剧减少，结果之一是我们被别人尊敬的程度就会像牛市股票市场的“沪深指数”那样大涨不止。其实大多数人都懂得，坚守道德标准产生的心灵快意较之不择手段获得的物质享受更为使人身心健康，这在人们生老病死之时可能感觉得更为强烈。

我以为，为了个人利益，只字不漏地抄袭别人的文章，照郭沫若先生比较客气的说法，“实在是不太老实的作风”。如果连被抄的段落决不注明出处，被抄的文章都不列在“参考文献”之中，那作风简直是“不太老实”的平方了！“抄袭”和“剽窃”是我们科技教育界的头号大敌，是不耻于知识分子称号的恶行，是学术品质、职业道德沦丧之所的入场券，是应被剥夺“教鞭”的大罪之一。《数学文化》杂志去年四月的创刊号就转载了美国工业与应用数学学会（SIAM）主席阿诺德（Douglas N. Arnold）在 SIAM News 上发表的严厉谴责某些学术不诚实现象的英文文章和中文翻译，说明该杂志的编委会旗帜鲜明地反对学术腐败，这对读者大有好处。我们的科学院、教育部和各级领导，应该像已故郭沫若院长和 Arnold 教授那样，继续把“反文章抄袭”，把“反学术腐败”当作 2011 年急不容缓的学术界头等大事来抓。只有这样，我们有自知之明的知识分子才会赢得大众的尊敬，我们模仿能力强的学生群体才有了真正的“灵魂工程师”。

2011 年 3 月 31 日完稿

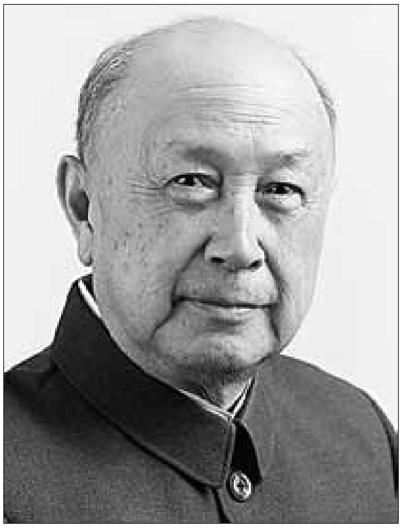
钱学森的晚年遗憾和温家宝的视察照片

丁 玖

2009 年 10 月 31 日钱学森先生仙逝后，广大科技、教育界人士怀念之余，都在反复咀嚼他晚年向前去探望的温家宝总理吐露的一句肺腑之言、遗憾之语："为什么我们的大学培养不出杰出人才？"这句"钱学森之问"够让我们好好想想的，大家都为究其原因、寻找良方而绞尽脑汁。

"钱学森之问"的答案在哪里？依我看，它已形象地出现在一张众所周知的温总理视察照片上。2009 年教师节前夕，一直关注教育的温总理来到北京第三十五中学调研，并与初二 5 班的学生同上了五堂课。全国大小报纸广为报道，持续多日。同月 14 日，《人民日报》海外版第二版整版以大标题"我的同桌是总理"刊登了该班同学讲述的"与温爷爷一起上课的感人细节"。当我看到这一版面时，首先印入眼帘的是其左上角那幅引人注目的大照片。

照片上有七张面孔：坐在最后一排的总理和他前几排附近的六位学生。有六副眼镜，包括一副老光眼镜。除了那个戴了近视眼镜的唯一女孩外，



钱学森

五个男孩写字时都是低头弓腰，眼睛几乎贴近桌面，靠近总理的那两位最甚，好像非要让他注意到不可。只有温总理一人，年近七十，坐姿正确，腰杆笔直，保持从小养成的好习惯，看上去更像个令人喜爱、健康成长的好学生。

一滴水反映太阳。按照随机样本的统计规律，这张照片让我们想像，全国几千万中小学生中，有多少人处于学习的“非正常状态”？我不知道钱学森生前是否见到这张照片。若是，他是否已隐约感到答案就在眼前？这位闻名世界的杰出人才，他的脑海里也许会涌起一幕幕读书时代的“如烟往事”：宽严并举的老师、自由支配的时间、文理并茂的环境、音乐元素的熏陶。最后，受业于世界名师，志在报效祖国的这位天才就是这样成长的。

现代人才，包括杰出人才，从来都不是靠死板、僵化的“应试教育”培养起来的。这样的教育也许能大批生产鲁迅先生笔下会写四种“茴”字的孔乙己那一类“人才”。杨振宁教授曾形象地比较过中美两国中学生三角函数的学习过程：如果美国学生为了理解而做十道题目，中国学生则为了高考要做一百道甚至一千道，大都是机械、重复的训练。结果是，前者有大量时间“兼学别样”，挖掘创造性思维的潜能，身体也锻炼得生龙活虎；后者可能初等知识“学富五车、才高八斗”，但创造性思维之井枯竭，人云亦云，别无创新，加上健康毁了，更登不上杰出人才的阶梯。

希望温总理的这张照片不光忠实记录了日理万机的他亲临教育一线的感人情景，更给校长、老师们上了一堂怎样痛改触目惊心教育现状的难忘之课！

2009 年感恩节初稿于美国哈蒂斯堡市

2011 年元旦定稿于北京

注：作者丁玖为美国南密西西比大学数学系教授。

白天鹅的反击

——书评：《黑天鹅》

万精油

四年前纽约时报的畅销书排行榜上有一本叫《黑天鹅》的书，号称是二次世界大战以来最有影响的 12 本书之一。一本书的畅销有很多原因，我一般也不赶时髦去读畅销书。但这本《黑天鹅》是讲与统计有关的事，与我的工作和学习有关，于是找来读了一下。读完后感觉很不好。不是说它完全没有可取的地方，只是觉得它没有一些书评写得那么好。更重要的是我很不喜欢作者 Taleb 的口气与方式。常常是为了说明他的一个观点，不惜夸大事实，甚至到了荒谬的地步。一般来说我看过的好书我都要向朋友推荐，特别好的我还要写书评。我不认为《黑天鹅》是一本好书，看过也就看过了，没有向朋友提起。没想到我参加的一个邮件组最近有人多次提起这本书，而且赞扬有加。我终于忍不住参加了讨论，不知不觉写了很多，现在就把它们整理一下，算是一个书评。也破了我只给好书写书评的记录。

所谓黑天鹅有两个特点：1. 罕见（不可预测），2. 影响巨大。比如，911，海啸等等。Taleb 的定义其实还有第三条：3. 马后炮。说是这种事件发生

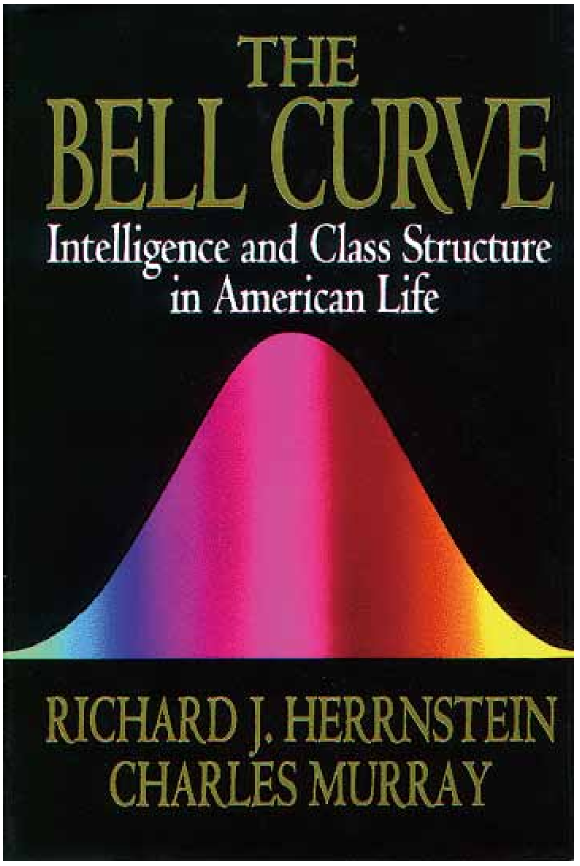
后，人们通常都企图通过分析找出它的规律从而使其成为可以预测事件。不过大家讨论的时候一般只注重前两条。

Taleb 的主要观点是，罕见的黑天鹅一旦出现，必然产生巨大影响，可以抹消平常小波动的累计效应，因而平常的小波动可以忽略不计。Taleb 甚至总结出一套理论。说是平常的小波动产生于均值世界（Mediocrestan），而黑天鹅产生于极值世界（Extremestan）。现实生活中对我们真正有影响的都是极值世界的黑天鹅，均值世界的东西影响可以忽略不计，这个世界基本上可以说是这些黑天鹅效应累计起来的。有鉴于此，那些在均值世界适用的理论在现实生活中没有什么用处，大学里讲正态分布纯属于混饭吃，你如果这辈子没有听说过钟型曲线算是你的福气。好了，Taleb 的谬论暂时说到这里，该说一说我们白天鹅的观点了。

首先，我们来看一看均值世界的事件的影响是否可以忽略不计。诚然，一个九级地震可以在几分钟的时间夺去成百上千，甚至上万的生命。但是，一个九级地震这样百年不遇的黑天鹅所影响到的人数却比不上很多随时存在的小事件，比如世界上因车祸而死的人数就比因一个九级地震而死的人多得多。而车祸事件就是均值世界天天发生的可以有模型的事件。再比如，一个百年不遇的海啸，在几个小时的时间里可以毁掉几千甚至上万栋房子。但世界上被白蚁毁掉的房子比它要多得多，虽然这个过程或许要几十年，但它影响的人却要多得多。这也是一个均值世界随时都在发生，可以有模型的东西。就拿 Taleb 多次举例用到的畅销书来说，《黑天鹅》这样的黑天鹅，最多是对 Taleb 本人有很大影响，对广大读者来说，买《黑天鹅》这本书的钱只是他买许多书中的一小部分。绝对不能说几本畅销书累计起来就构成了出版史。再比如，全球变暖，绝不是炸一颗原子弹，或发一场百年不遇的大火这些黑天鹅事件所引起的。更重要的因素是人类日常生活习惯所产生的长期效果。总结起来，我们的结论与 Taleb 的论断恰恰相反。这个世界不是黑天鹅的效应累计起来的，为数众多的白天鹅累计效应才是这个世界的重要组成部分。相对于白天鹅事件来说，这些黑天鹅事件效果可以忽略不计。黑天鹅事件之所以显得影响巨大只不过是因为它们来得突然，单位时间效应很大，给人们留下很深的印象而已。人们一般都对突出的东西有印象，而不一定对重要的东西有印象。比如一个人脸上有个痣会给你留下很深的印象，但他脸上最重要的眼睛，嘴巴和鼻子却不一定会给你留下什么印象，因为这些东西大家都有，很普遍。

波士顿科学博物馆里的钟形曲线模型

其次，我们再来看这个世界是不是如Taleb所说几乎都是极值世界，钟型曲线毫无用处。波士顿科技博物馆里的数学宫中有一个一面墙似的透明玻璃箱。玻璃箱里面横插着许多小棍子。顶端正中有一个孔，里面不断有乒乓球一样大的小木球往下面掉。小球在掉下来的时候碰到那些横插的小棍子，随机地往左或往右掉。再碰到下一个棍子又随机地往右或往左掉。就这样不停地或左或右，一直掉到最下面堆积在那里。虽然小球每一次向左或向右都是随机的，但下面堆积起来的小球总是形成几乎完美的钟型曲线。这个玻璃模型箱实际上向人们展示了统计上的一个重要定理——中心极限定理。这个定理说不管什么随机分布，重复多次以后，它们的均值都呈正态分布，也就是钟型曲线。我们平常所关心的许多量都可以看成是不断重复以后的结果，所以钟型曲线总可以用上。在理论上，从微观的统计物理到宏观的天体物理都会有钟型曲线的应用。在现实生活中，钟型曲线的应用更加广泛。比如每个人的身高，对一个人来说基本上是一个常数，对一个群体来说就呈正态分布。小孩子成长过程中，医生总会告诉你他（她）的身高在同龄人中处在什么位置。甚至连一些抽象的量，比如智商，也呈正态分布。事实上，许多年前有一本很有争议的关于人类智商的书，书名就叫《钟型曲线》(The Bell Curve)。其它的例子举不胜举。人口普查用钟型曲线作模型，美国联邦药物管理局(FDA)对新药的批准也是以正态分布为依据。可以说钟型曲线无处不在，而不是如Taleb所说这个世界几乎都是极值世界。



著名的书：《钟形曲线》

Taleb很喜欢走极端。为了要把他的片面想法推广，不惜夸大事实。如果他说钟型曲线有时有用，但在金融上不好用。这或许是事实，因为他在华尔街干过，对金融的东西或许有很深的认识。但是，如果只说钟型曲线在金融上不好用，标题就不响亮了。为了达到语不惊人誓不休的效果，标题一定要响亮，夸大或歪曲事实也没有关系。于是就有了诸如“The Bell Curve, That Great Intellectual Fraud” 这样的耸人听闻的标题。

为了书卖得好，书中到处都是这样“惊人”的句子。说我们连明天是不是还活着都不能有准确的答案，居然还有人去关心小小的基本粒子是测得准还是测不准。欧几里得研究三角形在他眼里是一钱不值的，因为大自然从来就没有真正的三角形。因为他崇拜孟德尔布罗特（Mandelbrot），就把他说成是全世界最有思想的数学家，别的都是跟屁虫。孟德尔布罗特的分型（Fractal）比三角形，四边形更自然。我想问他开车为什么不走Peano曲线。他的口号是“一个例子就可以打翻你的所有理论”。他没有搞清楚他的例子或许根本就不满足数学家的理论的要求。他根本搞不懂数学家为什么要严谨，要抽象。他在书中把搞量子力学的人都叫作phony。他真懂量子力学吗？他自称是哲学思想家。他的书中充满了夸张狂妄的哲学论断。有一位数学家对《黑天鹅》作评论时说Taleb是“reckless at times and subject to grandiose overstatements; the professional statistician will find the book ubiquitously naive.”

我完全同意上面那个数学家的评论。还要加一条：“你如果没有看过《黑天鹅》，是你的福气”！

万精油

2011年4月27日