几何之美 I

宗传明

本文受到国家 973 项目 2011CB302400, 国家自然科学基金项目 11071003 和长江学者奖励计划的资助。
作者感谢贾朝华教授和项武义教授的润色建议。
通讯地址：cmzong@math.pku.edu.cn

引言

按照许多数学先哲（如庞加莱，哈代和冯 • 诺依曼等）的观点，数学不仅是一门科学，也是一门艺术。即数学也是一门追求独创和美的学问。

数学中确有一些艺术杰作：自然优美的问题，巧夺天工的构思，荡气回肠的结局。其独创性和优美程度绝不亚于柴科夫斯基的芭蕾舞剧或者雷诺阿的名画，只是对大众来说更难理解和欣赏而已。在这一系列短文中，我们将展示几何学中的几件“艺术珍品”。

对于一个数学家来说，欣赏学习他人的杰作不仅是为了（有可能）直接用到自己的工作中去，更重要的是为了提高修养，开阔眼界。从而使我们远离平庸，接近伟大。

本文将介绍波兰数学家博苏克（Karol Borsuk，1905-1982）于 1932 年提出的一个几何猜想。它非常直觉并且在二维空间和三维空间都是正确的。然而，这一看上去百分之百正确的猜想却于 1993 年被美国数学家 J. Kahn 和以色列数学家 G. Kalai 用组合的方法 99.9% 地否定了。更让人惊奇的是，他们的论证方法就像魔术一般，让人回味无穷。

1 观察

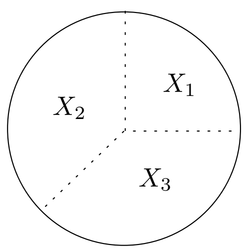
一个点集 X 的直径 $d(X)$ 是指它的点之间的最大距离。确切地说，

$$d(X)=\sup\{\|x, y\|: x, y\in X\}$$

其中 $\|x, y\|$ 表示 x 和 y 之间的欧氏距离。

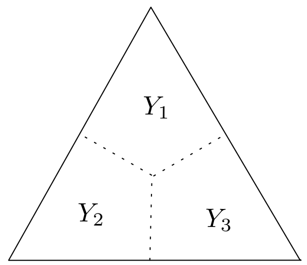
一个单位圆盘 X 可以被分为三块 X_1, X_2 和 X_3 使得每块的直径都小于圆盘的直径。即

$$d(X_i) < d(X),\quad i = 1, 2, 3.$$



一个三角形区域 Y 可以被分为三块 Y_1, Y_2 和 Y_3 使得每块的直径都小于原三角形区域的直径。也就是说

$$d(Y_i) < d(Y),\quad i = 1, 2, 3.$$



你能将圆盘或正三角形分成两块使得每块的直径都比原集合的直径小吗？

基于以上观察，人们容易猜测到如下结论：

定理 1. *每个二维的有界集合 X 都可以被分为三个子集合 X_1，X_2 和 X_3 满足*

$$d(X_i) < d(X), \quad i = 1, 2, 3.$$

我们扼要介绍一下这一定理的证明思路。为了方便，我们用 $\overline{X}$ 表示 X的闭包，用 $\widehat{X}$ 表示 X的凸包。所谓凸包，即指

$$\widehat{X} = \left\{\sum \lambda_i x_i : \lambda_i > 0,\ x_i \in X,\ \sum \lambda_i = 1\right\}.$$

形象地说，$\widehat{X}$ 就是用橡皮筋将 X围起来所得到的区域。显然，对任一有界集合 X我们都有

$$d(X) = d(\overline{X}) = d(\widehat{X}).$$

所以，对定理 1 来说只需研究凸区域[注 1]即可。

假设 K 为一个凸区域，$\mathbf{u}$ 为一个单位向量并用

注 1

在 n 维欧氏空间，一个集合 K 被称为一个凸体，如果它是一个具有内点的有界闭集且满足

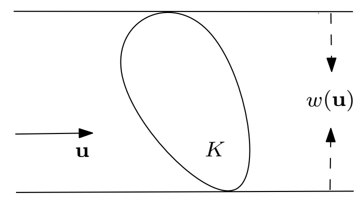
$$\lambda \mathbf{x} + (1-\lambda)\,\mathbf{y} \in K, \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in K, 0 \le \lambda \le 1.$$

也就是说，连接 K 中任意两点的整条线段都属于 K。容易验证，球，单纯形和立方体都是凸体。特别地，二维凸体被称为凸区域。

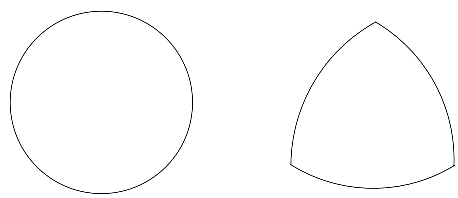
注 2

等宽凸体是一个非常重要的几何概念，已有上百年的历史，相关文献不下三百篇。想了解这一专题的读者可参考 Chakerian 和 Groemer 发表在论文集 Convexity and Its Applications (Birkhäuser，1983) 中的综述文章。

$w(\mathbf{u})$ 表示 K 在 $\mathbf{u}$ 方向的宽度（如下图所示）。



如果存在一个只与 K 有关的常数 c 使得 $w(\mathbf{u})=c$ 对所有的单位方向都成立，我们就称 K 为一个等宽凸体[注 2]。例如，下图中的两个凸区域都是等宽凸体。

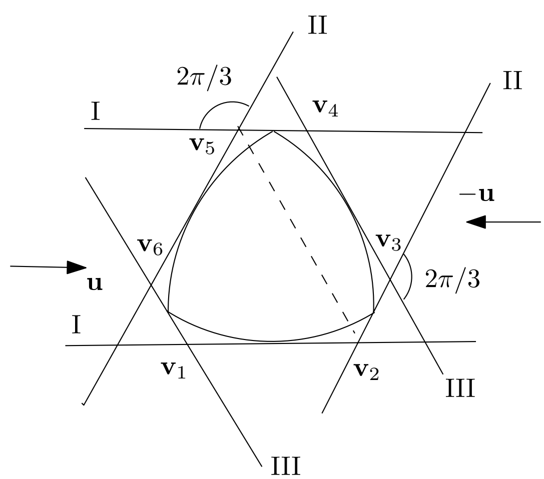


可以证明，对每一个凸区域 K 都可以找到一个相应的等宽凸体 K^* 同时满足

$$K \subseteq K^* \quad \text{和} \quad d(K)=d(K^*)$$

（这是凸几何中的一个基本结果，有兴趣的读者不妨尝试一下证明）。所以，要证明定理 1 我们只需讨论等宽凸体即可。

假设 K 是一个二维的等宽凸体并假设 I, II 和 III 是 K 的三对平行切线，其中每两对之间的夹角都是 $2\pi/3$（如下图所示）。我们取 I 的定向为 $\mathbf{u}$。



利用等宽以及所取特殊夹角的限制可以证明 $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_6$，$\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5$ 和 $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$ 两两平行。我们定义 $\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4$ 至 $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5$ 的距离与 $\mathbf{v}_2\mathbf{v}_5$ 至 $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_6$ 的距离之比为 $f(\mathbf{u})$。即

$$f(u)=\frac{\|v_2,v_3\|}{\|v_5,v_6\|}.$$

当 $\mathbf{u}$ 沿着顺时针方向转动时，$f(\mathbf{u})$ 是 $\mathbf{u}$ 的一个连续函数并且满足

$$f(-u)=\frac{\|v_5,v_6\|}{\|v_2,v_3\|}=\frac{1}{f(u)}.$$

所以，由连续函数的中值定理，存在一个单位方向 $\mathbf{u}_0$ 满足 $f(\mathbf{u}_0)=1$。这时所对应的六边形 $\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\mathbf{v}_3\mathbf{v}_4\mathbf{v}_5\mathbf{v}_6$ 恰好是一个正六边形。也就是说，*存在一个对边距离为 $d(K)$ 的一个正六边形 H 满足 $K\subseteq H$。*[注3] 这时我们很容易将 H 分成三块 Y_1，Y_2 和 Y_3 使得

$$d(Y_i)=\frac{\sqrt{3}}{2}d(K),\quad \mathrm{i}=1,2,3.$$

这样我们就证明了定理 1。

事实上，我们证明了如下更强的结论：

定理 1* *每个二维的有界集合 X 都可以被分解为三个子集合 X_1，X_2 和 X_3 满足*

$$d(X_i)\le\frac{\sqrt{3}}{2}d(X),\quad \mathrm{i}=1,2,3.$$

其中常数 $\sqrt{3}/2$ 是最佳的。

这是一个很好的开端。在此基础上既可以提出有意义的相关问题，也可以做更一般的猜想。但是，为了保险，我们再做一点观察。首先，通过归纳法可以证明：

在 n 维欧氏空间 E^n 中，单位球 B^n 可以被分成 $n+1$ 个子集 X_1，X_2，…，X_{n+1} 满足

$$d(X_i)<d(B^n),\quad i=1，2，\cdots，n+1.$$

假设 K 是一个具有光滑表面且包含坐标原点作为一个内点的 n 维凸体。也就是说，它的每一个边界点都有唯一的切平面。像通常一样，我们用 $\partial(K)$ 来表示 K 的边界。假设 $\mathbf{x}\in\partial(K)$，$H(x)$ 是 K 在 $\mathbf{x}$ 点的切平面，$\mathbf{u}(\mathbf{x})$ 是该平面的单位法向量。显然，

$$\mathbf{x}\longrightarrow\mathbf{u}(x)$$

定义了 $\partial(K)$ 到 $\partial(B^n)$ 的一个满射。记为 $f(\mathbf{x})$。

如前面所说，$\partial(B^n)$ 可以被分成 $n+1$ 个直径均小于 2 的子集 X_1，X_2，…，X_{n+1}。定义

$$Y_{\mathrm{i}}=\{\mathbf{o}\}\cup f^{-1}(X_{\mathrm{i}}).$$

容易验证，如果 $\mathbf{x}$，$\mathbf{y}\in\partial(K)$ 满足

$$\|\mathbf{x},\ \mathbf{y}\|=d(K),$$

那么一定有

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})=-\mathbf{u}(\mathbf{y}).$$

由此可以导出

$$d(\hat{Y}_i)<d(K)$$

以及

$$K=\bigcup_{i=1}^{n+1}\hat{Y}_i.$$

这样，我们又证明了

定理 2 *每一个具有光滑表面的 n 维凸体 K 都可以被分成 $n+1$ 个直经都小于 $d(K)$ 的子集。*

2 猜想

博苏克 (Karol Borsuk, 1905-1982)

注 3

这一结论也许会提示读者想到如下问题：确定一个面积最小的凸区域 D，使得任一直径为 1 的平面集合都可以经过刚性变换后被 D 覆盖。这一问题具有悠久的历史，可以追溯到 Lebesgue。至今远未解决。也许读者还会想到蚯蚓问题：确定一个面积最小的凸区域 G，使得任一长度为 1 的平面曲线都可以经过刚性变换后被 G 覆盖。

1932 年，波兰数学家博苏克在苏黎世举行的世界数学家大会上提出了如下猜想[注 4, 5]：

Borsuk 猜想 n 维欧氏空间中的每一个有界集合都可以被分为 $n+1$ 个子集使得每个子集的直径都比原集合的直径小。

用 $\beta(X)$ 表示能将 X 分解成直径小于 $d(X)$ 的子集的最小个数。则 Borsuk 猜想可以被重新叙述为：

如果 X 是 n 维欧氏空间中的一个有界集合，那么

$$\beta(X)\le n+1.$$

博苏克于 1905 年 5 月 8 日生于波兰首都华沙。在近代历史上，波兰是一个多难的民族，曾多次受到外国列强的入侵和奴役。但她也是一个异常坚强和伟大的民族，在人类文明的历史上留下了许多灿烂辉煌的名字。例如，哥白尼，肖邦，居里夫人等等。而博苏克的求学年代正值波兰数学最辉煌的时期。那时，巴拿赫（Stefan Banach, 1892-1945），谢尔宾斯基（Wacław Franciszek Sierpiński, 1882-1969）等世界级数学家正处在他们事业的巅峰，数学中的波兰学派正在形成。18 岁那年，博苏克考入华沙大学，26 岁获博士学位。这其间，他曾师从谢尔宾斯基，马苏基耶维茨（Stefan Mazurkiewicz, 1888-1945）等著名数学家。随后，他到维也纳，苏黎世和因斯布鲁克游历访问了一年，得到了门格尔（Karl Menger, 1902-1985），霍普夫（Heinz Hopf, 1894-1971）和 Victoris 的指导。1938 年他晋升为华沙大学副教授。那时，他已经因为证明博苏克 - 乌拉姆定理而成为一名备受瞩目的拓扑学家。可惜，和许多同时代的人一样，他的似锦数学前程被第二次世界大战所中断。

Borsuk-Ulam 定理 任一从 $n+1$ 维单位球的表面到 n 维欧氏空间的连续映射一定把某一对对径点映射到同一点。

1939 年 9 月 1 日，纳粹德国入侵波兰。作为一名有着强烈民族自尊心和正义感的热血青年，博苏克奋起加入了波兰抵抗组织并参加了 1944 年 8 月的华沙起义。由于起义惨遭失败，博苏克被捕并被关押到了朴卢斯高集中营。解放前夕，他成功逃离了集中营，从而幸免于难。

1945 年 7 月 22 日，波兰解放。8 月 31 日，伟大的巴拿赫去世。毫无疑问，第二次世界大战不仅毁坏了波兰人民的家园和生活，也摧毁了波兰的数学。1946 年，博苏克被任命为华沙大学教授。从此，他逐渐承担起复兴波兰数学的重任。1952 年，波兰开始筹建科学院，他是第一批通讯院士之一，四年后升为院士。

博苏克是一位杰出的拓扑学家，对映射理论，形状理论，同伦论等都有开创性贡献。许多数学名词冠以他的名字，如 Bing-Borsuk 假设，Borsuk-Spanier 群，Borsuk-Ulam 定理，Borsuk 猜想等等。他发表了近两百篇论文，出版了四部专著。由于他的杰出贡献，生前曾获得许多国际国内荣誉。博苏克于 1982 年 1 月 24 日在华沙去世。1983 年，波兰科学院编辑出版了博苏克全集。本文中关于博苏克的许多生平信息均源于他的全集。

3 尝试

通过类似定理 1 的证明思路，我们也可以证明 Borsuk 猜想的三维情形。当然，可想而知，具体细节要困难得多。

定理 3 每一个三维的有界集合 X 都可以被分解为四个子集合 X_1，X_2，X_3 和 X_4 满足

$$d(X_i)<d(X),\qquad i=1，2，3，4.$$

不失一般性，我们假定 $d(X)=1$。早在 1953 年凯

注 4

具有光滑表面的 n 维凸几何体所构成的集合在所有 n 维凸几何体构成的 Hausdorff 空间中是稠密的。所以，基于定理 2，几乎所有几何学家都不会怀疑 Borsuk 猜想的正确性。

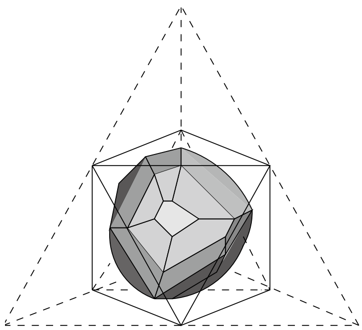
注 5

在数学的研究过程中，提出好的问题和猜想是第一重要的。因为它指出了探索方向。Borsuk 猜想就是这样一个典范。它与许多其它数学问题密切相关（参见 [3]）。对它的研究极大地促进了组合几何的发展。

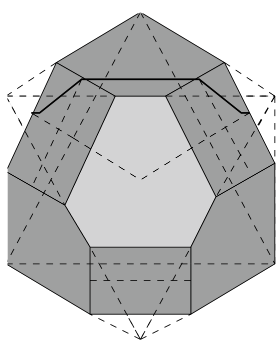
尔（David Gale, 1921-2008）证明了如下结果：

在 n 维欧氏空间中，每一个直径为 1 的集合都能被嵌入到一个边长不大于 $\sqrt{n(n+1)/2}$ 的正规单纯形中。

这是非常本质和艰难的一步，通常被称为 Gale 引理。作为这一引理的特例，X 可以被嵌入到一个边长为 $\sqrt{6}$ 的正四面体 T 中。如下图所示，将正四面体 T 切掉四个边长均为 $\sqrt{6}/2$ 的正四面体，我们得到一个边长为 $\sqrt{6}/2$ 的正八面体 C。由于 $d(X)=1$，我们得到 $X\subseteq C$。



更进一步，由于 $d(X)=1$，我们还可以从正八面体 C 切掉三个适当的棱锥（每对顶点可以去掉一个）从而得到一个包含 X 的如下形状的多面体。我们称之为 D。



可以证明，多面体 D 可以被分解成四块 X_1，X_2，X_3 和 X_4（分解较复杂，从略）满足

$$d(X_i)<d(X),\qquad i=1，2，3，4.$$

定理 3 得证。[注 6]

关于定理 3 的定量改进我们有如下猜想：

Gale 猜想 三维欧氏空间中的每一个有界集合 X 都可以被分成四个子集合 X_1，X_2，X_3 和 X_4 满足

$$d(X_i)\le\sqrt{\left(3+\sqrt{3}\right)/6}\,d(X),\qquad i=1，2，3，4.$$

4 离散化

拉曼 (David Larman, 1942-)

1984 年，拉曼 (David Larman, 1942-) 提出了如下问题：

Larman 问题 假设 $\mathcal{A}$ 是 $\{1, 2, ... , n\}$ 的一族任意两个都至少有 k 个公共元素的子集。那么 $\mathcal{A}$ 一定能被分成 n 个子族使得每一个子族中的任意两个集合都至少有 k+1 个公共元素吗？

尽管 Borsuk 猜想和 Larman 问题在形式上大相径庭，实际上它们是密切相关的。假设 $\mathcal{A}$ 中每个集合 ($\{1, 2, ... , n\}$ 的子集) 的元素个数均为 h，$\mathcal{A}$ 中任意两

注 6

这一定理首先是由 Perkal 于 1947 年证明的。后来，Eggleston，Grünbaum，Heppes 等人又给出了简化证明和定量改进。所谓的定量改进是指寻求最小的 $c<1$ 使得每块的直径都不大于 c。这里所介绍的思路是由 Grünbaum 于 1957 年发现的。

个集合都至少有 k 个公共元素且确有两个仅有 k 个公共元素，$\mathcal{A}$ 最少可以划分成 $l(\mathcal{A}, n, k)$ 个子族使得每个子族中的任意两个集合都至少有 k+1 个公共元素。定义

$$\sigma : A \longrightarrow (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad A \in \mathcal{A}$$

其中

$$x_i = \begin{cases} 0 & i \notin A \\ 1 & i \in A \end{cases}$$

如果 A 和 A' 具有 j 个公共元素，那么

$$\|\sigma(A), \sigma(A')\| = \sqrt{2(h-j)}$$

由此可以导出

$$\beta(\sigma(\mathcal{A})) = l(\mathcal{A}, n, k).$$

这一离散形式对正面尝试 Borsuk 猜想没有作用。但是，如果能够证明

$$l(\mathcal{A}, n, k) > n+1,$$

那就彻底否定了 Borsuk 猜想。

拉曼是一位杰出的几何学家，曾任伦敦大学学院教授，伦敦数学会副主席，获多项国际国内学术荣誉。1975 年，他与 C.A. Rogers 合作给出了 Busemann-Petty 问题的第一个反例。这是一项杰出的数学成就。就创造性和重要意义而言，它与下一节提到的意外结局是同一水平的。

Busemann-Petty 问题 假设 C_1 和 C_2 是两个中心对称的 n 维凸几何体（以坐标原点为中心）。如果对任一过坐标原点的超平面 H 都有

$$v_{n-1}(C_1 \cap H) > v_{n-1}(C_2 \cap H),$$

是否一定能够导出 $v_n(C_1) > v_n(C_2)$?

提到英国的大学，人们首先想到的一定是剑桥和牛津。其实，伦敦大学学院，帝国理工学院和伦敦政治经济学院也都是世界级的大学。就伦敦大学学院而言，迄今已有 21 位校友（教员和学生）荣获诺贝尔奖，3 位获菲尔兹奖（K. F. Roth, A. Baker 和 T. Gowers）。

5 意外的结局

1981 年，P. Frankl 和 R. Wilson 在《组合数学》（Combinatorica）的创刊号发表了如下结果。为了叙述方便，我们用 $|X|$ 来表示集合 X 中元素的个数。

Frankl-Wilson 定理 取 $m = 4q$，其中 q 为某一素数的方幂。设 S 是一族集合，其中每个集合都是 $\{1, 2, ... , m\}$ 的 $m/2$ 元子集，且任意两个集合都不相交于 $m/4$ 个元素。那么

$$|S| \le 2\binom{m-1}{m/4-1}.$$

这是一个非常深刻的组合定理，其证明也很复杂。由于本文的目的所限，我们不在此赘述其证明。但是，我们列举它的如下推论来佐证它的重要性。

将 n 维欧氏空间 E^n 用 $g(n)$ 种颜色着色。若能达到每一对距离为 1 的点都有不同的颜色，那么

$$g(n) \ge 1.2^n.$$

回到 Borsuk 猜想。为了叙述方便，我们定义

$$\beta(n) = \max\{\beta(X)\},$$

这里的极大取遍所有 n 维有界集合 X。显然，Borsuk 猜想就是

$$\beta(n) = n+1.$$

让数学界震惊的是，J. Kahn 和 G. Kalai 于 1993 年证明了如下结论：

定理 4 当 n 充分大时，

$$\beta(n) \ge 1.2^{\sqrt{n}}.$$

特别地，当 $n \ge 2015$ 时 $\beta(n) > n+1$。

取 $m = 4q$，这里 q 为某一素数的方幂。我们定义 $W = \{1, 2, ... , m\}$，G 为 W 中的元素生成的所有无序二元数组构成的集合，V 为 W 的一个 $2q$ 元子集，V' 为 V 在 W 中的补集，$S(V)$ 为所有的无序数组 $\{a, b\}$ 构成的集合，其中 $a \in V$，$b \in V'$，$\mathcal{A}$ 为所有 $S(V)$ 构成的集合族。容易验证

$$|G| = \frac{m(m-1)}{2}$$

和

$$|\mathcal{A}| = \frac{1}{2}\binom{m}{m/2}.$$

如果 U 和 V 均为 W 的 $2q$ 元子集且满足 $|U\cap V|<q$，那么我们容易导出 $|U\cap V'|>q$。所以 $|S(U)\cap S(V)|$ 在 $|U\cap V|=q$ 时达到极小值。我们记这一极值为 k。由 Frankl-Wilson 定理，$\mathcal{A}$ 中任一多于 $2\binom{m-1}{m/4-1}$ 个集合的子族都有两个集合 $S(U)$ 和 $S(V)$ 满足

$$|S(U)\cap S(V)|=k.$$

所以，由于 $S(V)$ 都是 G 的子集，

$$l(\mathcal{A}, m(m-1)/2, k) \geq \frac{\frac{1}{2}\binom{m}{m/2}}{2\binom{m-1}{m/4-1}}.$$

当 $n=m(m-1)/2$ 且充分大时，由上式可得

$$l(\mathcal{A}, n, k) \geq 1.203^{\sqrt{n}}.$$

再由素数分布的定理可以导出

$$\beta(n) \geq 1.2^{\sqrt{n}}$$

对所有足够大的自然数都成立。

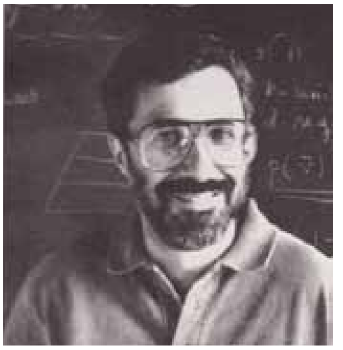
Borsuk 猜想的意外解决是当年轰动数学界的事件。美国数学会 1993 年出版的大事记（What's Happening in the Mathematical Sciences）就以 Disproving the Obvious in Higher Dimensions 为题介绍过这一成果。[注 7]

Jeff Kahn 和 Gil Kalai 都是当代杰出的组合数学专家。前者是美国罗特格大学教授，在随机 ±1 矩阵，相交系等领域做出过多项重要工作；后者是耶路撒冷大学教授和以色列数学会主席，在概率方法在组合问题中的应用和多面体的组合理论等领域做出了杰出贡献。毫无疑问，Borsuk 猜想的解决已将 Kahn 和 Kalai 这两个名字写入几何学的史册。

注 7

在过去的二十年中，许多数学家改进了 Kahn 和 Kalai 的结果并发现了多种不同的证明方法。至今已知的结论是：当 $n \leq 3$ 时 Borsuk 猜想正确；当 $n \geq 298$ 时 Borsuk 猜想有反例；当 $4 \leq n \leq 297$ 时，Borsuk 猜想还未解决。作为 $\beta(n)$ 的上界，Schramm，Bourgain 和 Lindenstrauss 曾证明：对每一个 n 维有界集合 X 我们有

$$\beta(n) \leq (1.5 + o(1))^{\sqrt{n}}.$$



Gil Kalai (1955-)

后记

许多年前，在维也纳的一次舞会上约翰·施特劳斯的夫人遇到了勃拉姆斯。寒暄之余，施特劳斯夫人递给勃拉姆斯一把纸扇，请他题字留念。勃拉姆斯略加思索，在扇面上飞快地写下了《蓝色多瑙河》的主旋律。正当施特劳斯夫人惊愕之际，他又在下面写道“可惜不是我作”。

参考文献

1. M. Aigner, G. M. Ziegler, Proofs from THE BOOK, Springer, Berlin, 1998.
2. P. Frankl, R. Wilson, Intersection theorems with geometric consequences, Combinatorica, 1 (1981), 357-368.
3. B. Grünbaum, Borsuk's problem and related questions, Proc. Symos. Pure Math. 7 (1963), 271-284.
4. J. Kahn, G. Kalai, A counterexample to Borsuk's conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. 29 (1993), 60-62.
5. D. Larman, Open problem 6, Convexity and Graph Theory (M. Rozenfeld, J. Zaks, eds.) North-Holland, Amsterdam, (1984), p. 336.
6. C.M. Zong, Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry, Springer, New York, 1996.

未完待续