数学的发端和演变

曹之江

1

今日的数学，已是一个无比庞大复杂的知识体系，它的思想与方法的触角已延伸到社会各门科学技术与人们日常生活的一切领域，成为了人类社会生活中一个不可或缺的内容。现在的它，已被中外各国的教育体制一分为二，即初等数学与高等数学。所谓初等数学，粗糙地说就是指十七世纪英国牛顿在创立“流数与反流数”(即微分与积分法)之前，人类所积累的数学知识，也就是我们常说的古典数学。现在人们已把这些古典数学在做了规范化处理以后编入了中小学课本。至于在牛顿之后近三、四个世纪中发展起来的现代数学，特别是以微积分为主体的高等数学，业已成为理工科大学的必修主课。因为一切工程技术人员都要以高等数学作为叙述与推导工程技术原理、进行复杂的工程设计与计算的手段，而各学科的科研人员，则更需要应用现代数学对各类物质运动进行表述、计算以及构建各种数学模型。至于大学里的非理工专业，尽管不需要将数学直接应用到本专业，但据笔者所知，至少在中国，他们也已开设了数学课程供学生选修。这里我们还需要提到自十九世纪发展起来的非功利性抽象数学，即现在被人们称为“核心数学”的理论数学，它们现在虽尚未得到直接应用，且远离人们的直接经验，但也为各综合大学数学系师生和各有关研究所的专业人员所专攻，并取得了很大成绩。综上所述，我们可以看出，数学业已成为当代教学与文化不可或缺的组成部分，是当代人类文明的支柱力量。

2

我们在前面的文章“漫谈数学文化”（参见《数学文化》2011/ 第 2 卷第 1 期第 59 页）中已经提到，数学不以现实世界中任何物质内容作为自己的研究对象，具有一种超现实性的品格。若是如此，那么数学的学术应当是一种无源之水和无根之木，它如何又能发展成今天那样的一个无比庞大的知识体系呢？它如何又能够成为一种社会的科技文化和人类文明生活的支柱呢？因此，数学究竟是一种什么样的学问，是我们必须要弄明白的。为了说明这一切，我们需要从初等的、古典的数学谈起。

人类在形成与创立的初期，首先就需要一种在生产实践和交际中使用的语言。当今天的小学生，他们在数学课堂上首先碰到数字 1, 2, 3, ……，这些我们今天称之为自然数的符号，虽然它们并没有单位、量纲，并不专指任何具体事物，以示一种抽象的东西，但是，当学生们初次见到了它，仍是那么的亲切与自然，他们想到的是一匹马、两头牛、三棵树等等。这些数学符号原来不过就是他们的一种特殊的生活语言。这些数字后来尽管衍生成为小数、分数，甚至成为代数课程中的更抽象的字母符号 $A, B, C, \cdots$，X, Y 等，他们仍然感到这一切都是生活中的数量描述，完全符合自己的经验，而并不感到陌生。这些数字，它们虽然不是专指某类特殊物质，但却可适用于定量描述一切物质，它们虽然是描述事物的语言，但这种语言是定量的、有特殊性、具有某种转换演算的技巧。因此，人们把它专列出来成为一种训练的技

术。这也许是古典数学的最初来源与发端吧。在这里尚需指出的是，在古典数学中，除了事物的数量关系描述以外，尚包含着一种形态描述，这就是初等几何的来源。这是出于古人对丈量土地和计算、测量多种器物而产生的。在初等几何中我们见到最简单的事物的抽象形态就是直线和圆周，以及由它们所界定的几何形体，如多边形、球、各种锥体等。这些对事物形态进行简单描述的语言，它们也与对事物进行定量描述的语言一道，归入到朴素的古典数学内容之中。

3

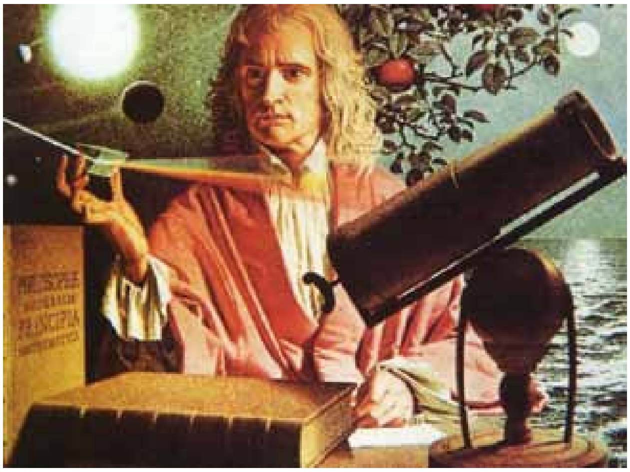
然而，到了中世纪，资本主义的产业革命与生产关系在欧洲已初露端倪。以粗浅的感性经验为基础而综合起来的知识，已不能满足人们日益增长的需求。人们已不再完全相信由上帝所赐予的直接经验，而认为一切都需要理性的归纳分析来认识事物的本质。在这个时代里，出现了如哥白尼、伽里略、开普勒、费尔马、笛卡尔等伟大的先驱，形成了人类理性智慧大放光芒的时代。这时，在数学上也开始不限于对量的那种孤立、静态的描述，而进入到了对量进行动态描述时代，并出现了微积分的方法，从而使得理性主义在数学中大放异彩。在朴素的古典数学中，一个字母所代表的量是静态的、孤立的，在方程式中出现的也不过代表未知的孤立的量而已。而我们今天所需要的是，要描写天上日月星辰的运动、大海中航船的位置、生活中各种量之间的变化依赖关系等，于是在数学中出现了变量与函数的概念。

在人类的语言中，量的概念和符号由静态发展到动态，这在数学上就产生了一个划时代的变化。在变量数学中，数就演变成了函数——变量之间的一种依赖关系。人们最初所理解的函数只不过是一种公式或一种演算，如 s=vt（距离等于速度乘以时间），A=BH（矩形面积等于底乘以高）等。这里 v 与 H 若是常数，人们就可发现，这公式所表述的，只不过是最简单的变量关系（正比关系）。若把函数视为是一种演算，则我们早先所知道的演算只是加减乘除而已。因此它们所经过重叠运算所能得到的函数，则是多项式，或两个多项式相除所得的有理函数。我们在后继的学习中就会发现，这种有理函数虽然也有万万千千，但它们却远不能去表述自然界的一切现象。例如，地球围绕太阳的运动、一杯高温热水的冷却过程等，都是不能用有理函数来表述的。因此为了定量描述自然界的一切现象和过程，我们就必须冲破由四则运算来构造函数的束缚，这就是后来人们创造出各种无理函数和超越函数的由来。

4

上文提到人类社会发展到中世纪，已不能满足于用朴素的古典数学语言去静止的描述世间万物，而必须要有一种新的数学语言去动态的描述自然界的万物及其运动。而这个新数学，是必须要以人的理性智慧去创造的，这里就包括要去创立一个足以描述各种物质运动的新型函数体系及相应的演算方法。这是一项与人类的现代科学思想史同时发展壮大起来的极其浩大而复杂的工程。在这项工程中，伟大的牛顿与莱布尼兹走出了决定性的一步。1687 年，牛顿在他的“自然哲学的数学原理”一书中，同时提出了全新的动力学理论与相应的“流数”法（微积分法）。牛顿在这里所创立的微积分方法是为了描述与计算他的新动力学而提出的，所以其后的两个世纪中，微积分方法只是作为各种自然科学与工程科学的一种技术手段而存在，它只是各种物质科学的一种附庸，没有自己的独立地位，更没有严密的逻辑系统。当时的科学界，人们只是忙于应用微积分方法去开疆拓土，建立本门学科的基础与应用理论，没有人去关心并完善微积分学本身的基础，因此微积分在创立的两个世纪内，常常不能做到自圆其说，有时还产生很大的矛盾。在十八世纪，有人竟笑话牛顿的“流数”与莱布尼兹的“微分”是“逝去了量的鬼魂”，而无人能够起来反驳，从而导致了所谓的第二次世界数学危机。而风雨飘摇中的微积分由于在各学科中具有有效的应用得以保存发展。

到了十九世纪科学家们才回过头来整理紊乱的微积分学的基础。这里特别值得提出来的是法国科学家柯西（当时因为数学还不是一门独立的学科，因此尚没有纯粹的数学家），他整理了一个完整的微积分学的理论系统，这个柯西系统一直延用至今。然而，当时的学术界认为微积分学要做到逻辑上的完全严密化，首先必须做到实现功利化。而当时微积分学是没有功利化的，要实现功利化的最大难处是它的论域问题，也就是它立论的数值基础。而我们从古典数学以来，所具有的数域是上帝所赐予的自然数域，以及它的衍生物小数、分数所构成的被人们称之为有理域的数域。这个有理数域大可以测量和计算天体之间的距离，小可以测量原子的直径。人们每天都要接触与应用它，是十分得心应手的工具。然而，在理论上它却是不严实的，在数学上称之为不完备或不连续的。早在纪元前五百年，古希腊人就发现，单位正方形的对角线长度是不能用数（有理数）来表示的，这就是说我们若将有理数都标到一条无限长的数轴上，则在单位正方形对角线的长度的点上（现在人称之谓 ），就是一个空隙。人们因为不能理解，就把这种不能用有理数来表示的几何长度，统称为无理数。后来人们证明了，在数轴上这种无理数何止千千万万！二十世纪初，有一个法国人勒贝格，他发明了一种测量数轴上任何一个数集合的容积尺度。他发现在任何有限闭区间（a, b）上，所有无理数的勒贝格尺度是 b-a，即区间长度，而所有有理数的尺度是零。这说明有理数尽管密密麻麻，无



处不在，但它却少到在区间上不占任何地盘，而无理数却占到整个区间。这种情况说明了所有的有理数在数轴上竟不占地位，因此将它铺在数轴上，几乎处处都是千疮百孔的。这种情况在数学上就称之谓不完备的或不连续的。而我们的微积分学，不能建立在千疮百孔的有理数域上，必须建立在完备的或连续的、严实的数域上。因为只有在这样的数域上，它才能建立严密的极限理论和包含各种超越函数的体系，它才能实现公理化和理论上的严密化。

5

上面提到的，我们要在变量数学中建立的新数域就是所谓的实数域。这个实数的建立，在理论上是非常抽象和玄虚的，很难为人们所理解。我们在这里只能够把它们说成为与数轴上的点一一对应，而且严实无隙的数集，是它实现了几何直线与数系的和谐统一。这个和谐统一不是上帝所给的，而是人类自己用理性智慧创造出来的异彩。然而，我们应该说，这实数是不“实”的。数学家们把它的主体无理数说成是“无限位的不循环小数”。而一个“无限位”的数是人们完全不能去把握的，因此对于人们来讲，这个实数不是一种实在，而人们日常实际接触与使用的数仍然只是有理数。于是实数只是人们一种理性上的实在。这样看来实数及建立在其上的数学都只是在逻辑演绎上有价值，而人们在实践上应用的仍是有理数。

在数学上，较之于有理数系，实数则是多了一个完备性和连续性（完备性、连续性在数学上是完全等价的命题）。然而，要在有理数公理上增加一个完备性公理，从而构造出一个新的数系，并证明这个新数系的实在性和相容性，这是谈何容易的事！而这件伟大而艰巨的事却在十九世纪下半叶由许多数学家们去完成了。这里我们需要特别指出的是德国的康托与戴德金。康托把有理数的基本列（一种无限浓缩的数列）称之为实数，戴德金则把有理数的分割称之为实数。他们二人都各自建立了构造实数的代数元素，赋予并证明了它们具有有理数的各种公理性质。此外，还特别证明了它们具有完备性。这样他们就完成了实数系的建立，在历史上称之为一维连续统理论。连续统理论的建立不仅在数学上，而且在科学史上都是一件划时代的大事，它不仅使数学摆脱了对物理学和其他科学的附庸地位，成为了一门独立发展的大学科，而且在思想上也深深地影响了其他科学的发展。在这里我们还应该讨论一下在实数上兴起来的微积分科学是如何应运而生的，它的内容、方法及意义等，但限于篇幅，就不能在本文里讨论了。

作者介绍：

曹之江，教授。1934 年 11 月出生于浙江省上虞县。1953-1957 年就读于北京大学数学力学系，毕业后志愿建设边疆，到内蒙古大学任教。任教期间，曾先后任内蒙古大学数学系主任、内蒙古大学副校长、教育部数学力学教学指导委员会理科数学组组长等职。2003 年被教育部授予首届国家级教学名师奖。