复数及其文化意义

薛有才

虚单位 i 以及由此产生的复数 $a+bi$ 在数学的发展史上具有非常重要的文化意义，它与非欧几何等现象改变了人们对于数学的认识，对于人类思想史、认识论的发展产生了重大影响。

1 复数的历史

历史上第一个遇到虚数的人是印度数学家婆什迦罗（Bhaskara Acharya, 约 1114-1185 年），他在解方程时认为方程 $x^2=-1$ 是没有意义的，原因是任何一个实数的平方都不会是负数。

大约过了 300 多年，1484 年法国数学家许凯（N. ChuQuet, 约 1445-1500 年）在《算术三篇》一书中，解方程 $x^2-3x+4=0$ 时得到的根是 $x=1.5\pm\sqrt{2.25-4}$。由于根号里的数是一个负数，所以他被这个“怪物”弄得不知所措，于是他发表声明称这个根是不可能的 [1]。

可以说，婆什迦罗与许凯都“发现”了虚数，但是他们没有认识到这将导致一种新的数的诞生，从而放弃了这个重大的机会。

时间大约又过了 60 多年，1545 年意大利数学家卡尔达诺（G. Cardano, 1501-1576 年）在他的著作《大术》中记载了如下的乘法运算：$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40$。这是世界数学史上第一次明确表示虚数的符号，也是虚数第一次的数学表示方法。当时，他用的符号是：RM: -15. 其中的 R 表示根号，M 表示负数符号，它宣告了虚数的诞生。卡尔达诺明白一个负数开平方是不允许的，所以无法解释负数的平方根是不是“数”，于是他在书中写到：“不管我的良心会受到多么大的责备，事实上 $(5+\sqrt{-15})$ 乘以 $(5-\sqrt{-15})$ 刚好是 40”！他称 $\sqrt{-15}$ 这个数为“诡辩量”或“虚构的”量。他认为一个正数的根是真实的根，而一个负数的根是不真实的，虚构的，或者是虚伪的数，虚构的数，也是神秘的数。这就如他在书上所写的：“算术就是这样神秘地进行，它的目的正像人们说的又精密又不中用。” [2]。这里，不管卡尔达诺对虚数的认识是如何的肤浅，但他毕竟是世界上第一个记述了虚数的人，也可以说是他“发明”了“虚数”。

到了 16 世纪末，法国数学家 F. Viete 和他的学生 T. Harriot 可以说是首先“承认”复数的数学家。虽然他们也认为应该把虚数排斥在数系以外，但在碰到解方程一类问题时，可以“开通一点”, 把它当数来对待。

几乎是在同时，意大利数学家邦别利登上了虚数的舞台。1572 年，邦别利在解三次方程 $x^3=7x+6$ 时也碰到了虚数的问题，但与前人不同的是，他认为，为了使方程存在的这种根得到统一，必须承认这样的数也为该方程的根，而且类似的数都应该得到承认，让它们进入数的大家庭，他还创造了符号 $R[Om9]$ 表示虚数 $\sqrt{-9}$ [3]。

虚数就这样在承认与不承认之间一直被拖着，时间很快就进入了 17 世纪，1629 年，荷兰数学家吉拉尔（A. Girard, 1595-1632 年）在他的《代数新发明》一书中引入了 $\sqrt{-1}$ 表示虚数（虚单位），而且认为引入虚数不仅对于解方程是有用的，而且能满足一般运算法则。

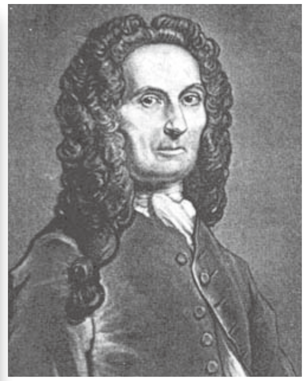
第一个正确认识虚数存在性的数学家当属法国著名

对复数使用和研究做出贡献的数学家


法国人 F. Viete (1540-1603)


荷兰人 Albert Girard (1595-1632)


法国人笛卡儿 (1596-1650)


法国人 De Movire (1667-1754)

哲学家、数学家笛卡儿。虽然他在开始时也认为负数开平方是不可思议的的事情，但后来他认识了虚数的意义与作用，开始公开为虚数辩护，并第一次把方程“虚构的根”之名称改为“虚数”，以与“实数”相对应。他也称类似于 $a+bi$ 这样的数为“复数”，这两个名称一直使用到今天。特别是，他用法文 imaginaires 的第一个字母 i 表示虚数 $\sqrt{-1}$。于是虚单位诞生了。

到了 18 世纪，虽然对于复数是不是数还存在很大的争议，但它却已经进入了数学的运算之中。微积分发明人之一的德国数学家莱布尼茨就应用复数进行有理函数的积分运算，尽管他并没有明确承认复数。特别是在这一阶段发现了许多漂亮的复数公式，使得人们对它充满了好奇，吸引人们更多地去研究它。如下就是一些著名的公式：

1722 年，法国数学家棣模佛（De Moivre）发现了著名的棣模佛公式：

$$(\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx\ .$$

1743 年，瑞士数学家欧拉发现了著名的欧拉公式：

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x\ .$$

由欧拉公式，我们立即可得

$$e^{i\pi} + 1 = 0\ .$$

这一公式真是太神奇了！它把自然数 e，圆周率 π，虚单位 i，实单位 1 以及数 0 联系在一起。这是自然界的奇妙，还是数学的奇妙，我们无从而知。但这一公式确是造化弄人，妙不可言。

1777 年 5 月 5 日，欧拉在递交给彼得堡科学院的论文《微分公式》中，公开支持 1637 年笛卡儿用字母 i 表示虚数 $\sqrt{-1}$ 的思想 [1]。可惜的是，这一思想同样没有引起人们的注意。

与此同时，许多数学家希望找到虚数的几何表示，特别是像实数那样在数轴上找到点与之对应。第一个作出这种努力的数学家是牛津大学的数学家沃利斯（J.Wallis, 1616-1703）。虽然他并没有解决这一问题，但他确实在这方面付出了努力。

真正解决了虚数几何表示的数学家首先应是丹麦业余数学家、测绘员韦塞尔（C. Wessel），他在 1797 年向丹麦科学院递交了题为《关于方向的分析表示：一个尝试》的论文，在坐标平面上引进了实轴与虚轴，从而建立了复数的几何表示。韦塞尔发现，所有复数 $a+bi$ 都可以用平面上的点来表示，而且复数 $a+bi$ 与平面上的点一一对应。这样一来，复数就找到了一个立足之地而且开始在地图测绘学上找到了它应用的价值。但同样地，他的思想也没有引起注意。

与此同时，爱尔兰数学家哈密尔顿（W. R. Hamilton, 1805-1965）发展了一个复数的代数解释，每个复数都用一对通常的数来表示：(a,b)，其中 a,b 为实数。哈米尔顿所关心的是复数的算术逻辑，而并不满足于几何直观。他指出：复数 $a+bi$ 不是像 1+2 那样意义上的一个加法或求和，加号在这里仅仅是一个记号，不表示运算，bi 不是加到数 a 上去的。复数 $a+bi$ 只不过是实数的有序数对 (a,b)，并给出了有序数对的四则运算：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$
$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac+bd,ad+bc)$$

同时，这些运算满足结合律、交换率和分配率。由此，复数被逻辑地建立在实数的基础上，而且事实上已经是实

瑞士人欧拉 (1707-1783)

丹麦人 Wessel (1745-1818)

爱尔兰人哈密尔顿 (1805-1865)

德国人高斯 (1777-1855)

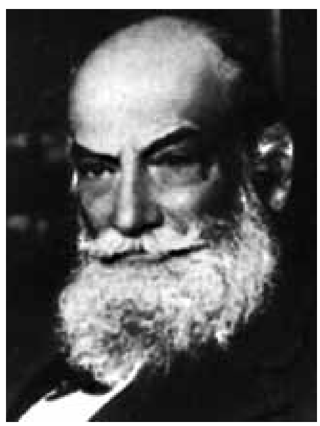
数系的推广。

1831 年，数学王子高斯（C. F. Gauss, 1777-1855）又一次清楚地表示复数的几何形式，并且指出：“迄至目前为止，人们对虚数的考虑依然在很大的程度上把虚数归结为一个有毛病的概念，以致给虚数蒙上一层朦胧而神奇的色彩。”[4] 他支持笛卡尔、欧拉等人用 i 表示虚单位的意见。由于高斯在数学界的地位与影响，也由于复数长时间的发展，数学家们从此开始逐渐承认了复数。但是，并没有真正从思想深处解决虚数的地位问题。对它仍然存有疑虑，仅仅把它看做是一个“符号”。

复数在几何上找到了它的位置以后，数学家们对它的研究就多了起来。18 世纪末，以欧拉为首的一些数学家，开始发展一门新的数学分支——复变函数论。19 世纪以后，由于法国数学家柯西、德国数学家黎曼、魏尔斯特拉斯等人的巨大贡献，复变函数论取得了飞速的发展，并且广泛地运用到了空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理学等方面。

真正把复数应用到工程部门并取得重大成就的是俄罗斯的“航空之父”尼古拉•儒可夫斯基（1847-1921），1890 年他在俄国自然科学家会议上作了《关于飞行的理论》的演说。之后他研究了围绕和流过障碍物的流体运动，并于 1906 年发表了论文《论连接涡流》，创立了以空气动力学为基础的机翼升降原理，找到了计算飞机翼型的方法。而这一切都依赖于复数与复变函数论。

从此，复数有了用武之地，也就正式获得了承认。



俄罗斯航空之父儒可夫斯基利用复数变化找到了计算飞机机翼的算法

2 复数的文化意义

复数的诞生，在人类历史文化进程中具有重要意义，特别对人类关于数学的认识具有重要的影响。

我们先来看在复数以前人们对于数以及数学的认识。在复数以及非欧几何诞生以前，人们总把数学与物理、天文等自然学科一样看待，认为数学也是自然科学的一部分，它的定理就对应着真实的自然规律。但是，复数的诞生，这个虚无缥缈的“i”明明是人们为了解决负数开方问题而引入或说创造的“数”，现在却找到了巨大的用途。由此也就引起了人们对数学的更深层次上的思考。再加上 19 世纪非欧几何的诞生等一系列重大数学成果的产生，促使人们对数学的本质问题进行深入探讨。

要考察复数的意义，我们就必须考察数学与数的本质。恩格斯曾经说过，“数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的，最简单的说，是研究数与形的科学”。由此，数学应该是与实践、经验密切相关的，也就是数学是反映客观实在的。那么，数学是如何反映客观实在的呢？首先，数学在初始阶段虽然也是以现实世界的空间的形式与数量关系为研究对象，但随着数学的进步，在古希腊时就已经把这些材料对象“表现于非常抽象的形式之中”，其目的就是为了“能够在其纯粹状态中去研究这些形式和关系，那么就必须完全使它们脱离其内容，把内容放置一边作为不相干的东西，这样我们就得到没有面积的点，没有厚度和宽度的线，各种的 a 和 b，x 和 y，常数和变数”[5]。所以，

数学虽然也是以现实的材料作为研究对象，但由于它的研究方法——抽象性，所以在考察对象时已经完全舍弃了其具体内容与质的特点。由此可知，数学是不同于其它自然科学的。其次，数学抽象方法的特殊性还表现在它具有的特殊意义，“尽管一些基本的数学概念是建立在对于真实事物或现象的直接抽象之上”。“数学中还有一些概念与真实世界的距离是如此之遥远，以致常常被说成‘思维的自由创造’。由于这些远离自然界的、从人的脑子中源源不断地涌现出来的概念渐渐取代了直接观念化的对象，数学有时又被称之为创造性的艺术”。[6] 如此，如虚单位“i”等人为的数学对象就是在这样的“间接”抽象之上——为了运算的顺利——而被创造出来的，并且随着数学研究的深入，越来越多类似于虚单位“i”这样的人类创造物逐渐成为数学的主要研究对象，由此也就确定了数学的文化性质。

复数、四元数、非欧几何等一系列事件，接连冲击着人们从古希腊就形成的“数学是与客观规律以及真理等价的”观念，从而为人们深入思考数学的本质带来了机会。而这一探讨的结果就是颠覆了人们两千多年来对于数学固有的认识，促使人们认识到数学与物理空间有着本质的区别：数学是人们的创造物，数学是人们创造出的一种用于描述自然现象的语言，或者说数学是文化。“数学可以是来自经验启示的一种创造，但它并不等于客观世界的规律”。[7] 由此，数学就失去了其天然的真理性，而只留下其文化的本质。

数学真理性的丧失[8]，带来的是人们思想上的革命，认识上的革命。过去，由于认为数学是以客观经验作为基础的，数学定理就与客观规律、客观真理完全等同起来；其次，也正因为这种认识，使得人们的思维与数学创造性被严格局限于直观与经验之中。现在，由于数学的文化性质，人们就无需再顾忌数学的经验性，而可以展开思维的翅膀，进行更为自由的、广泛的、更为理想化的创造性研究。再次，数学丧失了真理性，也就不能再与物理、化学、天文学等自然科学等同了，就必须从自然科学中分离出来。数学从自然科学中独立出来，既不意味着它割裂了其与自然科学两千年来形成的血肉联系，也不意味着数学会因此迷失方向而陷于停顿状态，而是有了其特有的文化精神。此时，数学的研究一方面继续受到来自于自然科学与社会实践提出来的问题的驱动，而另一方面是受到数学自身发展的驱动；数学的研究范围、研究对象更为广阔，动力更加充分。数学不再是科学的化身，而是要为科学提供语言、方法和工具，提供各种各样的模式供科学，包括自然科学、社会科学与人文科学选择；进一步地，它要为人们提供数学的理解方式和思想观念。

由上可知，复数、非欧几何与哥白尼的日心说，牛顿的引力定律，达尔文的进化论一样，对人类认识论、思想的进步产生了巨大的影响。遗憾的是，这一事实在一般思想史上却没有受到应有的重视。

作者介绍：

薛有才，毕业于山西师范大学数学系，数学教授。主要研究方向为计算数学，数学教育，科学技术哲学。曾在国内外学术刊物上发表学术论文 150 多篇，出版《数学文化》等大学教材、专著 10 余部。

参考文献

1. 梁宗巨：世界数学史简编。辽宁人民出版社。1988 年，149-150 页。
2. M. 克莱因：古今数学思想（第一册）。上海科学技术出版社，1979 年，294 页。
3. 鲁又文：数学古今谈。天津科学技术出版社，184 年，117 页。
4. 〔美〕莫里兹编著，朱剑英编译：数学家言行录。江苏教育出版社，1990 年，96 页。
5. 恩格斯：反杜林论。人民出版社，1956 年版，37 页。
6. 郑毓信：数学教育哲学。四川教育出版社，2001 年，55 页。
7. 郑毓信：数学文化学。四川教育出版社，2001 年，216 页。
8. 克莱因：数学：真理性的丧失。湖南科技出版社，1997，89 页。