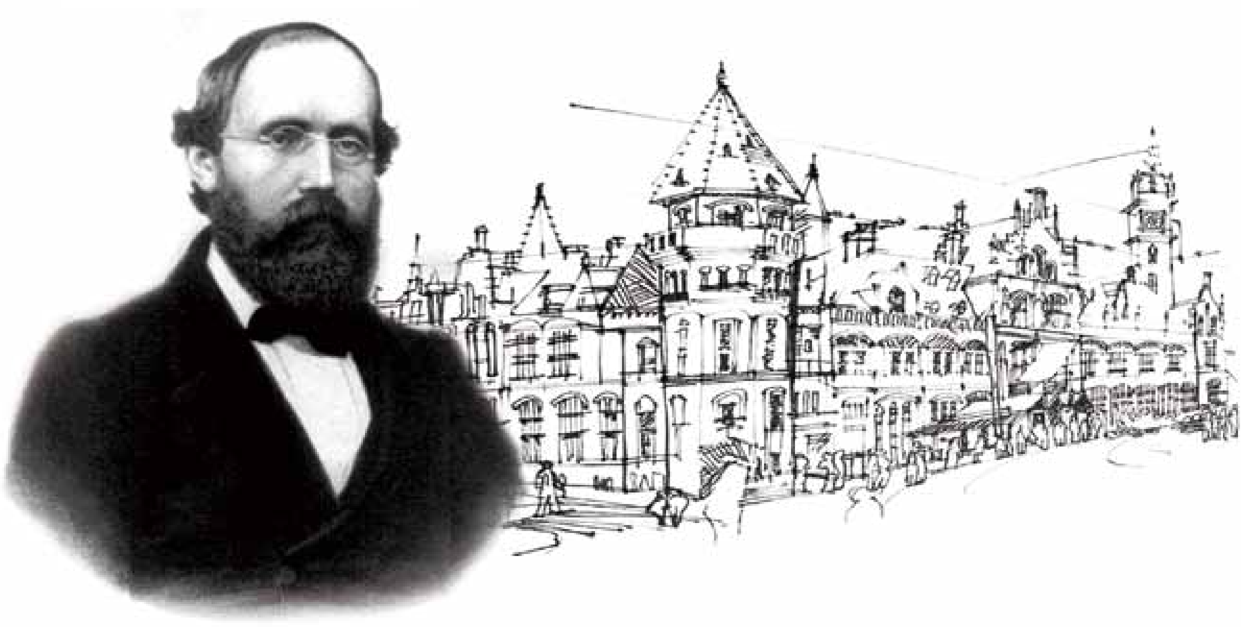
Riemann



黎曼猜想漫谈(三)

卢昌海

12 休闲课题：围捕零点

听说时下流行一种休闲方式叫做 DIY（Do It Yourself），讲究自己动手做一些原本只有工匠才做的事，比方说自己动手做件陶器什么的。在象我这样懒散的人看来这简直比工作还累，可如今许多人偏偏就兴这个，或许是领悟了负负得正（累累得闲？）的道理吧。既是大势如此，我们也乐得共襄盛举，安排“休闲”一下，让大家亲自动手用黎曼 - 西格尔公式来计算一个黎曼 ζ 函数的非平凡零点。

DIY 一般有个特点，那就是课题虽然选得颇见难度，做起来通常却是挑最简单的来做，以免打击休闲的积极性。我们计算零点也一样，挑相对简单的零点来计算。那么什么样的零点比较容易计算呢？显然是那些听黎曼的话，乖乖地躺在 critical line 上的零点——因为否则的话黎曼猜想早被推翻了。

在黎曼 - 西格尔公式中有许多复杂的东西，其中最令人头疼的是求和，因为它使计算量成倍地增加。但幸运的是那个求和是对 $n^2 < t/2\pi$ 进行的，因此如果 $t < 8\pi \approx 25$，求和就只有 $n = 1$ 一项。这显然是比较简单的，因此我们狡猾的目光就盯在了这一区间上。在这一区间上，黎曼 - 西格尔公式简化成为：

$$Z(t)=2\cos[\theta(t)]+R(t),$$

这就是我们此次围捕零点的工具。

在正式围捕之前，我们先做一点火力侦察——粗略地估计一下猎物的位置。我们要找的是使 Z(t) 为零的点，直接寻找显然是极其困难的，但我们注

意到 $2\cos[\theta(t)]$（通常被称为主项）在 $\theta(t)=(m+1/2)\pi$ 时为零（m 为整数），这是一个不错的出发点。由上节中 $\theta(t)$ 的表达式不难证明，在所有这些使 $2\cos[\theta(t)]$ 为零的 $\theta(t)$ 中，$\theta=-\pi/2$（即 $m=-1$）是使 t 在 $0<t<25$ 中取值最小的，它所对应的 t 为 $t\approx 14.5$。这是我们关于零点的第一个估计值。纯以数值而论，它还算不错，相对误差约为百分之三。

接下来我们对这个估计值进行一次修正。修正的理由是显而易见的，因为 $t\approx 14.5$ 时 $R(t)$ 明显不为零。为了计算 $R(t)$ 我们注意到 $t\approx 14.5$ 时 $(t/2\pi)^{1/2}\approx 1.5$，因此 $R(t)$ 中的参数 N [$(t/2\pi)^{1/2}$ 的整数部分] 为 1，p [$(t/2\pi)^{1/2}$ 的分数部分] 约为 0.5。由此可以求出 $R(t)$ 中的第一项——$C_0(t/2\pi)^{-1/4}$——约为 0.3。

为了抵消这额外的 0.3，我们需要对 t 进行修正，使 $2\cos[\theta(t)]$ 减少 0.3。我们采用线性近似 $\Delta t\approx \Delta F(t)/F'(t)$ 来计算这一修正值。为此注意到 $2\cos[\theta(t)]$ 在 $t\approx 14.5$ 处的导数为

$$-2\theta'(t)\sin[\theta(t)]\approx -2(1/2)\ln(14.5/2\pi)\sin(-\pi/2)\approx 0.83.$$

由此可知 t 需要修正为 $t+\Delta t\approx 14.5-0.3/0.83\approx 14.14$。这个数值与零点的实际值之间的相对误差仅为万分之四。但是需要提醒读者的是，这种估计——无论它多高明——都不足以证明零点的存在，它至多只能提供一个围捕零点的范围。

那么究竟怎样才能证明零点的存在呢？ 我们在上节已经提供了方法。那就是通过计算 $Z(t)$ 的符号，如果 $Z(t)$ 在某两点的符号相反，就说明黎曼 ζ 函数在这两点之间内存在零点。我们上面所做的估计就是为这一计算做准备的。现在我们就来进行这样的计算。由于我们已经发现在 $t=14.14$ 附近可能存在零点，因此我们在 $14.1\le t\le 14.2$ 的区间上撒下一张小网。如果我们的计算表明 $Z(t)$ 在这一区间的两端，即 $t=14.1$ 与 $t=14.2$ 具有不同的符号，那就证明了黎曼 ζ 函数在 $t=14.1$ 与 $t=14.2$ 之间存在零点[注12.1]。下面我们就来进行计算：

对于 $t=14.1$，

$$(t/2\pi)^{1/2}\approx 1.498027,\quad \theta(t)\approx -1.742722.$$

因而主项 $2\cos[\theta(t)]\approx -0.342160$，剩余项 R(t) 中 $p\approx 0.498027$，从而其中第一项（C_0 项）$C_0(t/2\pi)^{-1/4}\approx 0.312671$。由这两部分（即主项及剩余项中的第一项）可得：

$$Z(14.1)\approx -0.342160+0.312671=-0.029489.$$

类似地，对于 $t=14.2$，

$$(t/2\pi)^{1/2}\approx 1.503330,\quad \theta(t)\approx -1.702141.$$

因而主项 $2\cos[\theta(t)]\approx -0.261934$，剩余项 $R(t)$ 中 $p\approx 0.503330$，从而其中第一项（C_0 项）$C_0(t/2\pi)^{-1/4}\approx 0.312129$。由这两部分（即主项及剩余项中的第一项）可得：

$$Z(14.2)\approx -0.261934+0.312129=0.050195.$$

显然，如我们所期望的，$Z(14.1)$ 与 $Z(14.2)$ 符号相反，这表明在 $t=14.1$ 与 $t=14.2$ 之间存在黎曼 ζ 函数的零点。当然，我们还没有考虑 $C_1\sim C_4$ 项。这些项中带有 C_0 的各阶导数，计算起来工作量非同小可，有违休闲的目的，因此就不费心了。熟悉计算软件的读者可以用 Mathematica、Maple 或 Matlab 一类的工具来算一下。我们把所有这些计算结果都列在下表中：

	t=14.1	t=14.2
N	1	1
p	0.498027	0.503330
$\theta(t)$	−1.742722	−1.702141
$2\cos[\theta(t)]$	−0.342160	−0.261934
C_1 项	0.312671	0.312129
C_2 项	0.000058	0.000097
C_3 项	0.001889	0.001872
C_4 项	0.000001	0.000002
C_5 项	0.000075	0.000074
$Z(t)$	−0.027446	0.052042

注 12.1

要注意的是，$Z(t)$ 在一个区间的两端具有不同符号只是 Riemann ζ 函数在该区间存在零点的充分条件，而非必要条件。换句话说，假如我们不幸发现 $Z(t)$ 在我们所取的两点上具有相同的符号，不能直接得出结论说 Riemann ζ 函数在这两点之间不存在零点。至于这是为什么，请大家 DIY。

从这些结果中可以看到，剩余项中的高阶项的贡献虽然有所起伏，但与第一项相比总体上很小。对于我们来说，这显然是很幸运的结果，因为否则的话，我们就得休闲不成反卖苦力了。这还是 t 较小的情况。随着 t 的增加，由于高阶项中所含 t 的负幂次较高，其贡献会变得越来越小[注 12.2]，但要严格表述这种趋势并予以证明，却绝非轻而易举。事实上黎曼-西格尔公式作为 $Z(t)$ 的渐进展开式，其敛散性质与误差估计都是相当复杂的。

现在我们知道了黎曼 ζ 函数在 $t = 14.1$ 与 $t = 14.2$ 之间存在零点。如果我们再仔细点，注意到 $Z(14.1)$ 与 $Z(14.2)$ 距离 $Z(t) = 0$ 的远近之比为 0.027446:0.052042，用线性内插法可以推测零点的位置为：

$$t \approx 14.1 + (14.2 - 14.1) \times 0.027446 / (0.027446 + 0.052042) \approx 14.1345.$$

这与现代数值 $t = 14.1347$ 的相对偏差只有不到十万分之二！即使只估计到 C_0 项（这是我们自己动手所及的范围），其误差也只有不到万分之二。

好了，猎物在手，我们的简短休闲也该见好就收了。大家是否觉得有点成就感呢？要知道，黎曼 ζ 函数的零点可是在黎曼的论文发表之后隔了四十四年才有人公布计算结果的哦。当然，我们用了黎曼-西格尔公式，但这没什么，一个好汉三个帮嘛，再说了，DIY 哪有真的百分之百从头做起，连工具设备都不包括在内的？想象一下，如果你 DIY 出来的陶器能够把缺陷控制在万分之二以内，那是何等的风光？当然，倘若你可以退回一百多年，把这个结果抢在格拉姆（Jørgen Gram，1850-1916）之前公布一下，那就更风光了。

在本节最后，还有一件可能让大家有成就感的事要提一下。那就是我们所用的估计零点的方法——即从使 $2\cos[\theta(t)]$ 为零的点出发，然后依据 $R(t)$ 的数值对其进行修正[注 12.3]，最后用 $R(t)$ 的符号来确定零点的存在，暗示黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点数目大致与 $\cos[\theta(t)]$ 的零点数目相当。而后者大约有（请大家 DIY）$\theta(t)/\pi \sim (t/2\pi)\ln(t/2\pi) - (t/2\pi)$ 个。不知大家是否还记得，这正是我们在第五节中介绍过的黎曼的三个命题中迄今无人能够证明的第二个命题！当然，我们这个也不是证明（真可惜，否则的话，嘿嘿 ...），但这应该使大家对我们休闲手段之高明有所认识吧？

13 从纸笔到机器

黎曼-西格尔公式的发表大大推进了人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的计算。如我们在前两节所看到的，黎曼-西格尔公式中的求和项数是由 $n^2<(t/2\pi)$ 确定的，这表明用黎曼-西格尔公式计算一个位于 $s = 1/2+it$ 附近的零点所需的计算量为 $O(t^{1/2})$。而在这之前人们所用的欧拉-麦克劳林（Euler-Maclaurin）公式计算同样的零点所需的计算量约为 $O(t)$。这两者的差别——也就是黎曼-西格尔公式相对于欧拉-麦克劳林公式的优越之处——随着 t 的增大而变得越来越明显。

黎曼-西格尔公式发表大约四年后，哈代（Godfrey Hardy，1877-1947）的学生、英国数学家蒂奇马什（Edward Titchmarsh，1899-1963）成功地计算出了黎曼 ζ 函数前 1041 个零点的位置，它们全都位于 critical line 上。这是十一年来数学家们首次突破我们在第八节提到过的由哈奇森（J. I. Hutchinson）于 1925 年创造的 138 个零点的记录。蒂奇马什的工作在黎曼 ζ 函数非平凡零点计算史上的地位是双重的：从计算方法上讲，它是数学家们首次用黎曼-西格尔公式取代欧拉-麦克劳林公式进行大规模零点计算；从计算手段上讲，蒂奇马什的计算使用了英国海军部用来计算天体运动及潮汐的一台打孔式计算机（punched-card machine），这是数学家们在零点计算上首次用机器计算取代传统的纸笔计算。这两个转折是数学与技术相辅相成的结

注 12.2

但另一方面，随着 t 的增加，Riemann-Siegel 公式中的求和所包含的项数会逐渐增加，因此计算的总体复杂程度并不呈现下降趋势。

注 12.3

对于求和中有不止一项的情形，修正所依据的不仅仅是 $R(t)$，但思路是类似的。

Riemann

果，它奠定了直到今天为止人们对黎曼ζ函数非平凡零点进行计算的基本模式。

蒂奇马什之后零点的计算因第二次世界大战的爆发中断了十几年。战后最先将计算推进下去的是著名的英国数学家图灵（Alan Turing，1912-1954）。图灵其实早在战前就对黎曼猜想产生了兴趣。与当时许多其他年轻数学家一样，图灵对希尔伯特（David Hilbert，1862-1943）的数学问题很感兴趣，这其中又尤以第十问题与第八问题（黎曼猜想是第八问题的一部分）最让他着迷[注 13.1]。他后来主要的研究都是以这两个问题为主轴展开的。1936 年图灵到普林斯顿大学读研究生，在那里见到了来访的哈代——他原本希望能在普林斯顿见到哥德尔（Gödel，1906-1978），可惜后者当时已经去了欧洲。那时哈代对黎曼猜想的态度已经相当悲观。这种悲观情绪对图灵产生了影响，他觉得这么多年来所有证明黎曼猜想的努力都归于失败，也许是到了换个角度思考问题的时候了。人们一直无法证明黎曼猜想，也许并非因为它太难，而是因为它根本就不成立！

一个数学命题，它的成立需要证明，不成立同样需要证明。假如黎曼猜想真的不成立，我们怎样才能证明这一点呢？ 我们当然可以试图从数学上直接证明其不成立，这是一种方法。但还有一种办法，那就是找到一个反例，即找到一个不在 critical line 上的零点。这种方法的好处是不在乎多少，只要一个反例就足够了。被后世誉为“计算机与人工智能之父”的图灵显然对后一种方法情有独钟。当时图灵已经提出了后来以他名字命名的图灵机的概念。很自然的，他希望建造一台机器来计算零点。但是这一工作起步不久，英国就卷入了二战，图灵开始参与英国情报部门破译德军密码的工作，建造机器的计划被搁置了下来。战争结束后，图灵渐渐恢复了建造机器及计算零点的计划。图灵虽然是以其对计算机及人工智能领域的卓越贡献著称的，但他在传统数学领域也有相当深厚的功力，早在读本科的时候，他就曾独立证明了概率论中著名的中心极限定理（可惜比 J. W. Lindeberg 晚了十余年）。在建造机器的同时，图灵对计算零点的数学方法也进行了研究，并做了一些改进。

经过几年的努力，到了二十世纪五十年代初，图灵终于完成了他的机器，并且比创造战前记录的蒂奇马什略进一步，计算出了前 1104 个零点。不过他试图寻找黎曼猜想反例的努力并不成功，因为所有这些零点全部位于 critical line 上，黎曼猜想在他计算所及的范围内岿然不动。在那之后，图灵的机器坏掉了。几乎与此同时，他的个人生活也遭遇了极大的挫折。他于 1952 年被控犯有当时属于违法的同性恋行为，受到强制药物治疗及缓刑的处罚。两年后他被发现因氰化物中毒死于寓所。多数人相信他是自杀[注 13.2]。

在图灵之后，随着计算机发展的加速，数学家们对零点的计算也越来越快。1956 年，D. H. Lehmer 计算了前 25000 个零点；两年后 N. A. Meller 把这一记录推进到了 35337 个零点；1966 年，R. S. Lehman 再次刷新记录，他计算了 250000（二十五万）个零点；三年后这一记录又被 J. B. Rosser 改写为 3500000（三百五十万）…

黎曼ζ函数的零点计算步入了快车道！

14 最昂贵的葡萄酒

验证了三百五十万个零点虽不足以证明什么，但对黎曼猜想还是有着一定的心理支持作用。不过许多数学家对这点心理支持作用很不以为然，其中有一位数学家最为突出，不仅不以为然，而且还“顶风作案”，跟同事打赌！

这位打赌的数学家是德国波恩马克·普朗克数学研究所（Max Planck Institute for Mathematics）的查

注 13.1

Hilbert 第十问题是：给定一个具有任意多未知数的 Diophantine 方程，设计一个过程，能用有限多次运算确定该方程是否具有整数解。Turing 对计算机及人工智能的研究与此有着密切的关系。

注 13.2

图灵与约翰·纳什（影片《美丽心灵》的主角）颇有相似之处：两人都对纯数学有浓厚的兴趣，研究成果却对应用领域影响深远；两人都对物理学有过一些兴趣；两人都有为军方服务的经历；两人后来的精神世界都偏离了常轨…

基尔（Don Zagier，1951- ）。对查基尔来说，区区三百五十万个零点简直就是 zero evidence，因为他认为黎曼 ζ 猜想的反例根本就不可能出现在这么前面的零点之中，因此在他看来当时已完成的所有有关零点的计算其实都还远没有涉及到真正有价值的区域。那么要计算多少个零点才可能对黎曼猜想具有判定性的价值呢？查基尔通过对一些由黎曼 ζ 函数衍生出来的辅助函数的研究，认为大约要 300000000（三亿）个零点。

查基尔的怀疑论调很快遇到了对手。二十世纪七十年代初，马克 • 普朗克数学研究所的访客名单中出现了一位铁杆的黎曼猜想支持者：蓬皮埃利（Enrico Bombieri，1940-）。这是一位非同小可的人物，他在不久之后的 1974 年获得了数学最高奖——菲尔兹奖。蓬皮埃利深受哲学家奥卡姆（William of Occam，1288-1348）的科学简单性原则（俗称奥卡姆剃刀）的影响，对他来说，一个不在 critical line 上的零点就象交响乐中的一个失控的音符，是完全无法令人接受的。

一个怀疑、一个深信，怎么办呢？查基尔提议打赌。不过人生苦短，两人都意识到自己未必有机会能在有生之年见到黎曼猜想被证明或证伪。为了不使赌局太过遥遥无期，双方决定以查基尔认为具有判定性价值的前三亿个零点为限。如果黎曼猜想在前三亿个零点中出现反例，就算查基尔获胜； 反之，如果黎曼猜想被证明，或者虽然没被证明但在前三亿个零点中没出现反例，则算蓬皮埃利获胜[注 14.1]。他们定下的赌注为两瓶波尔多葡萄酒（Bordeaux）。

查基尔估计这个赌局要分出胜负也许得花上三十年，因为当时计算机的运算能力距离能够计算三亿个零点还相差很远，而且计算黎曼 ζ 函数的零点没什么应用价值，在 CPU 时间十分昂贵的时代并不是人们热衷的计算课题。可是没想到仅仅过了几年，1979 年，由布伦特（Richard Brent，1946-）领导的一个澳大利亚研究组就把零点计算推进到了前 81000000（八千一百万）个零点。不久由特里奥（Herman te Riele,1947-）领导的一个荷兰研究组更是成功地计算出了前两亿个零点。所有这些零点都毫无例外地落在黎曼猜想所预言的 critical line 上。这一系列神速的进展对查基尔的钱包显然是大大的凶兆，到这时他已经知道自己大大低估了计算机领域的发展速度。不过特里奥在两亿个零点处终止计算还是让查基尔松了一口气，他庆幸道 :“毫无疑问他们有能力推进到三亿，但感谢上帝，他们没那么做。现在我总算有几年时间可以喘息了。他们是不会为了多算 50% 而推进的。人们会等待能够算到十亿个零点的那一天，那将是许多年后的事了。”

查基尔的如意算盘原本打得不错，计算零点不象百米赛跑，在百米赛跑中由于比赛记录已经逼近人类所能达到的速度极限，因此大家不惜为百分之一秒争个你死我活。计算零点却是一条没有尽头的征程，计算能力的发展在相当长的时间内也是没有尽头的。在这种没有尽头的征程上，仅仅多算百分之几十的零点是不够刺激的，人们更感兴趣的是数量级上的推进。这正是查基尔认为自己可以喘息几年的心理屏障。可惜人算不如天算。查基尔万万没有想到他的一位好朋友伦斯特拉（Hendrik Lenstra，1949-）当时正在荷兰，不仅在荷兰，而且与特里奥同在一个城市——阿姆斯特丹！ Lenstra 是知道查基尔和蓬皮埃利的赌局的。如今眼看好戏就要开演了，正自心痒难搔，特里奥竟然不合时宜地在两亿个零点处停了下来，伦斯特拉的那份难受就甭提了（大家以后可得留神好朋友啊！），套用一句韦爵爷的话说，那真是“生可忍，熟不可忍”。于是他给特里奥做思想工作：你知不知道，如果你算到三亿，查基尔就会输掉一个赌局！特里奥一听原来计算零点还有这么伟大的意义，那还等什么？把查基尔干掉啊！于是大家一鼓作气把计算推进到了 307000000（三亿零七百万）个零点处。那是在 1982 年。

查基尔输了。

查基尔兑现了诺言，买来两瓶葡萄酒，蓬皮埃利当场打开其中一瓶与查基尔共享。这一瓶酒，用查基尔的话说，是世界上被喝掉的最昂贵的葡萄酒。因为正是为了这两瓶酒，特里奥特意多计算了一亿

注 14.1

严格讲，他们的条款还忽略了一种可能性，那就是 Riemann 猜想在数学上被证伪，但反例并不在前三亿个零点之中（或虽然在前三亿个零点之中，但尚未有人进行计算）。显然，这个忽略对 Zagier 比较不利，不过它对赌局后来的发展没有产生影响。

个零点。这花费了整整一千个小时的 CPU 时间，而特里奥所用的计算机的 CPU 时间在当时大约是七百美元一小时。换句话说，这两瓶酒是用七十万美元的计算经费换来的，被他们喝掉的那一瓶价值达三十五万美元！

喝完了那瓶酒，查基尔从此对黎曼猜想深信不疑。只不过，蓬皮埃利相信黎曼猜想是因为它的美丽，是因为奥卡姆剃刀；而查基尔相信黎曼猜想是因为证据，是因为他觉得证据已经足够强了。

15 更高、更快、更强

三亿个零点摆平了查基尔，但显然远不是对黎曼 ζ 函数非平凡零点进行计算的终点。不过在介绍进一步进展之前我们先要对零点计算做一点补充说明。

当我们说到零点计算的时候，一般人会很自然地认为所谓零点计算，顾名思义就是计算零点的数值。不知读者在上一节时有没有想过这样一个问题：那就是三亿个零点，即使每个只保留十位数字，写下来也有三十亿个数字（如果加上小数点、等号及零点编号等，则数字还要翻上一番）。以每页三千个数字而论，起码要一百万页纸才能记录下来！当然，计算结果不是非得记录在纸上不可的。但是三十亿个数字差不多是 3GB，这在今天虽然算不了什么，在 1982 年却是非同小可的数量，用任何方式记录都并不容易。以计算机硬盘为例，当时容量为几个 MB 就算很大了，价格十分昂贵，而要想记录三亿个零点却要上千个这样的硬盘！若果真如此，查基尔岂不还大大低估了他那两瓶葡萄酒的价值？

其实狡猾的特里奥并没有计算那些零点的具体数值。事实上除了最初那些小范围的计算外，我们前面介绍的大规模零点计算并不给出零点的具体数值，而只是验证零点是否在 critical line 上。因此，当人们说“计算了前 N 个零点”时，实际指的往往只是验证了前 N 个零点是否位于 critical line 上[注 15.1]。

但是不计算零点的数值，又如何判断零点是否在 critical line 上呢？其实很简单。我们在第十一节中介绍过，要研究黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点，只需研究 $Z(t)$ 的符号改变即可。假如在区间 $0<t<T$ 内 $Z(t)$ 的符号改变 N 次，则黎曼 ζ 函数在 critical line 上该区间内至少有 N 个零点。另一方面，我们虽不确定是否所有零点都在 critical line 上，却知道它们全部位于 critical strip — $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ — 内（参阅第七节），而人们早就知道如何计算 critical strip 内位于区间 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 的零点总数（最早的方法是由黎曼本人给出的对 $d\xi(s)/2\pi i\xi(s)$ 沿矩形区域 $\{0<\mathrm{Re}(\rho)<1,\ 0<\mathrm{Im}(\rho)<T\}$ 作边界路径积分——参阅第五节）。显然，只要我们能够证明：

1. 在 critical strip 内位于区间 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 的零点总数为 N；
2. 在 critical line 上位于区间 $0<t<T$ 的零点至少有 N 个

就可以推知黎曼 ζ 函数的前 N 个零点全部位于 critical line 上。由于这两者都不涉及零点的具体数值。因此我们可以不计算零点数值就直接证明黎曼 ζ 函数的前 N 个零点（或更一般地，复平面上某个区域内所有的零点）都位于 critical line 上，这正是大多数零点计算所采用的方法。

对黎曼 ζ 函数零点的计算越推进（即 N 越大），我们在复平面上沿虚轴方向延伸得就越高（即 T 越大）。随着计算机运算速度越来越快，特里奥的三亿个零点的记录很快就失守了。四年后，由他本人及 J. van de Lune 领衔将计算推进到了十五亿个零点。此后 van de Lune 及其他一些人继续进行着零点计算。不过这时已经很少有人象当年的图灵那样觉得有可能通过零点计算直接找到黎曼猜想的反例，也再没有象查基尔那样敢于下注的勇士了。人们在计算零点上的兴趣和投入遂大为下降。这其中一个显著的变化就是逐渐用廉价的小型或微型机取代以往的大型机，且往往使用机器的闲散时间而非正规工作时间来进行计算。尽管如此，计算机技术的神速发展还是抵消了所有这些因素带来的不利影响。零点计算仍在推进着，只是速度变得缓慢起来，这种趋势一直延续到

注 15.1

举个例子来说，虽然早在 1982 年特里奥就“计算了”前三亿个零点，但直到几年后 Odlyzko 与特里奥才合伙对区区两千个零点做了真正的数值计算（精度达小数点后一百位），并以此为基础一举否证了 Mertens 猜想（参阅第六节）。

Riemann

二十世纪末（2000 年）。

但是到了 2001 年 8 月，德国伯布林根（Böblingen）IBM 实验室的 Sebastian Wedeniwski 启动了一个被称为 ZetaGrid 的计划，建立了迄今为止最强有力的黎曼 ζ 函数零点计算系统，重新将零点计算推向了快车道。ZetaGrid 系统将零点计算通过计算机网络分散到大量的计算机上，从而极大地拓展了资源利用面。ZetaGrid 刚启动的时候，加入系统的计算机只有 10 台，半年后就增加到了 500 台，这些都是 IBM 实验室的内部计算机。一年后，Wedeniwski 将 ZetaGrid 推向了互联网，任何人只要下载安装一个小小的软件包就可以使自己的机器加入 ZetaGrid，此举很快吸引了大量的参与者。如今在 ZetaGrid 上的联网计算机数平均已在一万以上，虽然 ZetaGrid 上的多数计算是利用各台机器的闲散 CPU 时间进行的（比如通过背景过程或屏保程序），但由如此大量的计算机所形成的总体运算能力依然十分可观。截至 2004 年 7 月，ZetaGrid 所计算的零点累计已达 8553 亿个（其中有六百万个是由本文作者贡献的 :-)，而且还在以大约每天十亿个以上的速度增加着。

16 零点的统计关联

除了不计算具体数值这一特点外，前面所介绍的那些大规模零点计算还有一个特点，那就是都只针对前 N 个零点。换句话说，所有那些计算都是以第一个零点为起始的。它们所验证都只是复平面上 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 之间的零点。除了这类计算外，在零点计算中还有一类计算也十分重要，那就是针对一个虚部很大的区间 $T_1<\mathrm{Im}(\rho)<T_2$ 的计算（即从某个很大的序号开始的零点计算）。这类计算中最著名的人物是 Andrew M. Odlyzko，他在二十世纪八十年代末和九十年代初对序号在 $10^{20}-30769710$ 和 $10^{20}+144818015$ 间的总计 175587726 个零点进行了计算。2001 年和 2002 年，他更是把计算的起始点推进到了第 10^{22} 和 10^{23} 个零点附近，所计算的零点数目也分别增加到了一百亿和两百亿。Odlyzko 的这些计算不仅所涉及的区域远远超出了 ZetaGrid 的验证范围，而且还包含了对零点数值的计算。这些计算对于研究黎曼猜想的意义不仅在于它们提供了有关这一猜想的新的数值证据，更重要的是它们为研究黎曼 ζ 函数非平凡零点在 critical line 上的统计关联提供了数据。这也正是 Odlyzko 进行这类计算的目的。

那么 Odlyzko 为什么会研究起零点的统计关联来呢？这还得从二十世纪七十年代初说起。当时英国剑桥大学有位来自美国的研究生叫做蒙特哥麦利（Hugh Montgomery），他所研究的课题是零点在 critical line 上的统计关联。

蒙特哥麦利这个名字不知大家有没有觉得面熟？对了，本系列各篇文章所引的共同题记正是出自此人！

我们以前谈论零点分布的时候，所关心的往往只是零点是否分布在 critical line 上。蒙特哥麦利的研究比这更进一步。他想知道的是，假如黎曼猜想成立，即所有零点都分布在 critical line 上，那它们在 critical line 上的具体分布会是什么样的？

在蒙特哥麦利进行研究的时候虽然已经有 Rosser 对前三百五十万个零点的计算结果（参阅第十三节），但如我们在上文中所说，那些计算并不涉及零点的具体数值，从而无法为他提供统计研究的依据。因此 Montgomery 只能从纯理论的角度来研究零点在 critical line 上的统计关联。

蒙特哥麦利对零点分布的理论研究从某种意义上讲恰好与黎曼对素数分布的研究互逆。黎曼的研究是着眼于通过零点分布来表示素数分布 （参阅第五节），而蒙特哥麦利的研究则是逆用黎曼的结果，着眼于通过素数分布来反推零点分布。

不幸的是，素数分布本身在很大程度上就是一个谜。除了素数定理外，有关素数分布的多数命题都只是猜测。而素数定理，如我们在第七节中看到的，与零点分布的相关性非常弱，不足以反推出蒙特哥麦利感兴趣的信息。于是蒙特哥麦利把目光投注到了比素数定理更强的一个命题，那便是哈代与李特尔伍德（J. E. Littlewood，1885 - 1977）于 1923 年提出的关于孪生素数分布规律的猜测，即迄今尚未证明的著名的强孪生素数猜想（有关这一猜想的介绍可参阅拙作孪生素数猜想）。蒙特哥麦利以黎曼猜想的成立为前提，以黎曼的公式及哈代与李特尔伍德所猜测的孪生素数分布规律为依据，研究提出了有关黎曼 ζ 函数非平凡零点在 critical line 上的分

Riemann

布规律的一个重要猜测：

$$\lim_{T\to\infty}\frac{\left|\left\{(t',t'')\,\middle|\,0\le t'\le t''\le T,\ \frac{2\pi\alpha}{\ln(T/2\pi)}\le t''-t'\le\frac{2\pi\beta}{\ln(T/2\pi)}\right\}\right|}{\frac{T}{2\pi}\ln\frac{T}{2\pi}}$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[1-\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2\right]dt,$$

上式中 t' 和 t'' 分别表示一对零点的虚部，α 和 β 是两个常数 ($\alpha<\beta$)。很明显，上式表示的是零点的对关联（pair correlation）规律。这一规律被称为 Montgomery - 对关联假设（Montgomery pair correlation conjecture），其中的密度函数 $\rho(t)=1-[\sin(\pi t)/\pi t]^2$ 被称为零点的对关联函数（pair correlation function）。

从上述分布规律中可以看到 $\lim_{t\to 0}\rho(t)=0$，这表明两个零点互相靠近的几率很小。换句话说黎曼 ζ 函数的非平凡零点有一种互相排斥的趋势。这一点与蒙特哥麦利最初想象的很不相同。蒙特哥麦利曾经以为零点的分布是高度随机的，如果那样的话，对关联函数应该接近于 $\rho(t)\equiv 1$。这一分布也不同于蒙特哥麦利当时见过的任何其它统计分布——比如 Poisson 分布或正态分布——中的对关联函数，它与素数本身的分布也大相径庭。这一分布究竟有何深意呢？对蒙特哥麦利来说还是一个谜。

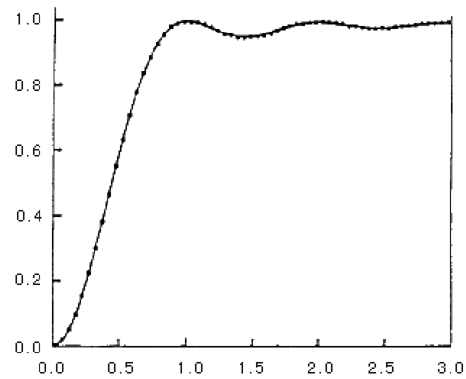
大家也许还记得，在第五节中我们曾经介绍过黎曼提出的三个命题，其中第一个命题 (也是迄今唯一被证明的一个) 表明在区间 $0<\mathrm{Im}(\rho)<T$ 上黎曼 ζ 函数的非平凡零点的数目大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。由此不难推知（请读者自行证明）黎曼 ζ 函数相邻零点的间距（即虚部之差）大约为 $\Delta t\sim 2\pi/\ln(T/2\pi)$。这一间距随 t 而变，这使得 Montgomery - 对关联假设的形式比较复杂。有鉴于此，蒙特哥麦利之后的数学家（比如 Odlyzko）对零点的虚部做了处理，引进了间距归一化的零点虚部：

$$n=\frac{t}{2\pi}\ln\left(\frac{t}{2\pi}\right),$$

利用这一定义，相邻零点的间距被归一化为 $\Delta n\sim 1$，而蒙特哥麦利对关联假设可以简化为（请读者自行证明）：

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\left|\left\{(n',n'')\,\middle|\,0\le n'\le n''\le N,\ \alpha\le n''-n'\le\beta\right\}\right|}{N}$$

$$=\int_\alpha^\beta\left[1-\left(\frac{\sin\pi t}{\pi t}\right)^2\right]dt.$$



零点的对关联函数

Montgomery - 对关联假设提出之后，一个很自然的问题就是：零点分布果真符合这一假设吗？这正是 Odlyzko 登场的地方。由于 Montgomery - 对关联假设涉及的是对关联在 $T\to\infty$ 情形下的极限分布，因此要想对这一假设进行高精度的统计检验，最有效的办法是研究虚部很大的零点的分布，这也正是 Odlyzko 将零点计算推进到 10^{20} 及更高区域的原因。我们在上方的图中给出了蒙特哥麦利零点对关联函数（曲线）及由 Odlyzko 利用 10^{20} 附近七千万个零点对之进行统计检验的结果（数据点）。两者的吻合几乎达到了完美的境界。

1972 年春天，刚刚完成上述零点统计关联研究的蒙特哥麦利带着他的研究成果飞往美国圣路易斯　参加一个解析数论会议。在正式行程之外，他顺道在普林斯顿高等研究所做了短暂的停留。没想到这一停留却在数学与物理间造就了一次奇异的交汇，我们黎曼猜想之旅也因此多了一道神奇瑰丽的景致。

未完待续