部分编委 2010 夏北戴河合影

从左至右：庄歌，罗懋康，贾朝华，汤涛，项武义，刘建亚，邓明立，张英伯，付晓青

主　办　香港 Global Science Press
沙田新城市中央广场第一座 1521 室

主　编　刘建亚（山东大学）
汤　涛（香港浸会大学）

编　委　蔡天新（浙江大学）　张海潮（台湾大学）
邓明立（河北师范大学）　项武义（加州大学）
贾朝华（中国科学院）　罗懋康（四川大学）
张英伯（北京师范大学）　顾　沛（南开大学）
张智民（Wayne State 大学）　宗传明（北京大学）

美术编辑　庄　歌　董　昊

文字编辑　付晓青

特约撰稿人　丁　玖　李尚志　姚　楠　游志平
木　遥　于　品　蒋　迅　萨　苏　卢昌海

《数学文化》旨在发表高质量的传播数学文化的文章；主要面向广大的数学爱好者。

本期刊欢迎投稿，来稿请寄：
Math.Cult@gmail.com; 或mc@global-sci.org

本期刊欢迎教育界，出版界，科技界的广告
本期刊网站：http://www.global-sci.org/mc/
本期出版时间：2011年2月

本刊鸣谢国家自然科学基金数学天元基金和科学出版社的支持。

Contents | 目录

许宝騄先生家世及轶闻

陈大岳

编者注：去年是我国概率统计事业的奠基人许宝騄先生诞辰一百周年，北京大学举办了一系列活动，出版了纪念文集《道德文章垂范人间》一书。本文作者细读此书，搜集整理，从不同侧面勾勒出一代宗师鲜为人知的真实人生，可与陈家鼎教授和郑忠国教授合写的《许宝騄先生的生平和学术成就》一文对照阅读。

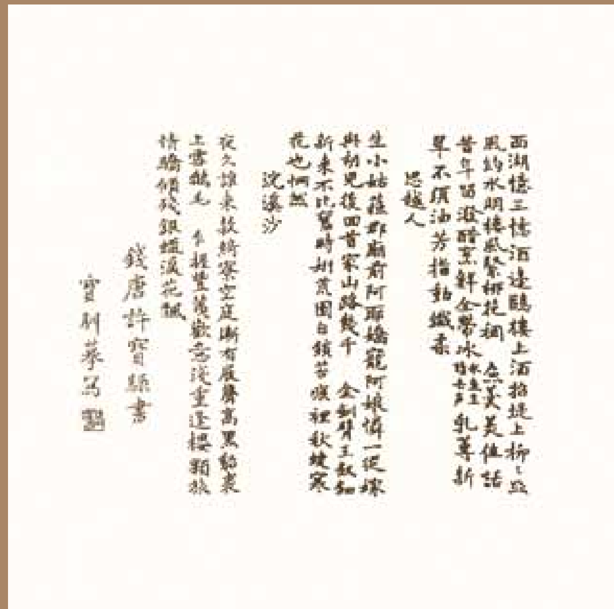
许宝騄先生（1910-1970）是我国概率统计事业的奠基人，与华罗庚、陈省身同龄，早期经历也很近似，1948年当选为中央研究院院士，解放后任北京大学一级教授、中国科学院学部委员。然而许先生体弱多病，英年早逝，除了四十余篇已发表的论文、三部专著和少量手稿，几乎没有留下其他遗物。去年北京大学概率统计系为给许先生塑像，所能收集到的照片，只有区区五六张。世人对其学术成就了解不多，对其个人情况所知更少。多数回忆文章只谈他聪明过人，学问精深，诲人不倦，其他方面就语焉不详了。“对于无缘亲聆他教诲的同学们，许先生基本上是一位传说中的英雄，多少有些神秘的”。[8] 然而细读他同龄人的叙述，我们还是能够感受到这位卓越的学术大师多姿多彩的鲜活形象。“他的生活环境、家庭背景，对于他的学术是有很大影响的。从他的生活经历可以看出，许先生的学术成就具有深厚的文化背景。”[6]

许先生祖籍浙江杭州。杭州许氏源出富阳沈氏，居杭始于明代，清代家族鼎盛。自第十世起以“学乃身之宝，儒以道得民”一联十字取名排辈。高祖许学范，乾隆三十七年（1772）进士，其子乃济、乃普、乃钊为进士，另四子为举人，故有“七子登科”之誉。乃普之子许彭寿（即许寿身）及其堂弟许庚身也是进士。许宝騄先生的曾祖许乃恩系“七子登科”中最小一位，道光癸卯举人，官至山东知县。祖父许祐身，同治十二年举人，历任工部右侍郎、屯田司主事、都水司员外郎、御史、山东道监察御史、江南道监察御史、京畿道监察御史、江苏扬州府知府等职；父许引之，字汲侯，自清末至民国北洋政府期间历任中级官员，官至两浙盐运使。

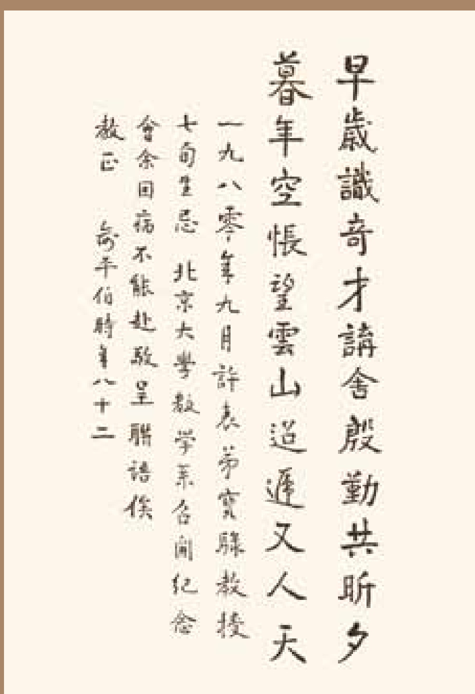
许宝騄先生排行第七，有两兄四姐。长兄许宝驹（1899-1960），字昂若，北京大学国文系毕业，中国国民党第一次全国代表大会代表。历任国民革命军第十八军党代表、国民党浙江省党部特派员、浙江省政府秘书长、中国国民党革命委员会中央执行委员会委员等职。1941年，与屈武、王昆仑等组建中国民主革命同盟，坚持抗战，反对分裂。1948年任中国国民党革命委员会中央执行委员。1949年出席中国人民政治协商会议第一届全体会议。解放后，任民革中央常委，浙江省人民政府委员，第一、二届全国人大代表[9]。次兄许宝騤（1909-2001），燕京大学哲学系毕业，在广州、北京多所大学任教，是中国民主革命同盟的发起人之一。1945年任《正报》主笔，参与“三民主义同志联合会”地下组织，并在争取北平和平解放的过程中开展了积极有效的工作；1951年任中国人民赴朝慰问团总团副秘书长。历任民革中央宣传部副部长、《团结报》总编辑、社长等职；是第二、五届全国政协委员，第六、七届全国政协常委，曾任全国政协文史资料委员会副主任。


閑若七弟早歲耽池於十三行頗有
會心曾為平伯寫此詞刊本流傳甚
稀時閱四十載家中僅存一紅印本
爰其遺失頃重摹之指點追思百端
交集憶昔居清華園南院時　弟方
英年我猶中歲　弟專攻數學課餘
喜作圖案畫每來我家燈下用儀器
畫成各種形式方圓尖角均有余為
填上彩色系以線穗可作書夾同并
評論其孰優孰劣頗以為樂今俱不
存矣當年朝夕相聚思之悵然欲淚
兒孫情事如塵[illegible]煙偶記憶瑣不盡
所懷也
歲在癸丑中秋節姊寶馴書於
京郊新居

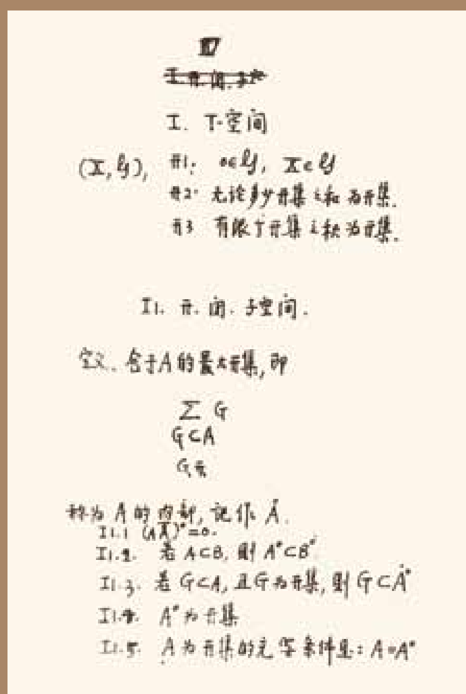
许宝騄先生的大姐许宝驯（俞平伯夫人，俞润民之母）于 1973 年所写的纪念文字。“闲若”指许先生。


浣溪沙
錢唐許寶騄書
寶馴摹寫

许宝騄先生年青时抄写著名学者俞平伯的著作《古槐书屋词》。许先生的大姐许宝驯于 1973 年按许宝騄的手迹摹写。


早歲識奇才講舍殷勤共昕夕
暮年空悵望雲山迢遞又人天
一九八零年九月許表弟寶騄教授
七旬生忌　北京大學數學系合開紀念
會余因病不能赴敬呈聯語俟
教正　俞平伯時年八十二

著名文学家俞平伯先生的纪念题字


17

I. T-空间

$(X,\mathcal{G})$，甲1：$\emptyset\in\mathcal{G}$，$X\in\mathcal{G}$

甲2：无论多少开集之和为开集.

甲3：有限个开集之积为开集.

I1. 开.闭.子空间.

定义. 含于A的最大开集，即

$$\sum_{\substack{G\subset A\\ G开}} G$$

称为A的内部，记作 A°.

I1.1 $(A\mathfrak{X})^\circ=0$.

I1.2 若 $A\subset B$，则 $A^\circ\subset B^\circ$

I1.3 若 $G\subset A$，且G为开集，则 $G\subset A^\circ$

I1.4 A°为开集

I1.5 A为开集的充要条件是：$A=A^\circ$

许宝騄先生于 1963 年向北京大学数学力学系概率统计教研室的青年教师系统讲授“点集拓扑”，这是当时手稿的首页，手稿现存北京大学档案馆。

许先生的亲属中，堂兄许宝蘅（1875-1961）系清光绪二十七年（1901）举人，晚辈中有台湾著名作家高阳（原名许儒鸿，1926-1992），其作品《胡雪岩》、《红顶商人》等在大陆风行一时。

“七子登科”的同时还有“五凤齐飞入翰林”。许祐身的姐姐嫁给了礼部尚书廖寿桓，妹妹许禧身则嫁给晚清末任直隶总督兼北洋大臣陈夔龙。通过联姻，许家亲戚中还有多位社会名流，其中就包括清朝大学者俞樾（1821-1907）。

许先生的祖母是俞樾的二女儿俞绣孙，其诗词遗稿《慧福楼幸草》因被俞樾编入《春在堂全书》而传世。许先生的姑姑许之雯，聪颖异常，“幼读蘅塘退士所选《唐诗三百首》，未半即会吟咏。所吟诗句，工整之中，有秀逸之气。”其诗集由俞樾选刊，名为《缃芸馆诗钞》。另一位姑姑许之仙则嫁到俞家，为俞樾的孙媳妇、著名红学家俞平伯的母亲。1917年许先生的大姐许宝驯嫁给俞平伯（1900-1990）。因此可以说杭州横河桥许家与浙江德清俞家世代通婚，是典型的江南士大夫家族之间的特殊关系。许先生年轻时多与俞平伯游，俞平伯先生的《略谈杭州北京的饮食》一文说到，“（平伯）于二十年代，有《古槐书屋词》，许宝騄写刻本。《望江南》三章，其第三记食品。今之影印本，乃其姊宝驯摹写，有一字之异，今录新本卷一之文。”

许先生喜爱昆曲，到了“逢会必唱”的地步，“年青时还粉墨登场过呢”。老舍先生在其《滇行短记》中写道：“宝騄先生是统计学家，年轻，瘦瘦的，聪明绝顶。我最不会算术，而他成天地画方程式。他在英国留学毕业后，即留校教书，我想，他的方程式必定画得不错！假若他除了统计学，别无所知，我只好闭口无言，全没办法。可是，他还会唱三百多出昆曲。在昆曲上，他是罗莘田先生与钱晋华女士的‘老师’。罗先生学昆曲，是要看看制曲与配乐的关系，属于那声的字容或有一定的谱法，虽腔调万变，而不难找出个作谱的原则。钱女士学昆曲，因为她是个音乐家。我本来学过几句昆曲，到这里也想再学一点。可是，不知怎的一天一天的度过去，天天说拍曲，天天一拍也未拍，只好与许先生约定：到抗战胜利后，一同回北平去学，不但学，而且要彩唱！”许先生的昆曲爱好应源于其深厚国学底蕴，就读清华大学期间，与其兄许宝驹、许宝骙、大姐许宝驯、四姐许宝騋都参加了其姐夫俞平伯组织的谷音社，“研习昆曲，同人会唱，宝騄与焉。

宝騄品娴音律，辨音极准，每听一曲，不数遍即能写出其工尺谱，试之不爽。能操二胡，时复一弄，用以自娱”，[1] 由此可以想象他是一位很有生活情趣的学者。他还擅长桥牌，这在当时是很时髦的。但“经常感到生活中的广泛爱好与献身科学之间的矛盾。”[4]

许先生幼时体质虚弱，对他后来事业生活都很有影响。在清华念书时体重不足 40 公斤，1933 年大学毕业，参加赴英庚款留学考试被录取，却因体重不足而落选。1948 年夏曾因胃溃疡和肺结核而住院治疗，其严重程度足以令他至少病休一年 [7]，但 1949 年初解放军进城时就已出院 [3]。1952 年再度住院；1955 年他讲“概率论”课，只讲了三次，身体就不行了，只得由赵仲哲代上。赵是许先生的第一个研究生，1951 年毕业于北京大学。从此以后，许先生未能到教室上课，改为在家里开设讨论班，“他大部份的时间是在床上过的，念书和写作时，面前放一硬纸板，背靠着软的靠垫，在床上工作；吃饭和参加讨论班时，下来坐在沙发上。”[5]1957 年因肺结核恶化，在离北京大学很近的黑山扈疗养院住了几个月。1963 年，X 光检查发现他肺上有空洞，并且他带的菌具有抗药性。上个世纪五十年代，学生的体育锻炼都应通过劳卫制才算达标，他曾自嘲说自己也通过了劳卫制，“因为我有痨病 (肺结核)、胃病和痔疮。”“许先生身高 1 米 76，但体重只有 70 斤”，[5] 腿很细，“最后两年，双腿肌肉萎缩，瘫卧在床，犹复孜孜不息。自言身虽残废，脑尚健好，生命力还很旺盛，尽能生活工作下去。”[1]

许宝騄先生和他指导的“排队论组”（北大数学力学系 1954 级）师生合影。前排是许宝騄（左）和胡迪鹤 (1959 年 7 月）。

许宝騄先生终生未婚。其中原委，已不可细考。据其兄许宝骙称，“宝騄幼年时，父亲曾为作主与南方老亲某氏女订有婚约。其后父亲去世，举家北迁，宝騄稍长，乃坚决要求退婚。母亲强之不听，无可奈何，只得勉为提出解决。”[1] 另据俞平伯之子俞润民先生回忆，润民先生有一姑父名叫郭则澐，是清朝翰林，曾在北洋政府徐世昌处任秘书长。郭有一女儿，与许先生年龄相仿。按中国旧的传统来说，许先生比这位郭女士长一辈。虽然辈份不合，但郭则澐与许先生父亲在北洋政府时期是同事，郭认为作为儿女之事也是合适的。据推算，1936 年许先生留英以前，两人已有往来，但相处的时间并不长。郭则澐去世后，其子反对这桩婚姻，旧社会由男的当家，长兄如父，这样许先生的婚事就告吹了 [6]。1947 年许先生从美国回来，曾经订婚。著名统计学家奈曼（Jerzy Neyman，1894-1981；美国科学院院士和英国皇家学会院士）在其回忆录里也说许宝騄回国与恋爱有关。“据润民先生回忆，许先生给俞平伯先生的信中提到他采取的策略是‘以退为进’，现在已搞不清楚以退为进的具体含义。但这四个字是很合乎许先生的性格和他的用语特征的。”[6]“讵料不久发现身染肺疾，乃复废约。此后终身未娶。”[1]

许先生 1945 年赴美访问之前，与长兄宝驹一夜倾谈之后，深受宝驹的影响，参加了共产党的外围组织中国民主革命同盟。宝騄的两位兄长宝驹、宝骙都是这个组织的发起人。许宝騄先生

许宝騄先生和他指导的"统计组"(北大数学力学系1954级)师生合影。前排是许宝騄(中),张尧庭(左二),卢崇飞(左四)。

在美国为该组织联系海外华裔进步学者而积极活动,曾介绍著名气象学家涂长望参加组织[1]。1947年许先生谢绝美国同事的挽留回到国内,"希望成为他祖国即将诞生的新社会的一个成员。"[4]"在1948年辽沈战役后,许先生已确信'国民党败局已定',并对当年北大、清华的学生爱国民主运动十分同情。"[2]1949年初,北平和平解放,许先生委托江泽培致电国外友人,称"解放以后感觉幸福"(Am happy after liberation)。[3]

在西南联合大学和访问美国期间,许先生以其高超的学术造诣深深影响了周围一批学生,包括钟开莱(Kai Lai Chung, 1917-2009)、王寿仁、徐利治,安德森(T.W. Anderson,斯坦福大学统计学教授,美国科学院院士)、莱曼(E. L. Lehmann, 1917-2009,加州大学教授,美国科学院院士)、奥肯(I. Okin)等。他们的学生更是遍及世界各地,影响广泛,他们后来都在不同场合撰文表达对许先生的感激之情,尤其是许先生与钟开莱的师生之谊,堪称典范。钟开莱于六十年代以后长期任斯坦福大学数学系教授,著有十余部专著,为二十世纪后半叶最有影响的概率学家之一。一些概率学家(如笔者的导师)虽不出其门下却深受其影响,尊他为"学术教父"。钟恃才自傲,入其法眼者,寥寥无几。他早年就读于清华大学(西南联大)物理系,后转学到了数学系。据徐利治先生讲,当年西南联大学生转系非常普遍而自由,学不下去的学生要转系,学的不过瘾的学生也要转系。在数学系,钟开莱师从华罗庚先生研究数论。钟与华都颇为自负,华罗庚出的论文题目钟觉得不满意,钟就自己找题做[2]。钟毕业之际得到许先生的赏识,留校成为北京大学的助教。当时西南联大合署办学,三校互通有无,亲密无间,但教员学生还都分属于各校的。许钟二人经常在一起切磋,"还讨论过Keynes著作的翻译问题。看来他俩对Keynes的概率论基本思想都是比较赞赏的。"[2] 1945年两人先后到了美国的不同地方,从此天各一方,大概没再见过面,但还通信讨论数学问题。也许因为两人都籍隶历史名城杭州,"都对中国古典文学有深深的爱好和素养","都能写出典雅的中文文章和英文文章","他俩之具有高水准的东西方复合型文化的教养与素质,都是事业成功的重要因素,也是两人间师生友谊经久不衰的原因之一"。[2] 钟开莱后来一直以许先生的学生自居,并尽其所能宣传许先生的成就。"许先生对相互独立随机变量早有深刻研究,在1947年独立于格涅坚科对于行内独立的随机变量阵列,在加项一致可忽略的条件下,给出了行和弱收敛于给定的无穷可分分布的充分必要条件,而且在方法上很有特色。"可能是因为晚于格涅坚科的缘故,许先生的结果未曾发表。1968年钟开莱翻译格涅坚科和柯尔莫哥洛夫合著的《独立随机变量和的极限分布》一书,将许先生的手稿作为英译本的附录公开发表。1979年钟开莱与两位美国统计学家在统计学的顶级杂志Annals of Statistics上发表纪念许先生的文章,并从多元统计、统计推断和概率论三个方面全面系统阐述许先生的成就。钟开莱还在统计

学家江泽培和郑清水的协助下，编辑英文版的《许宝騄选集》，把许先生在解放后所写的全部中文论文译成英文，由德国斯普林格出版社出版。

可能是因为单身的缘故，许先生一日三餐多采取包伙的方式。西南联大期间，“与罗常培、郑天挺、袁家骅诸先生游，合伙包饭，仅餍粗粝。偶思‘打牙祭’，欲烹调而苦无锅釜，乃以洗面盆盛鸡豚煮食之，谓之‘吃脸盆’。”“其时宝騄生活艰苦，营养不足，体力日渐削弱”，[1]“1943 年 -1944 年许先生给老师奈曼（Neyman）的信中曾提到过挨饿之事”。[4] 据说他每次唱完昆曲，便去小饭馆用膳。在解放前后他包伙的小饭馆名叫“菜根香”。后来身体每况愈下，“每天主食只吃 2 两或 3 两，靠一磅半牛奶维持所需的营养”。[5]

许先生平时穿什么衣服？这是我们塑造铜像时遇到的一个问题，最后决定让铜像配上中式对襟衫。“从风度和气质来看，他是一个典型的中国传统知识分子。”[4] 但他又是同时代人中间较早较多接触西方文化的，“非常喜欢与不同文化背景的人们在一起交流”。[4] 他 11 岁开始学英文，高中时学过法语，大学毕业后曾担任来北京大学访问的哈佛教授 Osgood 的助教。留英四年使“他习惯在下午一点喝一点牛奶红茶”。[3] 从照片上我们看到许先生穿西服、穿衬衫，“在昆明时期，他喜欢穿一件风雨衣出外散步。”[2] 1948 年 8 月他在给美国同事 Herbert Robbins 的信中曾写道：“请把您读过而又不准备收藏的任何杂志（如《生活》），还有纽约时报的某些合订本，用最便宜的方式邮寄给我。”[7] 这从一个方面反映出他对西方文化也同样很有兴趣。

1970 年 12 月 18 日许先生孤独地病逝于北京大学佟府他的住所，“一只断去‘Parker’牌号的旧金笔弃置在床头小几，数页写著未竟的残稿散落在地”。[1] 其时正值“文革”中间，他的同事们大多被下放到江西一个叫鲤鱼洲的地方从事农业劳动，无人认真料理后事。有人提出许先生是全国政协委员，于是在八宝山举行了简朴的悼念仪式，华罗庚赶来送老友最后一程。俞平伯先生曾撰联纪念：早岁识奇才，讲舍殷勤共昕夕；暮年空怅望，云山迢递又人天 [10]。

参考文献

1. 许宝骙，“许宝騄事略”，《道德文章垂范人间》第 312-315 页，北京大学出版社，2010。
2. 徐利治，“回忆西南联合大学时代的许宝騄先生”，《道德文章垂范人间》第 325-332 页。
3. 江泽培，“深切怀念许宝騄老师”，《道德文章垂范人间》第 333-335 页。
4. Anderson, Chung & Lehmann, “许宝騄 1910-1970”，《道德文章垂范人间》第 34 页。
5. 张尧庭，“深深的怀念——我所知道的许宝騄先生”，《道德文章垂范人间》第 344-356 页。
6. 郑忠国，杨瑛，“许宝騄先生的青少年时代——俞润民先生访问记”，《道德文章垂范人间》第 318-320 页。
7. 许宝騄，“给 Herbert Robbins 的信”，《道德文章垂范人间》彩页第 7-8 页。
8. 姜伯驹，“前言”，《道德文章垂范人间》第 1-2 页。
9. 杨路，“许宝驹”，www.minge.gov.cn/txt/2008-09/27/content_2496648. htm ，民革中央网页。
10. 俞平伯，纪念题字，《道德文章垂范人间》彩页第 12 页。

作者介绍：

陈大岳，复旦大学数学系毕业，加州大学洛杉矶分校博士，现为北京大学数学学院教授。

LINK 相关链接

许宝騄 1910-1970

许宝騄1909年生于北京（译者按：应为1910年9月1日出生），1933年获清华大学学士学位。1936-1940年就学于伦敦大学的大学学院（University College），在那里于1938年获博士学位（Ph.D），1940年获科学博士学位（DSc）。他从伦敦返回中国后，任教于北京大学数学系。

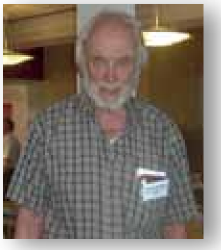
战争年代生活是十分困难的（1943年-1944年许先生给奈曼(Neymann)教授的信中曾提到过挨饿之事），但许先生仍然坚持研究。1945年他到达美国时，刚好赶上参加第一届加州伯克莱大学(Berkeley)概率统计会议。在那里教了一学期的书后，接着又到哥伦比亚大学教了一学期的书。刚好这一年Hotelling教授由哥伦比亚转到北卡罗莱纳大学（North Carolina at Chapel Hill）筹建统计系，Hotelling就把许先生带到北卡，许先生在那里拿到一个副教授的职位。之后，尽管众多的统计学家鼓动他留在美国，最后他还是回到了北京大学任教。

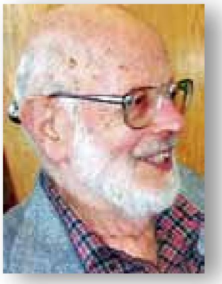
北京大学的段学复教授通知我们，许宝騄先生于1970年12月18日于北大的家中去世。他死于肺结核。学校为他开了追悼会。

许宝騄出身于杭州的官宦之家，并在北京长大。由于他的出身背景，他讲的是一口具有幽默感的官方普通话。从风度和气质来看，他是一个典型的中国传统知识分子。他所受的英国教育，使他偏爱上数学。他在数学研究中的风格是倾向于困难但具体的研究，而不是一般而抽象的研究。他学术上严于律己，宽以待人，但是作研究工作可以着魔。他经常感到生活中的广泛爱好与献身科学之间的矛盾。他非常喜欢与不同文化背景的人们在一起交流，同时也十分爱好传统的中国文学。他的一个特别爱好是与一部分昆曲爱好者一起欣赏古典昆曲的美好旋律。可能是由于健康的原因，他终身未婚。他于1947年夏回到中国，希望成为即将成立的新社会的一个成员。

在他生命的最后几年里，他的身体已经很虚弱，但他仍然坚持在他的房间内进行教学。他的中国同事们在他最后告别仪式上，对他表示最深切的敬意。除了他的著作和少数几个朋友提供的一点消息外，关于许先生在解放后20多年的生活和工作，我们可以说是一无所知。许先生的学生回忆起他来，都认为他是一个对人忠诚、温和又含蓄的人。他的个人生活很严谨，但作为一个教师和科学家，对人具有很强的吸引力。他在北卡罗莱纳大学的学生Isadore Blumen写道：“许先生坚持简洁，对事物深刻的了解，不畏避困难，凡事追求高标准，这些优秀品质深深地吸引着我们，而成为他的学生。”Ralph Bradley回忆起许先生的讲课，认为他的讲课是将来的典范。Herbert Robbins评价许先生时说“他是不可被忘记的，同时又是无人能替代的”。对于他的一些学生来说，尽管许先生不是他们正式的博士导师，但许先生对他们的影响是不可磨灭的。在许先生来美国之前的钟开莱、冷生明、王寿仁等人，来到美国之后的Isadore Blumen、Albert Bowker、Erich Lehmann 和 Ingram Olkin等人，都得益于许先生的指导。

许先生的统计工作主要集中于单变量和多变量线性模型的统计推断以及相关联的分布理论。既有小样本的，也有渐近理论。关于他的统计和概率方面的工作，另有专题作详细介绍。





编者按：这是T. W. Anderson(上图：美国科学院院士)，钟开莱(中图：著名概率论学者)和E. L. Lehmann(下图：美国科学院院士)文章的译文（郑忠国译）。原文“PAO-LU HSU 1909-1970”载于顶级统计学期刊The Annals of Statistics, 1979年第7卷第3期第467页至470页。

LINK 相关链接

深深的怀念——我所知道的许宝騄先生（节选）

张尧庭

他对科研工作的评价有他自己的标准，给我印象最深的是下面两段话："一篇文章的价值不是在它发表的时候得到了承认，而是在后来不断被人引用的时候才得到证实。""我不希望自己的文章登在有名的杂志上因而出了名；我希望一本杂志因为刊登了我的文章而出名。"

斯坦福大学的统计系走廊中，悬挂着许的画像。

许宝騄先生把数学家分成三流："第一流的数学家，是有天才的，他们能开创新的领域，这些人是可望而不可及的。第二流数学家是靠刻苦学习而成的，认真消化整理前人的东西，在这个基础上有所创造发现，这种工作对后人影响较大，中国缺少一批做这一类工作的人。第三流的数学家只在某一、二个问题上有一点贡献，不能象第二流的那样有系统的工作。剩下的就是不入流的数学家了。"

我是 1955 年认识许先生的，第一次见到他是他来给我们班上"概率论"的课。记得第一堂课还没开始，教室里坐满了人，其中相当一部份还是从外校赶来的，有的年龄也不小了，只听说许先生课讲得非常好，概率论的课还是第一次开，所以听众很多。上课铃响后，许先生进来了，手里提一个小的草包，里面放着自备的黑板擦、一个小暖瓶和一只杯子。我心想，大教授上课还带自己的黑板擦，和别的教师就是不一样。讲课开始了，声音不大，但很清楚，一堂课下来，说真的，当时并没有感到他讲课的特别之处。每次擦黑板时，看他额上沁出颗颗汗珠，这时才体会到他的身体的差，为什么他要自己带特制的轻巧的黑板擦。讲了三次课后，他因身体不行，就不再上了，这样课由赵仲哲先生一直讲到完。自那以后，许先生再也没有在教室中上过课，我们这一班同学是听他在教室中上课的最后一班学生。

1960 年代初，他对我谈起他自己的希望，他说："30 年代末期，我在英国留学，当时有三个中国人在那里学统计，日本也有三个人在那里学，可是我们三个中国人（许、唐培经、徐钟济）比日本人强多了。那时日本已侵略中国，我们想，在统计、概率方面，我们将来回国之后一定把它搞好，超过日本人，当时很有信心。"我感到他的这个想法一直是指导他的行动的准则。快解放时，他急于回国，其中就有想回来后好好干一番科学事业的愿望。即使到了文革时期，他已病在床上，还对探望他的亲友说："我身体不行了，不能动了，但我的头脑还是很清楚的，我还可以用脑子为祖国服务。"可见他念念不忘的还是想尽自己的力量，振兴国家的科学事业。

他自己一生发表的论文，篇数并不算多，总数不超过 40。他对自己的工作要求很严，一个问题在他的手中没有彻底解决好，他往往不肯放手。他对科研工作的评价有他自己的标准，给我印象最深的是下面两段话："一篇文章的价值不是在它发表的时候得到了承认，而是在后来不断被人引用的时候才得到证实。""我不希望自己的文章登在有名的杂志上因而出了名；我希望一本杂志因为刊登了我的文章而出名。"

他很想办一个概率统计的杂志，目的是可以让一大批年青的人有发表作品的地方，让世界上其他国家的同行了解到我们中国的工作。他愿意拿出他的积蓄来创办一个杂志。后来由于文化大革命，这事也就成了泡影。

1983 年冬天，我访问威斯康星大学统计系时，系里年龄最大的教授盖兰，他要求系主任一定安排出一段时间让我能与他个别谈谈。他告诉我他是 P.L. 许的学生，那时许在伯克莱大学执教，许很高兴留他作为助教，他对许的帮助和信任终身难忘。许宝騄先生在美国的几所有名的大学，都教过一些学生，伯克莱、哥伦比亚和北卡罗莱纳等大学都有他的影响。斯坦福大学的统计系走廊中，悬挂着许的画像。

他对于发表文章要求是严的，他自己为我们树立了一个榜样。他认为一篇文章不在于它的长短（顺便说一句，他的论文最长的有五十页，最短的只有一页多一点，内容是举一个反例），而在于它是否真正有内容。他不希望我们稍有一些结果就满足于此，而急于发表，应力求把问题做到底，敢于去碰难处，要知难而进。对写文章的要求是不要罗嗦，而要把关键之处交待得

LINK 相关链接

明明白白，他很不欣赏那种在关键之处一带而过，写“显然”两字的那种文风。他告诉我们：“良工示人以朴。”要把自己的想法、技巧都告诉别人，以便交流。

许宝騄先生把数学家分成三流：“第一流的数学家，是有天才的，他们能开创新的领域，如柯尔莫哥洛夫，冯•诺依曼，维纳这一类人，这些人是可望而不可及的。第二流数学家是靠刻苦学习而成的，认真消化整理前人的东西，在这个基础上有所创造发现，象辛钦这样的数学家就是这一类的，他写的《公用事业理论的数学方法》、《信息论基础》等就是消化整理的结果。这种工作对后人影响较大，年青人可以在这个基础上较快地进入科学的前沿，中国缺少一批做这一类工作的人。第三流的数学家只在某一、二个问题上有一点贡献，不能象第二流的那样有系统的工作。剩下的就是不入流的数学家了。”他认为自己没有才能，是刻苦学习得到的，他也没有经验去培养有天才的人，他只能传授如何认真学习，努力钻研，埋头苦干的经验。他衷心希望他的学生超过他，一次他在讨论班上说：“自古以来，只有做状元的老师是光荣的，做状元的学生是没有什么的。”

他衷心希望他的学生超过他，一次他在讨论班上说：“自古以来，只有做状元的老师是光荣的，做状元的学生是没有什么的。”

作者介绍：

张尧庭（1933-2007），我国著名统计学家和统计学教育家，1956年毕业于北京大学并留校任教，1976年调离，曾任武汉大学管理学院院长、武汉市科协副主席，中国统计学会理事，上海财经大学资深教授。

纪念先师许宝騄诞辰一百周年（节选）

胡迪鹤

佟府丙八号

一进北京大学的西校门，走过两颗银印似的方水池中间的石拱桥，举目望去，是一对庄严肃穆的华表屹立在一片碧草如茵的广场中，一座雕梁画栋的宫殿式建筑坐落在广场正东方，那就是北京大学标志性建筑，办公大楼了。从北京大学办公楼往东南行约五六百米，但见柳林深处，点缀着几棵丁香和翠竹，其中坐落着几栋小平房，有的形似老北京的四合院，有的由门字形的三排平房组成，这就是鲜为人知的佟府。

不少人知道北京大学一批著名学者的寓所的园区，如燕南园、燕东园、镜春园、朗润园、蔚秀园等等，但很少人知道，还

没有多少人知道，住在这样简朴的居室，过着如此清贫的生活，忍受着如此的孤寂，竟然是为我国科学事业辛勤耕耘一生的一代学术宗师许宝騄先生。

LINK 相关链接

许先生在统计推断和多元分析等方面做了一系列理论性开创性工作，把许多数学中的分支，如矩阵论、函数论、测度论等引进统计学，使统计学中的许多问题的理论基础更加深厚，逐渐形成了统计学中的一个主流方向——数理统计。

有个佟府，就是北京大学的师生员工，知道的也不多。

许宝騄先生从上世纪五十年代初到1970年他去世，就一直住在佟府丙八号。这是一所两廊四间的小平房。一进门是一个临时封闭起来的托檐，不到四平方米，用作厨房。由此前进，是一条由北向南的走廊，尽头是一间贮藏室，东西两侧各有两居室。西侧较大，住着张景昭老师一家，东侧两间较小，进门一间大的，也只有十三四平方米，算作是许先生的客厅，里面的套间就是卧室和卫生间了。先生的客厅，其实是一个多功能厅。厅内东面墙上，挂着一块黑板，北面放着两个齐屋顶高的书架和一把双人沙发，西南各放置一把单人沙发，中间是一张一米见方的矮桌，厅内还放着几张小凳和 几个竹壳热水瓶。先生主持教研室的讨论班时，这个客厅就是教室；教研室要政治学习或讨论问题时，它变成了小会议室；查阅资料时，它变成了图书馆；先生用餐时，它又变成了餐厅；只有外客来访或学生向先生问问题，这间小屋才恢复原来的角色——客厅。

先生很少在客厅工作，绝大部分时间在卧室工作。靠坐在床上，在一块一尺见方的薄板上把稿纸展开，撰写论文和讲稿。由于睡眠情况不好，黎明前就开始工作，晚上无人照顾，饿了就用一块巧克力和一杯热开水充饥，“三年困难期间”，巧克力也随之困难掉了。累了就听听收音机，然后再睡一会。卧室中总是放着一台“熊猫牌”收音机，这是先生了解时事和休闲的主要工具。对京昆艺术这类国粹，先生非常喜爱，有深入的了解和典雅的鉴赏力，据说青年时代还曾粉墨登场。

先生上世纪五十年代，寒暑假还到北京城内的宾馆疗养一两个星期，六十年代以后，几乎是足不出户。先生自患肺病后，身体一直瘦弱，无论春、秋、冬，在室内总是穿着长衫和毛裤，只有外客来访，才着正装。

没有多少人知道，住在这样简朴的居室，过着如此清贫的生活，忍受着如此的孤寂，竟然是为我国科学事业辛勤耕耘一生的一代学术宗师许宝騄先生。

如今的佟府丙八号，早已是人去房毁，若仅是人去房空，还可以去那里凭吊先生，现在，只能把崇敬和谢恩之情永铭心间。

LINK 相关链接

许宝騄（右）与著名数学家H. Cramér（中）、著名统计学家M.S. Bartlett（左）在美国的Chapel Hill（1946年）。

望尽天涯路

“昨夜西风凋碧树，独上高楼，望尽天涯路。”这是晏殊在他的蝶恋花一词中唱出的佳句。国学大师王国维先生认为做学问，首先要有这种远大的目光，崇高的境界。

上世纪三十年代末期，苏联数学家柯尔莫哥诺夫(Kolmogorov)奠定了概率论的公理化系统的基础，这为许多数学工具引入概率论开辟了道路，从而使近代概率论以崭新的面貌得到了长足的发展。也就是在上世纪三十年代，统计学，特别是各种专业统计，例如生物统计、医药统计、农业统计、工业统计首先在英国迅速发展，得到广泛的应用。当然，在统计学中，统计思想，例如选定统计模型、设计统计推断方案等等非常重要，但统计量的选取及其分布的计算，统计误差分析等理论问题也是很重要的。当时许先生正在英国伦敦大学学院攻读博士学位，师从著名统计学家奈曼（Neyman）。此后的几年间，许先生在统计推断和多元分析等方面做了一系列理论性开创性工作，把许多数学中的分支，如矩阵论、函数论、测度论等引进统计学，使统计学中的许多问题的理论基础更加深厚，逐渐形成了统计学中的一个主流方向——数理统计。在新中国成立后的相当长的一段时间里，在研究机构和一些大学里，统计学往往被称之为数理统计。其实把数理统计视为统计学的一个主要分支似乎更妥当些，可以说，许先生是数理统计这一方向的奠基人之一。

回国以后，虽然学术环境不如国外优越，资讯迟缓，学术交流稀少，学术梯队不健全，但许先生仍竭力站在学术前沿来从事研究和培养人才。上世纪四、五十年代，经典概率极限理论与随机过程论，正处在一个蓬勃发展时期，先生在继续数理统计的前沿研究的同时，积极组织队伍对概率论的两个前沿领域：独立随机变量族的极限理论和马尔可夫过程论进行研究。一般人认为Gnedenko和柯尔莫哥诺夫所著的“相互独立随机变量之和的极限分布”（原版为俄文著作，英译本为钟开莱译，中译本为王寿仁译）是经典概率极限理论的一个总结，其实许先生获得过有关此方面的许多

就是在这种艰难的环境下，在1941年到1945年抗日战争胜利，许先生在顶级统计学期刊Biometrika、伦敦数学期刊（J. London Math.）、数理统计年鉴（Ann. Math. Stat.）等许多国际权威性刊物上发表了十多篇有关数理统计等方面的开创性文章，成为国际上数理统计这一方向的奠基人之一。

LINK 相关链接

重要结果，有的正式发表出来了，有的由于当时国内资讯迟缓，外国人抢先发表了。

拳拳赤子心

1940 年，抗日烽火正在祖国大江南北熊熊燃烧，抗日战争处于最艰难的时候，许先生在英国伦敦大学学院获得双博士学位后，放弃优越的学术环境和生活条件，毅然返回祖国，受聘为北京大学教授，在昆明西南联大任教。当时昆明的工作条件和生活待遇极端艰苦。图书资讯极端贫乏，连教材都少有，学生听课主要靠记笔记，相当一部分教师和学生租住在农家茅篱竹舍。就是在这种艰难的环境下，从 1941 年到 1945 年抗日战争胜利，许先生在顶级统计学期刊 Biometrika、伦敦数学期刊 (J. London Math.)、数理统计年鉴 (Ann. Math. Stat.) 等许多国际权威性刊物上发表了十多篇有关数理统计等方面的开创性文章，成为国际上数理统计这一方向的奠基人之一。他曾经说过，我们在某杂志上发文章，不是借该杂志来标榜我们的学术水平，应该让我们在该杂志发表了文章来抬升此杂志的地位。先生这样说了，也确实这样做了。

为了迅速发展我国概率论与数理统计学科，北京大学一枝独秀是不成的，必须在全国主要地区都有一支强大的概率统计的教学和科研队伍。当时全国在概率统计的人才分布和研究水准很不平衡，而且总体水准也不高。在这种背景下，只有集中优势，全国协调，才能尽快缩少与国际水平的差距。为此，1956 年秋，把中科院数学研究所的王寿仁和张里千，中山大学的郑曾同和梁之舜借调到北京大学任教（当时江泽培、胡国定、王梓坤诸先生正在苏联留学）。与此同时，从北京大学数学力学系抽出 34 名四年级学生，从中山大学和南开大学各抽调 10 名 四年级学生来北京大学培养，此外北京大学还接收全国各主要综合大学的概率统计方面的教师来进修。这样一支具有七八十人，老中青齐全的学术梯队就组建成功了。不能不说，这样的大手笔，非许先生难以举此帅旗。许先生亲自主持“独立随机变量族的极限理论”的讨论班。此讨论班的相当一部分内容，后来都成为培养概率论专门化学生（相当于现在的硕士生）的教学内容。在这个由北大、中山、南开三所大学的 54 名学生，以及部分综合大学进修教师组成的培训班，系统地学习了“测度论”、“概率极限理论”、“马尔可夫链”、“数理统计”等课程。这是我国第一批培养的数量可观的概率论与数理统计人才。本文作者也是这批培养的学生之一。自此以后，全国各综合性大学绝大多数都设有概率论与数理统计教研室。

讨论班，这是交流学术信息，产生创作灵感，介绍前沿研究成果的平台。许先生在这个平台上，不仅发挥了上述种种功能，而且还把它变成了系统讲授一个研究分支的课堂。先生在 1956 年和 1957 年，主持“独立随机变量族的极限理论”讨论班，不仅使我们对经典概率极限理论有了一个整体性的了解，而且也为教学工作积累了一份很有参考价值的素材。1958 年以后，先生主持着三个讨论班：数理统计、马尔可夫过程、平稳过程。参加讨论班的人员，不仅有北京大学概率论与数理统计教研室的师生，还有校外的一些人士。不是先生这样的学术泰斗，焉有如此魄力与才气。1963 年，许先生在讨论班上给我们系统讲述的“点集拓扑”，无论从教学技巧、形式逻辑的应用、教材内容的精选，都使我们受益匪浅。

作者介绍：

胡迪鹤，1957 年毕业于北京大学数学力学系并留校任教。1972 年调至武汉大学，历任讲师、教授、数学系主任、数学研究所副所长，中国概率论与数理统计学会第一届常务理事。著有《分析概率论》、《可数状态的马尔可夫过程论》、《随机过程概论》、《一般状态马氏过程分析理论》。

冯康——一位杰出数学家的故事（连载四）

汤涛 姚楠

改革开放的春雷过后，
商品经济的大潮滚滚袭来。
当科研遇上了商品经济的波涛，
有人“跳海”成就了神话，
有人“失足”湮没于传奇，
他——作为一个另类的“弄潮儿”，
筹划为中国计算数学的发展推波助澜，
一次与总理的世纪约见，
为中国计算数学的发展写下了巅峰的符号，
影响持续了二十余年……

第七章　潮起潮落

1984 年，改革开放的大潮在神州大地上续写着波涛汹涌与波澜壮阔。国门打开，商品经济的风迎面吹来。

1984 年 10 月 20 日，中国共产党十二届三中全会在北京召开。会议通过了《中共中央关于经济体制改革的决定》，明确提出改革的基本任务是建立起具有中国特色的、充满生机和活力的社会主义经济体制；改革计划体制要突破把计划经济同商品经济对立起来的传统观念，商品经济的充分发展，是社会经济发展不可逾越的阶段，是实现我国经济现代化的必要条件。

大力发展商品经济的国策出台之后，全国各地纷纷涌起了“经商热”、“下海潮”。一时间，新生事物层出不穷，新旧思维火花频现。各种新的价值观念、新的道德评判再次洗涤了中国人

石钟慈院士接受作者采访

的心灵，中国社会进入了一个痛并快乐着的转型期。

在此之前，中国有一批“不安分”的知识分子已经开始跃跃欲试，敲开了中国商品经济的大门。他们宁愿抛弃“铁饭碗”，端起“泥饭碗”，奋不顾身地投身于社会主义商品经济的大潮。他们成为了中国科技人员“下海”潮中的第一批“弄潮儿”，他们也缔造了中国高科技产业“圣地”——中关村。

中关村“神话”

1983 年 5 月，中科院物理所的科技人员陈庆振“下海”创办了中科院在中关村的首家公司——科海公司。

五个月后，中科院计算机研究所的工程师王洪德留下了慷慨激昂的“四走报告”，创办了京海公司。他在报告中写道：“调走不行就借走，借走不行停薪留职走，辞职也要走，最后开除我也走”，表达了投身商海的坚定决心。

1984 年 5 月，在美国留学的中科院计算中心工程师万润南带着他“打造中国 IBM”的理想与信心回来了，创办了一度引领了中国“打字机革命”的四通公司。在接下来的近十年中，四通公司红极一时，成为中关村的标志旗帜，也成为中国民营科技企业的标志旗帜。

1984 年 11 月，中科院计算所一位名不见经传的工程师柳传志创办了“中国科学院计算所公司”，这就是后来赫赫有名的联想公司。同月，中科院计算所与中科院仪器厂、海淀区新型产业开发总公司以内部股份合作的方式成立了信通计算机公司，董事长曾茂朝，总经理金燕静。

同样是 11 月，国务院还批转电子振兴领导小组《关于我国电子和信息产业发展战略的报告》，指出电子和信息产业要实现两个转移：一是把电子和信息产业的服务重点转移到为发展国民经济、为四化建设、为整个社会生活服务的轨道上来；二是电子工业的发展要转移到以微电子技术为基础，以计算机和通信装备为主体的轨道上来；电子和信息技术在社会各个领域中的应用要放在首位。

此后，中关村大大小小的高科技企业公司更如雨后春笋、遍地开花。据资料统计，仅两、三年间，北京的科技民营企业就多达 700 多家。

风起云涌的“下海潮”、“公司热”使得冯康领导的中科院计算中心也倍受冲击。冯康对此相当反感，也极力反对。相反的是，计算中心党委对此却旗帜鲜明地大力支持。为此，冯康与当时担任党委书记的刘廉儒还产生了很大的分歧。在党委的支持与倡导下，1984 年 9 月，中科院计算中心创办了鹭岛公司，注册资金 324.6 万元，以计算机开发应用为主要业务，法人代表许昌平。此后，计算中心还相继成立了十多个小公司。

风起云涌的“下海潮”、“公司热”使得冯康领导的中科院计算中心也倍受冲击。冯康对此相当反感，也极力反对。

正如冯康所料，不是所有的人都擅长“游水”，也不是所有的人都“水性良好”。没过多久，计算中心创办的一些公司由于经营不善，相继亏损，纷纷面临倒闭的困境，而计算中心自身也为此背上沉重的债务包袱。

眼见亲手创建的计算中心被商品经济的洪流冲击得七零八落，岌岌可危，年过花甲的冯康似乎也觉得心有余而力不足，于是他开始寻找“接班人”。他的目标人选锁定在六十年代被他派到科大、后接替他任中国科技大学数学系主任的石钟慈。

拉克斯院士（右）的 Lax 报告得到了美国总统的采纳

最后，他开始与科大的校长管惟炎接触，商讨调石钟慈回计算中心的事情。经过多次协商，1986 年 10 月，石钟慈正式调回中科院计算中心。

石钟慈回到计算中心时也是面临着计算中心被公司债务拖累的“残局”，后来他甚至作为法人代表被告上过法庭。

1986 年底，计算中心创办的最大、也是最有名气的鹭岛公司被四通集团兼并承包，至此计算中心总算摆脱了“一劫”。后来经过清理整顿、关停并转，计算中心逐步甩掉了一些公司的债务包袱，恢复到正轨。

二十多年后的今天，当我们回望当初那些创造中关村神话的弄潮者，我们发现：由于各种各样原因，那些昔日曾经在中关村叱诧风云的公司已经风光不再，那些在中国的民营企业界挥斥方遒的 IT “枭雄” 也是各奔西东。只有联想扛起振兴民族计算机工业的旗帜、屹立不倒，成为中关村的标杆和中国高科技产业的象征。

而昔日的柳传志也蜕变成为中国的 IT “教父”。

与总理相约

冯康之所以被人们当之无愧地称为中国计算数学的开拓者、奠基人，是因为他的确拥有过人的科学视野与战略眼光。正是这种战略眼光决定了他的思考高度，也注定成就了他的卓越、非凡。

八十年代中期，对于冯康来说，事业的发展并不算顺风顺水。在他看来，甚至还有些“内忧外患”。外部大的社会环境中有商品经济大潮的风吹浪打，内部改制后的组织架构下也时有传出不和谐之音。作为计算中心的掌舵人，他将会带领中国计算数学的这艘旗舰航船驶向何方？

此时的冯康并没有被暂时的困难与“内忧外患”所羁绊，相反，他却站在一个更高的境界上，为整个中国计算数学的发展布局谋篇。

冯康深刻地了解科学和工程计算的水平是一个国家综合国力的重要标志，而发达国家对这一领域的研究工作也都相当重视。特别是美国的科学和工程计算一直走在世界前列。早在 1983

周毓麟院士在自己的书房里

年，他的好朋友，美国著名数学家彼得•拉克斯（Peter Lax）组织国防部、能源部、国家科学基金会（NSF）及美国宇航局（NASA）联合组成专门委员会向美国总统提出了著名的 Lax 报告，强调科学计算在国家安全、科技进步及经济发展方面具有特殊的重要性，并指出科学计算是现代科学技术提升的关键。

美国总统采纳了拉克斯的建议，并从 1985 年起，政府连续五年，每年投入五千万美元，建立起五个科学计算的研究中心，配备超级电脑及设立全国性网络，以协助大学及研究机构计算方面的研究。1987 年，美国国家科学基金会的财政预算中，又把科学计算作为特殊扶持的三个重点领域之一，用来支持科学计算研究中心的建立及加强各学科中科学计算的力量。

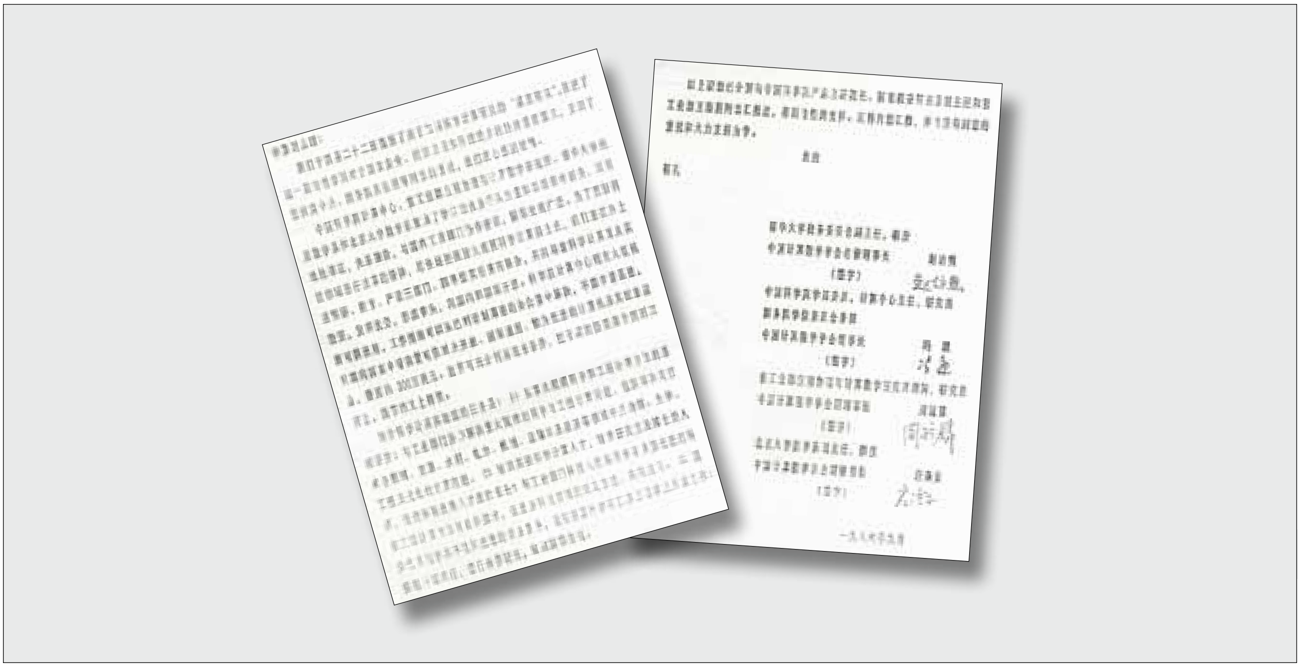
中国虽然早在 1956 年的科学规划中已经将计算数学列为重点，但始终都不及美国等发达国家那样重视。1986 年，中国在制定“七五”高科技发展规划时，初稿中也没有列入发展科学计算的相关内容。

冯康获悉此事之后，立即联合周毓麟等其他老一辈科学计算专家，于 1986 年 4 月 22 日写了一份“紧急建议”，递交给国务院有关领导。其中，他将拉克斯等写给美国总统的报告中重要内容翻译成中文，作为建议书的附件也交给国务院领导。

周毓麟，1945 年于上海大同大学数学系毕业，1946 年开始在中央研究院数学研究所旁听陈省身教授讲课。周毓麟每次听课都全神贯注，终于引起了陈省身的注意。一次，陈省身与周毓麟在楼道上相遇，他关心地问周毓麟：“我讲课你能听懂吗？”周毓麟回答听得懂。陈省身又仔细询问了他在大学的学习情况。后来，陈省身竟然破格让这位旁听生留在数学所工作，在他的指导下从事拓扑学研究。1949 年后，周毓麟先后在清华大学数学系和北京大学数学力学系任教。1954 年秋，周毓麟和北京大学同事张芷芬等一起被选派到莫斯科大学数学力学系读研究生。负责接待的是 1950 年就到苏联留学的黄敦。他看到周毓麟和张芷芬填报的志愿都是微分方程，于是就拿起了主意，说：“周的数学基础好，就学偏微分方程，张就学常微分方程。”就这样，黄敦的一句话决定了两个人的终身职业。周毓麟的导师是国际著名女数学家 O.A. 奥列尼克，据说当时她比周还小一岁，所以开始不太愿意收这个徒弟。周 1957 年获物理数学科学副博士学位，他的学位论文也被评为优秀学位论文。他和导师奥列尼克合作发表的关于渗流方程的论文，被公认为是具有开创性的经典型工作，在五十多年后的今天仍被数学家们不断引用。回到北京大学任教后不久，周毓麟 1960 年奉调参加核武器研制。为了国家的需要，在一个崭新的领域开始了新的征程。由于保密的原因，周毓麟的名字从那时起突然在数学界消失了很长一段时间。由于在主持核武器数值模拟和组建计算科学队伍等方面贡献突出，以及他在非线性偏微分方程和离散泛函分析领域作出了多方面开创性工作，他于 1991 年当选为中国科学院院士，并于 1997 年获得华罗庚数学奖。

这份“紧急建议”的报告引起国务院领导的强烈关注。当时担任国务院副总理的李鹏约见了冯康和周毓麟两位数学家。

这份“紧急建议”的报告引起国务院领导的强烈关注。当时担任国务院副总理的李鹏约见了冯康和周毓麟两位数学家。于是，冯康和周毓麟得以在中南海向李鹏当面陈述中国发展计算数学的重要意义。后来，国家采纳了冯康等人报告中的建议，并在国家“七五”



赵访熊、冯康、周毓麟、应隆安给李鹏总理的建议书。

高科技发展规划中加入了发展科学计算的内容。从此，科学计算终于在国家科学发展规划中获得了应有的重要地位。

得到了国家领导人的认可，冯康感觉如沐春风，更获得了一种勇往直前、再接再厉的信心和勇气。

1986 年 9 月，冯康一鼓作气，再次联合清华大学的赵访熊、核工业部应用物理和计算数学研究所的周毓麟、北京大学的应隆安致信李鹏副总理，提出了成立国家科学计算重点实验室的建议。他们在信中写道：“我们于四月二十二日提呈了关于加强科学计算研究的‘紧急建议’，陈述了这一基础学科对于国家安全、经济发展和科技进步的特殊重要意义，受到了您和党中央、国务院其他领导同志的重视，我们衷心感到鼓舞。

中国科学院计算中心、核工业部应用物理与计算数学研究所、清华大学应用数学系和北京大学数学系聚集了学科的优势带头力量和优秀青年新秀，而且地处邻近，关系融洽，与国内工业部门协作密切，国际交流广泛。为了贯彻科技领域进行改革的精神，尽快把我国大规模科学计算搞上去，我们建议由上述科研、教育、产业三部门四单位实行横向联合，共同筹建科学计算国家重点实验室，发挥优势，形成拳头，向国内和国际开放。”

冯康等人在信中语气挚恳，表达了他们心系国家发展、心系国家科学计算发展的拳拳之情。

他们在信中又提出科学计算实验室的任务：第一，从事大规模科学和工程计算方法的基础研究，与工业部门协作解决重大疑难的科学与工程计算问题；第二，培训高级科学计算人才，培养研究生及博士后人员，促使年轻优秀人才茁壮成长；第三，提供优良的学术环境和先进的设备条件，吸引在国外学习工作的留学生回国工作，接纳外国同行，进行合作研究，组织国际交流。

这一建议也得到李鹏副总理的积极回应，并获得了采纳。

1991 年，在世界银行贷款的支持下，首批国家重点实验室成立。其中包括了“科学与工程计算国家重点实验室”。冯康是这一实验室的创始人，并亲自担任学术委员会主任。尽管当时重点实验室也面临还贷的风险，冯康还是集中了 20 多个计算数学方面精英，组成了这个以理论研究为主的国家重点实验室，从事有限元理论、流体力学计算等方面的研究。

同年，国家科委组织的国家基础研究重大关键项目即“攀登计划”项目中，冯康建议的“大规模科学和工程计算的方法与理论”被包含在该计划首批 11 个重点项目中。冯康被任命为“攀登计划”首席科学家。冯康去世后的 1997 年，该项目继续获得重点支持，

被列入国家“九五”“攀登计划”预选项目中。1999年“大规模科学计算研究”又被列入“国家重点基础研究发展规划”即“973”项目，并在2005年又继续得到国家的支持。

在过去的二十年里，美国也在不断地加速科学计算的发展。他们不但在1996年提出“加速战略计算创新”即ASCI计划，又在1999年提出了“21世纪的信息技术对美国未来的大胆投资”即ITT计划。2001年，美国政府提出了“高级计算推动科学发现”的计划，2004年又提出了“高端计算复兴”计划。在2004年的计划中还特别指出：“对数学和计算机科学算法的持续开发和改进是未来高端体系结构成功的关键。”

应当说两次上书李鹏副总理，表现出冯康的胆识与魄力。国家重点实验室的建立与“攀登计划”的入围也突显了他作为中国计算数学发展总设计师的雄韬伟略。

应当说两次上书李鹏副总理，表现出冯康的胆识与魄力。国家重点实验室的建立与“攀登计划”的入围也突显了他作为中国计算数学发展总设计师的雄韬伟略。

在冯康的努力和带动下，中国的科学与工程计算不但受到国家的高度重视，而且也步入这一研究领域的世界先进国家发展行列。这是冯康为中国计算数学发展留下的浓墨重彩的一笔，而李鹏副总理也成为成就冯康事业辉煌的重要推手。

难解“恩怨结”

1984年是中国经济发展的拐点，也是中国电子信息产业发展的拐点。

1984年，冯康与黄鸿慈的友谊出现了严重裂痕。

是什么原因让这两个共事了近三十载，在一起有着无数次亲密合作的师徒老友走到了友谊的拐点？什么原因让冯康对黄鸿慈这个他曾经最为欣赏、最有默契的左膀右臂有了意见？

三室的老同事都知道冯康与黄鸿慈有过一段“恩怨结”，而今天，年逾七旬的黄鸿慈再向我们提起这段陈年往事已是云淡风轻。

据黄鸿慈回忆，冯康和他的友谊出现裂痕起源于计算中心的软件研究室成立之时。当时，计算中心的编程还处于原始的手工状态。每次接到问题，就开始新起炉灶，从零开始。这种重复劳动的效率很低。“八十年代初，冯康意识到国家对于软件发展的需求，他认为应该适时发展系统软件，开发软件包，于是找我商量，想成立一个软件研究室。我听到他这个想法，认为也是一件好事，也提出许多建议。”

等到软件研究室成立时，冯康想让黄鸿慈来当研究室的室主任，谁知却被黄鸿慈拒绝了。

“我当时刚好在研究生院讲课讲了一年，把十年文革荒弃的计算数学重新捡起来，不想再放弃了。我跟冯康说，如果要做软件室主任又要重新开始，重新转型，我不愿意。于是，给他推荐崔俊芝担当此任。”

“冯康很不高兴，认为好像我欺骗了他。原本答应了他，结果事到临头变卦了。其实我由始至终也没有答应他。”

最终黄鸿慈还是做了一个挂名的室主任，而实际上并没有做什么实际工作。黄鸿慈也因此逐步被冯康边缘化。

1983年，计算中心在党委的组织倡导下进行改制。在原有的基础上成立一部、二部、三部。具体分工为，一部负责机器，二部负责网络，三部则负责计算数学。部设主任，部下面再设室。对于这种架构设想，冯康是反对的，他认为这种架构并不利于有效地管理。而黄鸿慈却积极支持，并向党委写出具体的改制建议。

党委因此表扬了黄鸿慈，却惹恼了冯康。冯康怪罪黄鸿慈在做事之前没有和他商量，更觉得黄鸿慈是和党委的人团结在一起站在自己的对立面上。

冯康在文革中挨批，伤痕累累，因此对一些党的领导干部很有成见。八十年代初，计算中心的党委很想发展冯康入党，为此在一次外出开会中，书记还特地和冯康住在一起，希望能和冯康有促膝谈心的机会。但冯康的反应极其冷淡。在一次谈话过程中，他竟半个多小时一言不发，把书记搞得极端尴尬。当然入党的事也就没有下文了。

冯康在文革中挨批，伤痕累累，因此对一些党的领导干部很有成见。在一次谈话过程中，他竟半个多小时一言不发，把书记搞得极端尴尬。当然入党的事也就没有下文了。

1984年10月1日，踏着改革开放步伐的共和国迎来了建国三十五周年的国庆大典。在天安门广场，举行了“文革后”第一次威武雄壮的盛大阅兵，也是继1959年国庆后，25年来第一次盛大的国庆阅兵。担任阅兵首长的是中央军委主席、也是被称为中国改革开放总设计师的邓小平。正是在这次国庆阅兵中，群众游行队伍中自发举出了“小平您好”的亲切标语。邓小平气宇轩昂地乘坐敞篷红旗车检

阅部队，并高呼“同志们好！同志们辛苦了！”。时任党中央总书记的胡耀邦和其他党和国家领导人在天安门城楼观礼。

在天安门城楼旁的观礼台上，众多的邀请嘉宾中还有一位是中科院选派的代表黄鸿慈，而作为计算数学界叱咤一时的冯康却并未在观礼之列。

这次国庆阅兵大典成了冯康与黄鸿慈关系的分水岭，从此两人关系变得微妙起来。

中国计算数学会理事会议 2010 年在武汉举行

雾里看花选接班

1985 年 6 月 12 日，中国一代数学大师华罗庚，精神矍铄地进行了一个多小时的演讲报告之后，突然倒在日本东京大学的讲台上，与世长辞。

听到这个消息后，冯康心里也掠过很多感伤。

从四十年末清华园中与华先生的最初邂逅，到五十年代末数学所讨论班上的彼此欣赏；从携手力拓中国计算数学之发展先河，到寄情组建中国科技大学数学系并着力培养数学精英……冯康在华罗庚的身上寄托过许多美好的感情，也对华罗庚充满了敬畏。

事实上，许多数学界的人士都觉得两个人“专横霸道”的风格简直如出一辙。也正因为如此，六、七十年代，随着二人在各自研究领域的“江湖地位”日渐提升，二人的关系变得有些微妙。

崔俊芝曾向我们讲述了这样一个故事。

原本在冯康的心中，一直有着成立一个计算数学一级学会的梦想。1978 年，刚好机会来了，在科技部、科协等部门一些相关人员的帮助下，可以将计算数学的一级学会审批成功。可就在这关键时刻，冯康却跟崔俊芝说要征求华罗庚的意见，并告诉崔俊芝，如果华明确支持，他们就做，如果华不支持，他们就不做了。结果在征求了华罗庚的意见后，冯康就放弃了这个想法，也因此错失了将计算数学学会由二级学会变成一级学会的最佳时机。

华罗庚去世后，冯康再次旧梦重提，将成立一级学会的想法重新提出。然而，当时已经是物是人非，原来熟悉的一些人员相继退休，加上国家对各类学会组织的审批更加严格，冯康也只好与梦想失之交臂。

八十年代中期，受全国“下海经商”热的影响，计算中心创办的大大小小的公司也遍地开花。由于这些公司的经营不善，给计算中心的管理带来了一定的困难，也让年届古稀的冯康感到了管治危机。再加上冯康本人性格强硬，言辞尖锐，平日在计算中心内部也得罪了不少人，因此更有人希望冯康尽快“退休”，让位给年轻人。迫于年龄以及各方面的压力，冯康尽管并不情愿但也开始积极物色接班的“人选”。

冯康退位，谁会接替他掌帅计算中心？

本来黄鸿慈是坊间公认的最佳人选，有业务能力，群众基础也不错。奈何他与冯康的关系已不再密切，冯康无论如何也不会把他一手创建的计算中心交给黄鸿慈。

有那么一段时间，冯康曾经想要培养他的另一个爱将张关泉做接班人。1983 年，张关泉刚从中国驻法大使馆调回计算中心不久，便被冯康委以重任担当计算中心的副主任，两人拍档合作。然而，随后几年，事情的发展却并不象冯康设想的那样美满，两人也相处得并不融洽。

上任后的张关泉大搞科研体制改革，将用人权以及经费下放到每一个课题组，这种改革的旋律似乎与一贯主张权利集中的冯康并不和谐。再加上当时张关泉作为年轻的副主任，在计算中心也引来不少的嫉妒。于是，难免有人搬弄是非，这更加重了冯康对张关泉的不

冯康（左四）与石钟慈（左二）在西安。左一为秦孟兆，右二为汪道柳。

满。1985年，计算中心任命博士生导师，原本张关泉已在提名之列，可公布结果时，却没有他的名字。相反，一些在资历、学术上和张关泉相同或相近的同事却在任命之列。这件事对张关泉影响很大，让一向淡泊名利、踏实肯干的他陷入了尴尬的境地。

尽管半年后，迫于各方面的反应与压力，张关泉的名字出现在补选的博士生导师之列，但这时，张关泉已经意识到与冯康合作的困难。不久，张关泉便以健康原因请辞。“疏者宽容、近者严格”，这是张关泉与冯康相处近三十年得出的八字箴言。

屠规章最早也是冯康重点培养的对象。从事孤立子研究的屠规章最初被冯康作为特殊人才引入计算中心，还被破格提拔为研究员，也是1980年代计算中心最年轻的正研究员，并顶替冯康当上了全国人大代表。但后来有些事使冯康开始对他心存芥蒂，在接班人方面，冯康似乎也不会把他列为考虑的人选。

冯康似乎很想推荐崔俊芝来做计算中心的主任，但当时以崔俊芝的资历和声望，在计算中心似乎又很难服众。

情急之下，冯康还想到了核工业部应用物理和计算数学研究所（九所）的李德元。李德元毕业于上海交通大学，与三室的石钟慈、张关泉等人同样是五十年代中期留苏的学生，毕业后分到九所，时任九所所长。冯康征求了李德元的意见，李德元却不愿离开他的工作单位。

冯康最终选择了被他选派到中国科大的石钟慈。

这里我们稍微花些笔墨介绍一下冯康的接班人石钟慈。石钟慈1951年从家乡宁波考上位于杭州的浙江大学数学系。他来自宁波乡下农村，母亲不识字，父亲只有小学程度，家境不好，以至于他小学毕业后没有钱继续读市里的初中，差点失学。幸亏此时抗日战争结束，一些有钱的士绅乡亲捐资办了一所乡村初级中学，石钟慈才在小学多呆了半年后上了初中。两年半以后，他考高中，家境使他只能选择免学费的公立学校就读。结果他以同等学历考上极其难考的省立宁波中学。虽然高中阶段极其艰苦、极其危险，学生们住在庙里，与和尚们同吃同住，但这个阶段的学习为他以后的成功打下了坚实的基础。他不仅阅读自然科学方面的书籍，对哲学、历史、文学、艺术的兴趣也是此时通过阅读培养起来的。他还读了许多关于音乐方面的书以及音乐家传记，由此，他迷恋上音乐。他高考的第二志愿就是中央音乐学院学习作曲，音乐后来也发展成为他的“第二最爱”。2008年10月份，在中国召开的某次国际数学会议上，主办方请与会代表去国家大剧院欣赏挪威无声电影《哈当格尔的婚礼》音乐会，

全家福，从左至右：冯康院士，姐夫叶笃正院士，冯端夫人，姐姐冯慧，冯康夫人石玉明，弟弟冯端院士。

石钟慈不仅去过故事发生的挪威小城，而且对音乐故事的来龙去脉了如指掌，让同行们很惊讶。

石钟慈的成长得到了很多名师的指导。上大学初期，浙大的数学系有陈建功、苏步青、徐瑞云等名师。1952 年秋天，随着全国院校调整，他来到复旦大学读二年级。这里结集了华东地区最好的数学师资力量，比如从同济大学调来的杨振宁先生的父亲杨武之老先生还给他们讲过一年的高等代数。1955 年，石在陈建功先生指导下完成了单叶函数论的大学毕业论文。当年的《解放日报》还发表了新华社文章，称赞石的论文有创新性，这在 1949 年后的大学生中还是不多见的，后来该文在《数学进展》上发表。大学毕业后，他被分配到中国科学院数学所工作。到北京后，他才知道不能再继续他的函数论研究了，而要进入当时谁都不清楚的专业——计算数学。当时的中国科学院数学所所长华罗庚兼管计算机和计算数学的发展，早有谋篇布局的华罗庚和石钟慈说：“你要转行，去搞计算数学。”

1956 年，石钟慈被派往苏联学习计算数学，当时苏联的计算数学非常好，和美国可以媲美。在苏联科学院数学研究所的四年里，他有幸认识了索伯列夫、盖尔芳德等世界著名的数学家，也正是从这时开始，他才安心地 进入了计算数学这个领域，同时也幸运地“躲”过当时国内的反右运动。1960 年，他从苏联学习回来，就到了冯康的手下做研究。1958 年建校的中国科技大学的首任数学系系主任是华罗庚，冯康任计算数学教研室主任，年轻的石钟慈也开始去科大兼课。1964 年，随着学生数量和班级增多，科大与冯康商量，希望正式调石钟慈到科大任教，负责新兴的计算数学专业的建设。从此石钟慈开始了他的教学生涯。从文化大革命中随着学校由北京搬迁到合肥，一直到接替华罗庚任科大数学系第二任系主任，石在科大渡过了 25 个春秋。1985 年，在众多接班人人选中，冯康看中了石钟慈，通 过中科院干部局把他调回北京。冯康说：“是我把他调出去的，所以，在我退休之前，要把他调回来，都是为了计算数学。”

在回到北京的前四年，也就是 1981 年，石钟慈决定去国外深造，重拾十年文革荒废的研究时光。在华罗庚、冯康和吴文俊先生的推荐下，他申请到了德国的洪堡基金，师从法兰克福大学的施图默教授，在那里他开展了非协调有限元的研究。石曾经谈起那段经历：“当时已年近 50 岁，比其他同学大 10 岁，刚去的时候，一点把握也没有，非常紧张，因为完全是新的东西，基础不够，还要从头学习一门德语，心理上、生理上承受着巨大压力。然而，德国人一丝不苟、诚实守信的民族品格，以及他们在科学、哲学、法律、音乐、文化和艺术领域的先进水平给予我极大感动，正所谓置之死地而后生。凭借青年时代在浙大、复旦和苏联留学期间打下的坚实基础，加之深受德国精神的影响，通过大半年的拼死一搏，终于赢得了施图默的信任。”后来施图默还给冯康写信，称石钟慈是非常突出的优秀科学家。在非协调有限元这一领域，施图默认为石是他最主要的继承者。在德国的这两年多时间成为石钟慈的科研工作重要的历程，“后来我的计算数学的工作都是从这里开始的，没有这次出去，我的科研工作就会停留在 80 年代初那个时期的水平”。

1987 年 1 月，石钟慈正式走马上任，成为继冯康之后计算中心的第二任主任。冯康“退而不休”，成为计算中心幕后的话事人。

卸任之后

冯康卸任计算中心主任后的第一件事就是找石钟慈开介绍信，说要结婚了。这令包括石钟慈在内的计算中心上上

下下都大吃一惊。冯康对另一半的要求高，这一点众所周知。他既要求对方是大学生，又要长的漂亮，还要有文艺方面的才华。而冯康的第二任太太石玉明恰恰满足了冯康这三个“苛刻”的条件。

石玉明出身于哈尔滨一个高级知识分子的家庭，父亲是留日的眼科医生。漂亮大方的石玉明中学毕业后考入中央戏剧学院，谁知只读了两年便遇上“文革”，她只好放弃学业回到家乡。石玉明回到哈尔滨后很快结婚，并生了一个小男孩，但不久就离婚了。

石玉明是经计算中心一个女同事的介绍和冯康相识的。之前，她与冯康并未见面，却通过鸿雁传书，开始了长达八年之久的“两地爱情”。冯康对于家庭生活向来低调，因此这次的爱情保密工作也做得相当好。

八年后，冯康与石玉明在北京第一次见面，更加一见钟情，随即两人决定结婚。

冯康的第二次结婚为计算中心带来了不小的震动。震动过后，冯康便带着她新婚的妻子出访苏联、出访欧洲。冯康曾对石钟慈说，当初自己担任主任时，很少出国访问，如今，无官一身轻，反而可以出去走走。

正当所有人还在为冯康晚年迟来的幸福祝愿祈福的时候，冯康的第二次婚姻再次亮起了红灯，而这时距离他们结婚也只有两年的时间。据计算中心的同事说，后来他们经常看到冯康独自一个人吃饭，慢慢地，他与妻子石玉明的关系也变得紧张。冯端回忆说，他这期间到北京看望哥哥时，大多时兄弟两个用罐头和方便面作为晚餐。兄弟俩谈到十一、二点时，生活规律的冯端就上床休息了。可是喜欢熬夜的冯康却又泡了一杯浓咖啡，开始挑灯夜战，伴着香烟和咖啡工作到东方泛白。冯端看后，对哥哥的身体感到很担心。

冯康的第二次结婚为计算中心带来了不小的震动。震动过后，冯康便带着她新婚的妻子出访苏联、出访欧洲。冯康曾对石钟慈说，如今，无官一身轻，反而可以出去走走。

石钟慈接替冯康担任计算中心的主任后，对冯康非常尊重，遇到一些问题也会征求他的意见并与他商量。因此尽管冯康退居“二线”，但有相当长一段时间，冯康依然有计算中心的话事权。事实上，冯康对石钟慈的管理也并不十分满意。经历“文革”的洗礼，在冯康的头脑中，有很强的斗争意识。冯康一度认为石钟慈与一些他不喜欢的人斗争不力，对计算中心的管理不严，造成大权旁落。

之前张关泉以身体原因向冯康请辞，计算中心副主任一职便由美国留学归来的桂文庄担任。桂文庄年轻气盛，行政能力强，许多事情都喜欢自己出面。渐渐地，冯康对桂文庄也有意见，他甚至把这个归咎于石钟慈管理不力。

在此期间，他与黄鸿慈的矛盾有些白热化。

事情的导火索源于1989年，黄鸿慈曾经组织过一个国际会议，在邀请领导人名单中，黄鸿慈仅邀请了作为计算中心主任的石钟慈，并没有将冯康位于邀请之列。冯康对此非常生气，他很快找到了一个对黄鸿慈发泄怨气的时机。

1989年的一天，冯康突然召开一个会议。参加会议的有主任石钟慈、副主任桂文庄以及黄鸿慈等。开会时，业务处长提出，按照中心规定，每人只允许有两个研究课题。黄鸿慈当时手上有三个研究课题，因此要求黄鸿慈把关于并行计算的课题分给另一位同事来做。冯康没有发言，但大家都知道这是他的主意。他来坐镇会议，明显是为通过这一决定。黄鸿慈回忆说，冯康明知道并行计算对他是一个最重要的课题，却把这个课题给了别人，这就表明了冯康对他的排斥。黄鸿慈怒气之下，在会上也说了一些对冯康很不尊重的话。至此，冯康与黄鸿慈的关系已经出现了公开的裂痕。失意的黄鸿慈于1989年9月赴香港浸会大学做访问学者。

半年后，黄鸿慈又继续留在香港浸会大学，开始了他的教书生涯。从此，黄鸿慈离开了他工作了三十多年的中科院计算中心，也离开了北京。他到香港后，对香港的计算数学研究发展起到了推动作用。计算中心文革后的第一批留美研究生薛伟民之后也跟随黄鸿慈来到了浸会大学。黄鸿慈在中科院培养的两位博士邹军和穆默也分别来到香港中文大学和香港科技大学。他们的加盟对促进香港计算数学的发展起到了重要的作用。

继黄鸿慈走后，计算中心的另一个业务骨干、计算流体力学知名学者朱幼兰也离开了北京，成为美国一所大学的教授。在此前后，屠规章去了美国，数值代数专家、华罗庚的研究生孙继广也拿起了瑞典一所大学的教鞭。

1991年，崔俊芝接替石钟慈成为计算中心的第三任主任。

未完待续

数学聊斋连载

（连载四）

李尚志

千手观音有多少只手

——集合的元素个数

重庆大足石刻是世界文化遗产。大足石刻有一尊千手观音。导游带领游客参观的时候会告诉你：这尊千手观音一共有 1007 只手。然后问：1007 这个准确数字是怎样数出来的？

只要你看了这尊观音，就知道要数清有多少只手并不容易。观音的手如孔雀开屏般向各个方向伸出，长短各异，方向各异，千姿百态，无一雷同。各只手的位置没有规律，不可能按某种方式排列成先后顺序一只一只数清楚。

传说清代时有个工匠被请来对千手观音“贴金”，他为了数清千手观音的手，贴完一只手就朝桶里扔一支竹签。等所有的手臂都贴完了以后，再数一数竹签，一共有 1007 只。由此，千手观音 1007 只手的说法一直流传至今。

【注：据有关媒体报道，2009 年千手观音“大修”，专家用 248 张高精度照片纠正拼接成了千手观音的高清晰影像图，对每只手逐一编号，最后确认千手观音实际

千手观音舞蹈

上是829只手。也许专家确认的数字是正确的，但我仍然认为，传说中工匠的方法既简单又不容易出错。如果1007只手的数字有误，那也是因为从来也没有认真地按照这个方法操作一次。】

这个简单的办法包含了计数的基本思想：一一对应。将观音的手与金箔一一对应起来，又与竹签一一对应起来，这样，手就与竹签一样多。手不容易数清楚，竹签却容易一支一支数清楚。数出了竹签有多少支，就知道了手有多少只。

一支一支数竹签的时候，又建立了另外一个对应：将竹签依次与正整数 1, 2, 3, ⋯ 对应。数到最后一支竹签，发现它对应于正整数 1007, 这就将竹签的集合与从1到1007的正整数集合 $\{1, 2, \cdots, 1007\}$ 建立了一一对应，竹签个数也是1007。我们通常用尺子来量长度。类似地，集合元素的多少也是用正整数集合 $N=\{1, 2, \cdots\}$ 这把"尺子"量出来的。用这把"尺子"去量竹签集合，从1开始到1007正好将竹签量完，也就是说从 N 这把"长尺子"截下"一小段" $\{1, \cdots, 1007\}$ 正好与竹签集合建立一一对应，竹签集合的元素个数就是1007。

如果用正整数集合 N 这把尺子去量某个集合 S 时，N 的正整数始终用不完，S 就是无穷集合。如果 S 是一个无穷序列 a_1, a_2,v ⋯, a_n , ⋯ ，就可以依次将序列的各项对应于正整数 1, 2, ⋯, n, ⋯。这样就将这个序列各项组成的集合与全体正整数的集合 N 建立了一一对应。集合 N 中的元素有无穷多个，凡是与 N 能够建立一一对应的集合称为"可列集合"。可列集合是元素个数最少的无穷集合。

也许你会疑惑：怎么能说 N 是元素最少的无穷集合呢？假如将 N 中的奇数删去，剩下的全体正偶数组成一个集合 $2N=\{2, 4, 6, \cdots\}$ ，仍然是无穷集合，元素个数是 N 的一半，岂不是比 N 的元素更少了吗？

你可以认为全体正偶数只占全体正整数的一半，但是如果用 N 这把"标准尺子"去"度量"正偶数集合 $2N$，将 2, 4, 6, ⋯ 依次与 1, 2, 3, ⋯ 对应，全体正偶数的集合 $2N$ 与全体正整数的集合 N 就建立了一一对应，这就说明集合 $2N$ 与 N 所含的元素一样多，正偶数与正整数一样多！明明正偶数只占正整数的一半，居然又说它们一样多，岂不是自相矛盾？

这种看起来矛盾的现象对于有限集合是不会发生的，只有对无穷集合才会发生。为了避免矛盾，我们规定：只要能够有一种方法在两个集合 A,B 之间建立一一对应，就称两个集合的势相等。这里，“势”就是“元素个数”的意思。只要在 A,B 之间曾经建立一一对应，即使还可以将 B 中去掉一些元素之后再将剩下的元素与 A 建立一一对应，也不能说 A 的元素比 B 少，而仍然坚持认为 A,B 的元素一样多。

我们已经看到无穷集合 N 的“一半”与 N 的元素一样多。反过来，容易想到，N 的“两倍”的元素也与 N 一样多。容易看出，全体正整数组成的集合 $N=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 与全体负整数组成的集合 $-N=\{-1, -2, \cdots,-n, \cdots\}$ 可以建立一一对应，元素个数相等。因此，将 N 与 $-N$ 合并在一起得到的集合就是 N 的“两倍”，再添上 0 得到的就是全体整数组成的集合 Z，它的元素个数可以认为是 N 的两倍再加 1。然而，全体整数可以按如下方式排成一个无穷数列 $Z=\{0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots\}$，数列中的各个数可以依次与正整数 1, 2, 3, ⋯对应，这说明了整数与正整数一样多！

每个实数可以用数轴上的一个点来表示。这样就建立了数轴与全体实数的一一对应。表示整数的点在数轴上稀稀拉拉，表示有理数的点在实数轴上密密麻麻，可见有理数比整数多得多。将实数轴分成很多长度为 1 的区间 $(n, n+1)$，则每个区间内只有一个表示整数的点，但它却有无穷多个有理数的点。可见有理数的个数是整数个数的无穷多倍。然而，全体有理数可以按如下方式排列成一个无穷数列：

$$\frac{0}{1}, \frac{1}{1}, -\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{2}{1}, -\frac{2}{1}, \cdots$$

排列的方法是：先将 0, 1, -1 排在前三项，再按如下原则排列其余各有理数：将 0, 1, -1 之外的每个非零有理数经过约分写成 q/p 或 $-q/p$ 或 p/q 或 $-p/q$ 的形式，其中 p, q 是互素的正整数并且 $p>q$。按 p 从小到大的顺序排列；p 相等的，按 q 从小到大的顺序排列；p 与 q 都相同的 4 个数，按 $q/p, -q/p, p/q, -p/q$ 顺序排列。

按以上方法，就将所有的有理数排成了一个无穷数列。将无穷数列的各项依次与正整数 1, 2, 3, ⋯ 对应，第 n 项与正整数 n 对应，这就建立了这个无穷数列与正整数集合 $N+$ 的一一对应，证明了有理数与正整数一样多！

能否将全体实数也排成数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，从而证明实数也与正整数一样多呢？

如果想出了一个办法将所有的实数排成无穷数列，就证明了实数与正整数一样多。反过来，即使全世界所有的人都没有找到这样的办法，也还不能就此断定这样的办法不存在。万一来了一个外星人想出这样的办法呢？

不过我们可以用反证法证明：无论何时，无论何地，谁也不能将全体实数排成一个数列！

数轴上的点与实数一一对应。假如全体实数被排成了一个数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，数轴上全体点也就对应地排成一个序列 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$。预先任意取定一个小的正数 e。在数轴上取一个长度为 $e/2$ 的线段 E_1 将点 A_1 盖住，再取一个长度为 $e/4$ 的线段 E_2 将点 A_2 盖住。一般地，对序列中第 n 个点 A_n，取一个长度为 $e/(2^n)$ 的线段 E_n 将它盖住。所有这些线段 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 合并起来得到的集合 E 将所有的点 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 全都盖住了。我们知道，这些点就是数轴上所有的点，因此 E 将数轴全部覆盖了。但另一方面，E 由线段 $E_1, E_2, \cdots, E_n, \cdots$ 合并而成，E 的总长度不能超过这些线段的长度之和

$$\frac{e}{2}+\frac{e}{4}+\frac{e}{8}+\cdots\frac{e}{2^n}+\cdots<e$$

其中 e 可以取任意小的正数。E 的总长度小于任意正数，只能是 0，不可能覆盖整个数轴！

这个矛盾就证明了全体实数不可能排成一个数列，实数与正整数不一样多。

事实上，我们证明的结论是：如果数轴上某些点组成的集合能够排成一个序列，那么这些点的“总长度”是 0。在前面已经证明过数轴上的有理点（表示有理数的点）可以排成无穷数列，可见有理点的“总长度”是 0。除去有理点，剩下就是无理点（表示无理数的点）。数轴的总长度是无穷大，其中有理点的总长度是 0，剩下的无理点的总长度就应当是无穷大。如果要问在数轴上有理点和无理点各占百分之几，那就只能说有理点占百分之零，无理点占百分之百！

厦门和美丽的鼓浪屿

九成厦门人感到幸福遭九成以上质疑？

——统计

网上看见一篇文章《当九成厦门人感到幸福遭九成以上质疑》。现摘引一部分内容供大家欣赏：

国家统计局厦门调查队的调查报告称九成以上厦门人感到幸福，此报告刚一发布，就引来众多网友和市民的争议，其中，受争议最大的是“九成以上”这个数据的真实性。有多少人质疑这个调查结论呢？居然也是“九成以上的厦门人”。(2008 年 6 月 26 日浙江在线)

但遗憾的是，有人对于“九成以上厦门人感到幸福”的调查结论却提出质疑，最奇怪的是，质疑的人居然也在九成之多。在厦门某社区网站上，截至 25 日 19 时，关于该话题的帖子点击率为 690 次，其中 63 人对此回复，仅 9 个人表示相比其他人觉得幸福。而记者随机调查的十几位市民中，肯定回答“幸福”的人仅一两个。

既然“九成以上厦门人感到幸福”的调查结论遭遇九成以上厦门人的质疑，我们就可以断言，这是一个虚假的调查结论。如果这个数据确实是经过调查的，也是一个靠不住的“伪调查”。“伪调查”是怎样进行的？据国家统计局厦门调查队城镇住户处处长林芙贞介绍，这份调查是在厦门某个社区做的入户调查，“我们是随机调查统计的”。该局的工作人员笑称，之所以有那么多人说自己不幸福，“只能说他们没有在我们的抽样调查之内”。是的，你们怎么都抽到了说好话的调查户，而大量提出质疑的市民就没有被抽样呢？如果你们抽样到一个民营企业家、一个国企老总、一个厅级干部，就能算出厦门市民平均年收入是 100 万吧？

这篇文章有很多跟贴，其中一份跟贴如下：

我也是调查队的，我知道这样的调查很难很难搞准，因为被问卷调查的人当面都说好、好、好，背后谁都说不好。

现在的人真的都是两面人，问到的人没有人说实话，一方面大骂统计数据不准，另一方面调查到自己时却编

晨运的人们

瞎话，从不说真实情况。

国家为了搞准调查数据真是煞费苦心，投入巨大人力、物力在全国开展住户调查，…

这篇文章和跟贴提出的问题很精彩，很有代表性，可以作为今后关于如何调查统计的所有的课本（包括大学和中学的课本）的经典案例。

首先，我们来看厦门调查队的工作人员的说法。

说法 1：该局的工作人员笑称，之所以有那么多人说自己不幸福，“只能说他们没有在我们的抽样调查之内”。调查队当然不可能调查全部人员。但一定要有代表性。在设计调查对象的时候，就应当尽可能让被调查的人的观点能够代表没有被调查的人的观点。不能只调查说幸福的人，也不能只调查说不幸福的人。如果真的有那么多说自己不幸福的人在抽样调查之外，只能说明调查组的抽样并没有代表性。工作人员居然能够如此理直气壮地说这句话，只能说明这个工作人员根本不懂调查的基本常识。

说法 2：我也是调查队的，我知道这样的调查很难很难搞准，因为被问卷调查的人当面都说好、好、好，背后谁都说不好。问到的人没有人说实话，一方面大骂统计数据不准，另一方面调查到自己时却编瞎话，从不说真实情况。如果被调查的人真的有幸福感，为什么不愿意说实话，为什么要编瞎话？如果这个调查队员的话是真的，如果被问卷调查的人“没有人说实话”，“背后谁都说不好”，那就不用调查了，就凭这个调查队员的结论就足以说明厦门 100% 的人都没有幸福感了。岂止是没有幸福感，这样的厦门简直就是一个恐怖世界！这位调查队员以为他在捍卫“九成以上厦门人感到幸福”这个结论，实际上是在否定这个结论。其实，如果被问卷调查的人不肯说实话，并不能怪被调查的人，只能怪这个调查本身有问题。任何调查都应适当地设计问卷和调查的方式，使得被调查的人说实话没有顾虑。比如不采用当面询问的方式，而采用类似于无记名投票的方式将自己的答案折好投入“票箱”。如果主持调查的人员连这一点常识都没有，那只能说明他们没有资格承担这项调查任务，国家向他们投入大量经费是投错了。

再来看这篇文章对“九成以上的人质疑”提供的依据：

依据：关于该话题的帖子点击率为 690 次，其中 63 人对此回复，仅 9 个人表示相比其他人觉得幸福。

幸福家庭

63 人回复，仅 9 人感到幸福，其余 54 人不幸福，占 63 人的 54/63 = 85.7%，四舍五入可以算作九成，将它说成“九成”还可以。当然，小学生都知道 85.7% 不是“九成以上”，但考虑到媒体写文章习惯于夸张以吸引眼球，我们也不必苛求他们。不过，我们想知道，厦门有多少万人口？这 63 人能否代表他们？而且，在点击“该话题的帖子”的 690 人中，除了这 63 人，其余没有回复的人是什么态度，他们是感到幸福还是不幸福？假如“该话题的帖子”就是那份宣布“九成以上厦门人感到幸福”的调查报告，我估计凡是感到幸福的人一般不会回复，而强烈反对这个结论的人回复的可能性就比较大。因此，这 63 人更多地代表了反对意见，而不能代表这 690 人。更何况，这 690 个上网的人的态度恐怕也不能代表厦门成千上万不上网的人。写这篇文章的人批评调查组的抽样没有代表没有被抽样的人，这样的批评原则上是对的。可是，他仅凭 63 人中的 54 份没有表示幸福的回复、或者仅凭采访的十几个人的态度，就斩钉截铁地说“我们可以断言”，岂不是犯了与调查组同样的错误甚至更严重的错误吗？

我不是厦门人，但去过厦门几次，平心而论我对厦门的印象是很好的，我所接触的厦门人多数是有幸福感的，因此我也相信这篇文章所说的“九成以上的人反对”是错误的。但我没有进行科学的调查，因此没有充分的理由断定我的这个感觉是否正确，没有充分的理由判定调查组的结论或者文章的结论是否正确。但可以斩钉截铁地断言的是：以上所提到的两位调查人员，以及文章的作者，他们对调查的观点和方法都是完全错误的。这种错误，来源于他们调查知识的欠缺，也来源于他们的偏见。

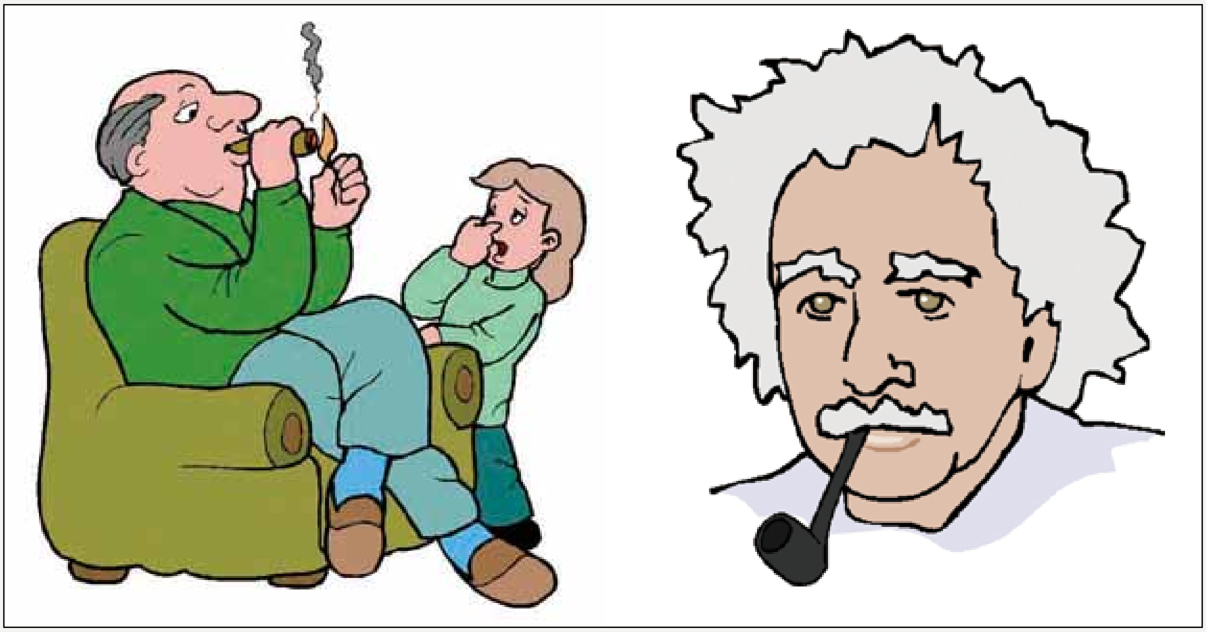
调查组为了显示政绩，希望说幸福的人越多越好。媒体写文章时为了吸引眼球，希望说幸福的人越少越好。这种希望也无可指责。但是，只要进行调查，一条基本的原则就是：不论自己喜欢与否，都要努力保证调查结果的客观真实性。在任何一本有关调查统计的书籍里都有许多相关的知识教你怎样实现这一点。我建议以后写书时将这件事情作为典型案例写进去，使该书更加通俗易懂。不要说让全国人民都懂一点统计常识，至少应当让主持统计工作的负责人懂一点统计常识吧？

被动吸烟的人高达几亿？
——数学模型的检验

中央电视台的新闻节目中曾经宣布了一个统计数据，说是我国被动吸烟的人口高达多少多少亿。为了核实具体数据，我登陆百度，输入关键词“被动吸烟”，查到这样一篇文章：

“我国吸烟人数为 3.5 亿。根据研究推算，目前我国人群中遭受被动吸烟危害的人数可高达 5.4 亿，其中 15 岁以下儿童有 1.8 亿。”

我不知道是经过怎样的“研究推算”得到这样的结果的。我国人口总数超过 13 亿，除去主动吸烟人数 3.5 亿和被动吸烟人数 5.4 亿，至少还应当有 4 亿幸运者既没有主动吸烟也没有被动吸烟。这 4 亿幸运者占全国总人口的 30% 以上，这个比例应当还不算小，至少不像大熊猫那样稀少，因此我们应当有机会经常见到这样的幸运者。不过，我想问：要达到怎样的条件才能够成为



这样的一位幸运者？当然，不主动吸烟容易做到，比如我就做到了。但我经常吸入别人抽烟产生的烟雾，应当属于那 5.4 亿被动吸烟者的行列。然而怎样才算是没有被动吸烟？是从来没有遇见别人在他们面前抽烟吗？或者，别人抽烟的烟雾从来没有被吸入他的鼻孔。不过我很怀疑，这样的幸运者不但达不到 30%，而且比大熊猫更稀少，甚至比华南虎更稀少，有可能根本不存在。我们周围哪一位人士敢于说他从来没有吸入过别人抽烟产生的烟雾？也许在某一个与世隔绝的世外桃园里生活的人群全都是这样的幸运者，不过，这样的世外桃园可能还不为我们所知，因此那里的人们还没有进入我们能够统计到的 13 亿人口之列，可以不予考虑。坦白地说，我猜想：遭受被动吸烟的人数不是“高达 5.4 亿”，而是更高达 13 亿 − 3.5 亿 = 9.5 亿。我强烈希望我的这个猜想是错的，希望进行“研究推算”的专家能够拿出证据推翻我的这个猜想，也就是说找出一些这样的幸运者来。不要求他们找出 4 亿幸运者，先找出哪怕一个幸运者让我们高兴一下吧！

如果觉得“从来没有吸入烟雾”这个标准太高，那么可以放宽标准，改为平均每天吸入的烟雾量在多少毫克以下。不知道那些进行“研究推算”的专家们研究过这样的标准没有？也许按照他们的新标准，我也是那 4 亿没有被动吸烟的幸运者之一呢。

我猜想，专家的推算方法大约是：先估计每个主动吸烟者造成几个被动吸烟者，比如假设每个主动吸烟者造成 1.54 个被动吸烟者。主动吸烟的人数比较明确，可以大致统计出来，比如确实是 3.5 亿。再通过简单的乘法算式 1.54×3.5=5.39 就研究推算出了被动吸烟的人数高达 5.4 亿。我们不好说他们的算法不对。也许专家们不仅念过小学，还念过中学和大学，根据我们都不懂的高级理论采用了我们都不懂的更复杂的算法。但是，不论他们的理论和算法是怎样的高不可攀，所得的结论必须符合普通草民们能够理解的常识，经受实际的检验。也就是说：数学模型得出的结论必须经过实际效果的检验。具体地说，既然宣布有 4 亿人口没有被动吸烟，至少应当很容易从这 4 亿人口找到其中一部分人向我们宣讲一下他们能够避免成为被动吸烟人的宝贵经验供我们学习和效仿吧？

《盗梦空间》中的数学文化

陈虹兵 张维忠

由克里斯托弗•诺兰编剧与导演的好莱坞大片《盗梦空间》2010 年在全球热映，除了扣人心弦的故事情节外，影片中充满众多数学元素，公理体系、不可能图形、分形几何等等，数不胜数。本文将剖析其包含的数学文化及其教学意义。

《盗梦空间》简介 >>>

《盗梦空间》又名《奠基》(Inception)，是由克里斯托弗•诺兰编剧与导演的，诺兰继《蝙蝠侠前传 2：黑暗骑士》后再次给我们带来了惊喜，剧情扑朔迷离，悬案迭起，使观众游走于梦境与现实之间。多姆•科布是一个经验老道的窃贼，在人们精神最为脆弱的时候，他潜入别人梦中，窃取潜意识中有价值的信息和秘密。在他看来，人类思维所能产生的能量是不可限量的——人们靠思维就可以建造城市，可以穿越时空，回到过去重新制定社会的法则。人们甚至可以通过思维来进行犯罪。只可惜，面对如此宝贵的财富，大多数人不知道如何获取。而科布却恰巧拥有这样奇特的技能。他利用人们做梦的时候，从他们的潜意识里盗取秘密；因为往往人们在做梦的时候，精神防线是最脆弱的。科布把自己这种绝技称作“摄梦术”。

不过，虽然科布的特殊技能，令他在这个贪婪的世界中成为了一个成功的商业间谍，但他为此也付出了沉重的代价。科布成为企业间谍中令人垂涎的对象，也让他失去了所爱的人，并成为一名国际逃犯。如今，柯布接受了一项新任务，这是他一次救赎的机会，但是他要做的是潜意识犯罪中最不可能的境界：植入意念，要让一个大企业的继承人自愿解散公司。如果他们能够成功，这将会是一次史无前例的完美犯罪。但无论“盗梦小组”如何精心策划，这次任务过程中一直有一个神秘敌人如影随形，而这个神秘人只有柯布能够感应到其存在。因为犯罪现场存在于人的思想中，他找到了自己的伙伴，要制造出几乎不可能制造出的 3 层梦境，在不断躲避潜意识里的守护者的攻击中，他们有一些人进入了潜意识的边缘，看到了他潜意识里的妻子和孩子，他将会怎么选择？会留在那里和妻子在一起，还是会回到现实？无论答案是什么都让人揪心撕肺。

从公理体系到非欧几何 >>>

影片中柯布一直问：究竟什么是真实？这是一个哲学问题。转化成数学问题就如思考一个命题是否正

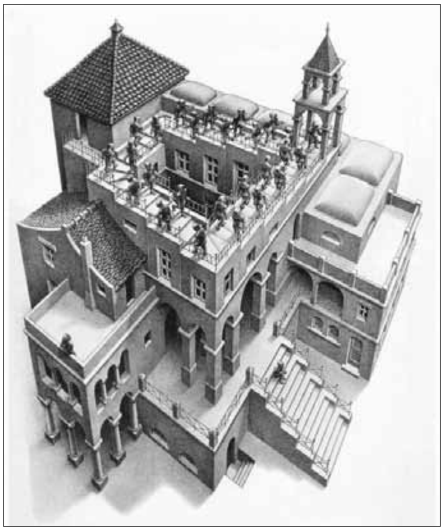


图 1 升与降

确。当阐述一个命题正确的时候，我们的逻辑系统建立在几条公理之上，该命题可通过公理的推导得出，这便是我们所说的公理体系。只有接受公理的假设时，定理才是真的。问题在于公理本身往往也只是假设，真假是不可证明的。通常我们的逻辑认知都基于欧氏空间，而在一个弯曲的空间中，如果还用欧氏空间的逻辑进行思考，必定会产生悖论。在对欧氏几何平行公设的研究过程中，非欧几何诞生了。一维时，欧氏空间是直线，非欧空间可以是圆圈。二维时，欧氏空间是平面，非欧空间可以有多种。比如埃舍尔的“升与降”（如图 1），其实就是数学中的麦比乌斯环面；而电影《盗梦空间》中整个巴黎街区上下对折的震撼场景，其实可以看成一个球面。所以柯布真实的世界应是欧氏空间，而梦中的世界是非欧空间。如果我们为每一个空间都设置坐标系的话，欧氏空间的坐标系是直线，而非欧空间的坐标系会弯曲成一个圆。

在自然界，数学可以生动地推理出一些人们无论如何也无法想象的，或者在现实空间认为不可能的事实。柯布所展示的盒子世界，把巴黎折成了一个盒子，大地变成盒子的内表面，天空位于盒子的中心，世界变得像万花筒一样，其实就是球形的非欧空间。埃舍尔的“升与降”，指出了梦中悖论的存在。在那个空间的高度方向弯曲成了一个圆，这样楼梯的最高点和最低点具同一高度，所以才能连接上。在那样的空间中，依然有向上和向下的方向，但意义已不同，向上和向下不代表高度的增减，而是指从两个不同的方向画圈 [1]。

《盗梦空间》中，造梦师设计迷宫的核心思想就是将敌人困在一个圈中。造梦师如果想把一个人困住，就要给他一种无限的错觉。其实我们也可以把人的思想描述成一种几何结构。迷宫般的逻辑结构是存在的，埃舍尔楼梯对应着逻辑上的循环悖论，最典型的便是“鸡生蛋，蛋生鸡”的例子，它们分开来看都是正确的，但是放在一起便出现了一个先有鸡还是先有蛋的问题。造梦师就利用非欧空间的弯曲性，将敌人永远地困在自己制作的梦境当中。

伽利略曾说：“我们生活在受精确的数学定律制约的宇宙中，而数学正是书写宇宙的文字。”数学是人类文化的重要力量，对人们的观念、精神、思维方式的养成起着重要的影响。特别是两千多年前古希腊文明的重大成果——欧几里得几何，作为其精髓的公理化方法，更是对人类理性思维的形成一直起着关键的作用。但欧氏几何研究的只是用圆规和直尺画出的图形，这样的图形是简单的或平滑的。受认识主、客体的限制，欧氏几何就具有很强的“人为”特征。这样，欧氏几何就只能是人们认识、把握客观世界的一种工具，而不是唯一的工具 [2]。

从分形世界到缩放时间 >>>

分形几何在《盗梦空间》中也得到了充分的应用。例如，阿里阿德妮把柯布带到某街区，关上门，变成两面对立的镜子。根据反射原理，两面镜子之中出现了数不清的人像。因为镜子可以在镜子中成像，于是就有了镜中镜……，随着镜子层数的加深，镜中像会越来越小，但即使是极小的一个像，经过放大，里面还是有镜中镜……，这种自相似性就是分形。

类似地，整部影片最让人难以理解的梦中梦，也有分形的逻辑特征。分形结构对应着无穷的递归逻辑。在分形理论中，分形是一种具有无限嵌套层次的结构，自相似是它最主要的特征。把分形分成大大小小不同的层次，各层次之间互相相似，并且都和整体相似。整体分成的部分之间不再是等同，而是相似，并且各个层次的部分都以不同的相似比存在于整体之中 [3]。分形几何目前广泛应用于日常生活和科学研究中，让学生学习分形几何的初步知识，将给学生带来一种全新的认识，帮助他们实现从欧氏几何领域向分形几何

首先，有助于提升学生的数学情感教育——激发学生学习数学的兴趣，激励学生学会思考和提问。

《盗梦空间》作为好莱坞大片在我国热映，必当吸引众多学生观看影片，而以中学生目前的认知水平，要看懂影片是十分困难的。教师充分利用学生的好奇心，对影片作适当解释，可以活跃课堂气氛，学生将会大大拓展知识面，了解欧氏几何的公理体系以及非欧几何产生的原因。这对建立学生正确的数学观将产生显著的影响，让学生看到数学神秘而有趣的一面。数学学习将不再是枯燥乏味的，以此激发学生学习数学的兴趣。另外，“学起于思，思源于疑”，如同非欧几何的发展，都是从思考与质疑开始的。以此激励学生学会思考，学会质疑和提问，真正学会数学，而不只是学会应试。

其次，有助于提升学生的数学思维能力——拓宽学生的思维，发展学生的抽象能力与辩证思维。

分形几何发展迅猛，让中学生初步了解分形几何知识是十分必要的。以影片中的镜像分形为例，引出分形的特点，通过计算机作分形图，让学生体会递归思想、掌握迭代方法；同时，在分形的计算机生成中，学生会发现许多结构复杂的分形图都能以非常简单的方法定义（即对应着一个简单的映射），经过反复的迭代而产生，从而昭示“简单中孕育着复杂”的深刻哲理，使学生的辩证思维得以发展。

除了分形之外，球面几何也在影片中多处展现。学习球面上的几何，如果直接画球体显得缺乏创造性的话，教师可以用电影中的情节导入，介绍球面上的

领域认知的初步跨越，使得创新思维得到很好的培养。

《盗梦空间》里另一个有趣的设定就是梦中时间流逝变慢，而且梦中梦的时间的速度会更慢。例如现实时间的 5 分钟等于梦里时间的 1 小时，而 5 分钟的梦境时间又等于二级梦境中的 1 天，以此类推，时间随着梦的级数呈现几何级变长的状态。

其实日常生活中很多人都有体会，有时候明明做了一个很长的梦，醒来之后却发现自己只睡了很短的时间。事实上，不是时间变慢了，而是接受信息的速度变快了。梦境时间流逝变慢是一种错觉，是因为我们以清醒时的时间标准去感知梦中情节而产生的错觉。在《盗梦空间》中，梦境中的时间比现实世界要慢得多，而且还存在一个所谓的“缩放效应”，即如果梦境中又出现了梦，时间流逝的速度会更慢。

对数学教学的启示 >>>

《盗梦空间》是一部挑战人类固有思维的电影，乍看之下似乎与数学教育，尤其是中学数学毫无关系，其实不然。数学的高度抽象性，决定数学教育应该把发展学生的抽象思维能力定为其目标。从具体事物抽象出数量关系和空间形式，把实际问题转化为数学问题的科学抽象过程，可以培养学生的抽象能力[4]。因此，结合对这部电影的分析，将从以下两方面阐述给中学数学教学带来的启示。

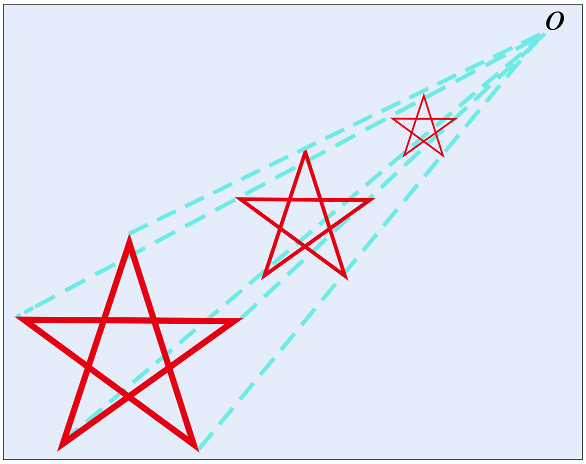


图 2. 五角星的位似

图 3. 电影中的位似视觉

距离和角等概念，并利用电影中迷宫的特点，让学生类比现实空间，探索球面上距离的求法，球面三角形的性质及正余弦定理等。

如果说分形几何和球面几何是高中数学的内容，有一定复杂性，运用不那么直观的话，那么，梦中时间与镜像在初中数学中将得到直观简单的运用。梦中时间与现实时间的关系，影片中运用了几何级数描述。通常学生对枯燥的数字计算不感兴趣，但如果给定前几层梦境的时间变化规律，让他们找出规律，并且计算现实世界的一分钟，相当于某一层梦境的多少时间，学生一定会非常感兴趣，不知不觉中巩固了找规律以及计算乘方的方法。

镜中镜成像可以作为中学教材中的图形的位似的情境导入。教材中的引入是运用图 2 五角星构成的位似。虽然简洁直观，但学生不免心中有疑问：为什么要将五角星按这样的位置摆放呢？这个图形看起来没有现实意义，因此学生不知道为什么要学习位似。而我们如果运用《盗梦空间》中的截图 3 引入课题就不一样了，无论是柯布本人还是旁边的柱子，都明显地表现出了位似的视觉特点。学生因为对镜中镜这一奇特现象的兴趣，可以很快记住位似的特点，并且知道学习位似是有现实意义的。

参考文献

1. 高斯控，隋波。《盗梦空间》用数学思想来理解。《新知客》，2010(9)：69-73。

2. 张维忠。文化视野中的数学与数学教育。北京：人民教育出版社，2005。

3. 舒昌勇，包韬略。分形的文化价值管窥。《数学通报》，2008，47(1)：19-21。

4. 俞求是。试论数学的科学性及其特点与数学教学。《数学教育学报》。2008，17(5): 13-18。

作者介绍：

陈虹兵，浙江师范大学教师教育学院在读教育硕士，现任教于浙江省遂昌县第三中学 。张维忠，教育学博士。现为浙江师范大学教师教育学院教授，主要研究方向为数学课程与教学论。
本文的写作获得教育部 2010 年人文社会科学一般项目——多元文化数学课程的理论与实践研究（10YJA880179）。

纽约华尔街股票交易所的繁忙景象

金融海啸与金融数学

吴立昕

07-08 年发生的全球金融海啸使得投资组合、金融衍生品、次级贷款等稍显专业的词汇一时间成为了坊间酒肆的流行语，而作为推动这一系列金融投资行为的理论基础之一——金融数学，也吸引了人们更多的关注。金融数学又称金融工程，是一门用数学方法研究金融投资理论的学科。在金融衍生产品（又称衍生工具）蓬勃发展的上世纪九十年代，金融数学开始进入美欧一些大学的数学或工程学系。金融数学专业人才的培养以硕士学位为主，毕业生的就业去向集中在投资银行、对冲基金和证券公司。由于其诱人的就业前景，金融数学迅速成为了各大学炙手可热的专业。即便是在金融海啸发生之后以及余波未平的近两年，与美欧诸多金融机构元气大伤、金融产品备受诟病的情形不同，金融数学的行情倒是“一路看涨”，在中港两地，过去一二年中报读金融数学专业的人数一直在持续增加。

从理论的角度看，金融数学是介于金融与数学之间的一门交叉学科。它的核心是金融学科中的资产定价理论。由于金融数学广泛和深入地应用了概率论、随机分析、随机控

哈里·马克维茨（Harry Markowitz）获得 1990 年度诺贝尔经济学奖。

马克维茨（Markowitz）

默顿（Merton）

从应用的角度看，金融数学学科大致有三个分支，分别为投资组合理论、衍生产品定价理论和风险管理理论。它们对数学工具的依赖也有差异。

制理论、偏微分方程和数值分析等数学分支理论，它在金融学领域中独树一帜。从应用的角度看，金融数学学科大致有三个分支，分别为投资组合理论、衍生产品定价理论和风险管理理论。它们对数学工具的依赖也有差异：投资组合理论倚重随机最优控制理论，衍生产品定价理论则较依赖随机分析，而风险管理理论的核心内容是概率论和统计学，同时它还要利用前述两个分支的理论结果。

投资组合理论

投资组合理论由哈里·马克维茨（Harry Markowitz）于 1952 年开创 [3]，他也因此荣获了 1990 年度的诺贝尔经济学奖。

1927 年 8 月 24 日，马克维茨出生于美国伊利诺伊州的芝加哥。尽管研究经济学并非他的童年梦想，但他 18 岁时还是选择了芝加哥大学经济系并在两年后获得了学士学位。此后的 1950 年、1952 年，马克维茨在芝加哥大学连续获得了经济学硕士、博士学位。他最感兴趣的是不确定性经济学（当然，微观经济学与宏观经济学他也学得很好），特别是冯·诺伊曼、摩根斯坦及马夏克关于预期效用的论点，弗里德曼 - 萨凡奇效用函数以及萨凡奇对个人概率的辩解。马克维茨所创立的期望 - 方差（Mean-Variance）问题被认为是离散时间下投资组合理论的代表，其研究在今天看来无疑是金融经济学理论的前驱，这一工作也因此被誉为“华尔街的第一次革命”。

投资组合理论如今已经是一个硕果累累的学科，并已广泛应用于各资产管理机构。除马克维茨的学术贡献外，在连续时间理论方面，罗伯特·默顿（Robert Merton）于 1969 创立的最优投资 - 消费问题成为投资组合理论的代表 [4]：

$$\max_{c_t,\pi_t} E\left[\int_0^T e^{-\delta s}u(c_s)ds + e^{-\delta T}u(W_T)\right].$$

在上式中，E 代表期望，T 代表投资 - 消费期限，W_t 代表 t 时刻的财富，c_t 代表 t 时刻的消费，$u(c)$ 是效用函数（或幸福函数），而 δ 则是折现率。在任何时候 t，投资人（兼消费者）

罗伯特•默顿（左，1997 年诺贝尔经济奖得主）和 Eric Maskin（左三，2007 年诺贝尔经济奖得主）等在论坛上。

要选择消费额 c_t，并按比重 $\{1-\pi_{t,}\pi_{t,}\}$ 将余下的财富分别投资到一个股票组合和活期存款中。假设股票价格的变化服从几何布朗运动，我们可以直接推导出财富 W_t 应服从的过程：

$$dW_t = \left[(r+\pi_t(\mu-r))W_t - c_t\right]dt + W_t\pi_t\sigma dB_t.$$

这里 r 是短期利率，(μ, σ) 是股票组合的预期回报率和波动率，dB_t 是布朗运动的增量。效用函数要反映投资人的幸福感随财富增加，但增幅递减的常规，直观上它表现为一个凹函数（concave function）。当我们的效用函数是常用的“相对风险厌恶函数”时，

$$u(x) = \frac{x^{1-\gamma}}{1-\gamma}, \quad 0 \le \gamma < 1,$$

默顿问题有简洁的解析解。默顿问题至今已经有许多推广，包括采用其它效用函数（甚至非凹非凸函数）允许交易征费、允许参数随时间变化、允许破产等等。

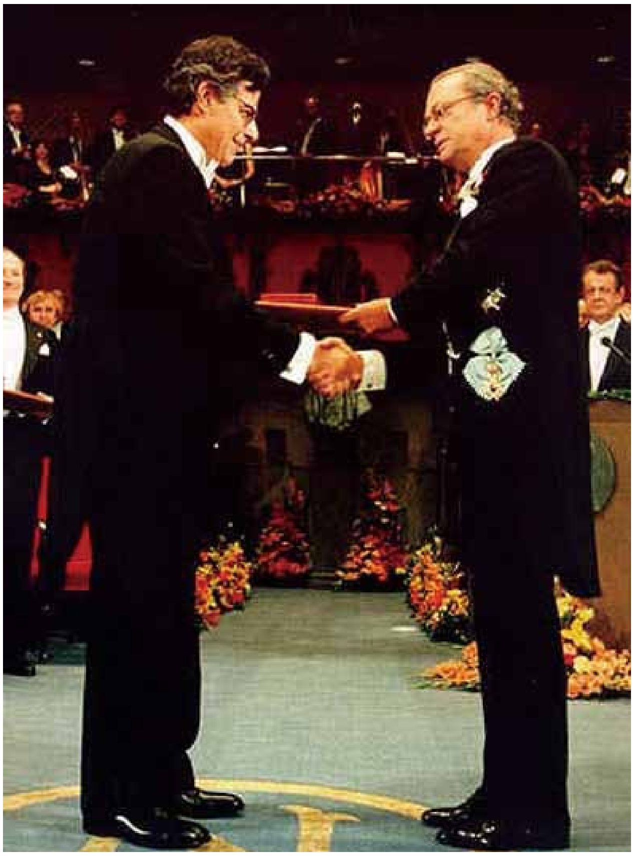
默顿 1944 年 7 月 31 日出生于美国一个名叫哈斯汀小镇，这个位于纽约郊外的小镇在当时人口不足 8000 人，但却聚居了一批诺贝尔奖的获得者。默顿从小就显示出了对货币和财务问题的兴趣。1966 年，默顿毕业于哥伦比亚大学工学院并获工程数学学位，一年后又获得了加州理工学院应用数学硕士学位。在加州理工学院学习期间，默顿产生了将他感兴趣的金融学与数学分析结合起来的想法。“我想如果一个人能对经济学做出贡献，那么他将有可能影响亿万人的生活。”正是要在经济学上有所建树的决心使默顿于 1968 年在麻省理工学院经济系开始了他的学术生涯，并成为保罗•萨缪尔森的学生及助手，共同研究认股权证定价理论。默顿事后回忆，研究生阶段是他效率最高的时期。

1970 年从麻省理工学院毕业的默顿经老师莫迪格莱尼的大力举荐而留校，在斯隆管理学院教授金融学。在斯隆学院的 18 年里，默顿保持了高效的工作状态，发表了大量的学术论文，对基础研究贡献巨大。1988 年，默顿接受了哈佛大学商学院的职位，并于 1998 年成为该院的约翰和纳蒂•麦克阿瑟荣誉教授。

在斯隆学院，默顿结识了布莱克（Fischer Black，1938 年 1 月 11 日 -1995 年 8 月 30 号）和日后与他同年获诺贝尔奖的斯科尔斯（Myron S. Scholes，1941-），三位天才携手合作，共同推动了期权定价理论的研究进程。

布莱克（右）和斯科尔斯

布莱克是美国经济学家，著名的布莱克 - 斯科尔斯模型的提出者之一，他的一生充满传奇色彩。布莱克从没接受过系统的金融和经济学教育，却在几年之内创立了现代金融学的基础。他在生活中处处规避风险，却在学术研究和商业实践中主动寻求挑战。他轻松地获得了（最起码在其他人看来是这样）芝加哥大学和麻省理工学院的终身教授头衔，却又主动放弃，再次投身到金融衍生产品革命的大潮。他频繁地在象牙塔和华尔街之间穿梭、游弋，理论与实践的转换在他的手里竟然是如此地容易。他与斯科尔斯和默顿共同创建了迄今为止最经典、应用最广、成就最高的模型：布莱克 - 斯科尔斯期权定价模型。这一模型提供了人们计算选择期权价值的基本概念，在今天已经成为全球金融市场的标准模型。在布莱克因病去世一年后，诺贝尔基金会将经济学奖颁给了他的两位合作者，布莱克终未获此殊荣。



斯科尔斯于 1997 年从瑞典国王手里接过诺贝尔经济学奖

衍生产品的定价理论

衍生产品的定价理论起源于布莱克和斯科尔斯及默顿于 1973 年所开启的无套利定价理论 [1][5]。作为社会科学界最成功的理论之一，无套利定价理论为其后三十多年金融衍生产品的普及奠定了理论基础。衍生产品定价理论的核心是构造一个定价测度，也称为风险中性测度。可以证明，一旦有了这个定价测度，衍生产品现时的价格就是其（经折现后的）到期日的价格的期望值。让我们举股票期权为例。以 S_t 为 t 时刻的股票价格，T 为期权的到期日，r 为市场的短期利率，$f(S_t)$ 为到期日的合约价格函数，则 t 时刻的期权价格（即期权金）由下式给出：

$$V(S_t,t)=\mathrm{E}^{Q}\left[e^{-r(T-t)}f(S_T)\middle|S_t\right].$$

“对冲”是定价理论的一个重要概念。期权的风险与回报是不对称的：它风险低而回报潜力高。透过支付期权金，投资人将风险转移给庄家，而庄家则通常要为期权淡仓作对冲。标准的做法是买入或卖出一定数量的股票，而这个数量正是期权价格相对于股价的变化率：

$$\Delta_t=\frac{\partial V}{\partial S}(S_t,t)=\mathrm{E}^{Q}\left[e^{-r(T-t)}\frac{\partial f}{\partial S}(S_T)\middle|S_t\right].$$

在股票价格的变化服从几何布朗运动的假设下，布莱克 - 斯科尔斯和默顿分别证明 $V(S,t)$ 满足如下偏微分方程（PDE）终值问题：

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}+rS\frac{\partial V}{\partial S}-rV=0,$$
$$V(S,T)=f(S)$$

这就是著名的布莱克 - 斯科尔斯 - 默顿方程。方程中的 σ 为股价的波动率。布莱克 - 斯科尔斯和默顿为偏微分方程在金融衍生产品定价方面的应用打开了大门。

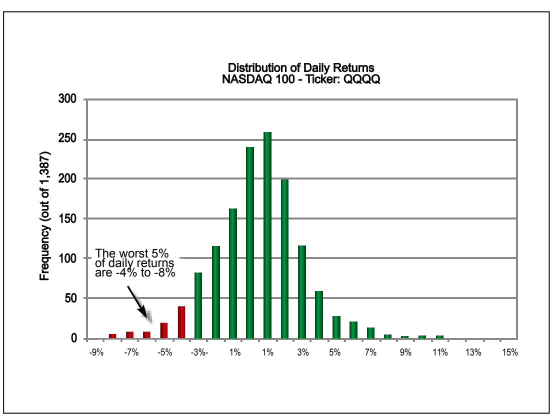
不难想象，金融市场中有不少风险都无法被对冲掉，

巴塞尔 (Basel) 委员会

譬如股价暴跌的风险，流动性风险等等，市场也因此被称为是“不完备的”。在不完备的市场下，定价测度不再是唯一的。在过去二十年间，如何在不完备的市场下构造定价测度一直是金融数学的一个重要课题。它不仅需要复杂的数学工具，还需要经验和判断。

风险管理在金融机构中早已有之。而计量方法的普及则应归功于摩根大通在 1992 年推出的 Risk Metrics 系统（参见 http://www.riskmetrics.com）。Risk Metrics 系统的主要功能是计算风险准备金。在该系统下，风险准备金的设定取决于“风险价值”（Value-at-Risk，简称 VaR），它的定义为一机构的金融资产在未来一段时间内和在一特定的置信水平下可能发生的最大损失。以 V 代表金融资产的价值，ΔV 代表一段时间内的价值变化，a 为置信水平，则 VaR 可由下式定义：

$$\text{Prob}\,(\Delta V < -VaR) = 1 - a$$



VaR 的计算

不难看出，计算 VaR 的关键在于取得的分布函数。上图是纳斯达克（NASDAQ）交易所买卖基金（QQQQ）在一天内于 95% 置信水平的风险价值的表示图。

1998 年，巴塞尔委员会（专注于银行业风险管理的权威国际机构）将 Risk Metrics 纳入了其风险管理系统 Basel II 中。委员会建议用如下的公式计算风险准备金：

$$\text{MRC}_t = \max\left(k\frac{1}{60}\sum_{i=1}^{60} VaR_{t-i,} VaR_{t-1}\right) + \text{SRC}_t.$$

在这里，t 代表当日，$k(\geq 3)$ 是乘数因子，SRC 代表特别风险拨备（它取决于公司业务）。风险管理系统除了要计算风险准备金外，它的一个潜在的效果是迫使金融机构剔除不良资产或高风险的仓位。另外，对未来风险进行预测并建议相应的对策也是风险管理理论的重要组成部分，所谓压力测试是风险管理人员的例行工作之一。

索罗斯（左 1）和西蒙斯（左 2）在一起开会。

从 1998 年至今，巴塞尔委员会和金融界一直致力于改进风险管理系统。Basel II 仅仅度量市场和信用风险。经过研究和扩充，又加入了对流动性风险和操作风险的度量，形成了现在正在推广中的所谓 Basel III。在同一时期，金融数学界也进行了一些重要的探讨，目的是用更好的风险测度来取代 VaR。07-08 年金融海啸之后，如何加强金融机构的风险管理成为了一个更为热门的课题。

金融机构对金融数学的三个分支的依赖程度各有不同。其中资产管理公司，如退休基金、互惠基金和私人投资基金等，较倚重投资组合理论。投资银行则较依赖衍生产品定价理论。至于风险管理，则是所有金融机构必须时刻面对的严肃课题。当然，并不是所有的投资机构都重视或认同计量方法，投资大师索罗斯的量子基金就是一个反例。但是可以不过份地说，运用计量方法做投资决定或做管理风险是金融界在过去二三十年中的一个重要趋势。计量方法还催生了许多对冲基金，其中最知名和最成功的当属詹姆斯 • 西蒙斯 (James Simons) 的文艺复兴基金 [6]。

当然，并不是所有的投资机构都重视或认同计量方法，投资大师索罗斯的量子基金就是一个反例。但是可以不过份地说，运用计量方法做投资决定或做管理风险是金融界在过去二三十年中的一个重要趋势。

对冲基金大师西蒙斯

提起巴菲特，投资者可说是无人不知，无人不晓。提起詹姆斯 • 西蒙斯 (James Simons)，如果不事先透露他的基金经理身份，人们也许会误认为这只是一名美国 NBA 球员的名字。即使华尔街的专业投资人士，也未必听说过西蒙斯和他所创立的文艺复兴科技公司 (Renaissance Technologies)。

西蒙斯是世界级的数学家，也是最伟大的对冲基金经理之一。2008 年，西蒙斯旗下的对冲基金实现了 80% 的净收益率，他也因自己的投资使身家比上年增加了 25 亿美元，高达 80 亿美元，排名福布斯亿万富豪榜第 9 位。他也是 20 年“最赚钱的基金经理”，从 1989 年到 2008 年，平均年收益率达到了惊人的 38.5%，而股神巴菲特也才不过 20%。

现年 72 岁的西蒙斯满头银发，特别偏爱穿颜色雅致的衬衫，总是光脚，随意地蹬一双 loafers 牌休闲鞋。在华尔街，韬光养晦是优秀的对冲基金经理恪守的准则，西蒙斯也是如此，即使是华尔街专业人士，对他及其旗下的文艺复兴科技公司也是所知甚少。然而在数学界，西蒙斯却是大名鼎鼎。1974 年，他与陈省身联合发表了论文《典型群和几何不变式》，

陈省身 - 西蒙斯楼在清华大学剪彩；西蒙斯和杨振宁等出席。

创立了著名的 Chern-Simons 理论。该几何理论被广泛应用到从超引力到黑洞的各大领域。两年后西蒙斯又获得数学领域里的最高荣誉之一——全美数学科学维布伦（Veblen）奖。

高中毕业后，西蒙斯进入麻省理工学院学习数学。天资聪慧加上后天的刻苦努力使得他在大一的时候就达到了毕业生的水平。西蒙斯师从著名数学家 Warren Ambrose 和 I.M. Singer。他经常以崇拜的眼光看着两位大师点完餐后，坐在餐厅讨论数学问题，直到深夜。西蒙斯对这种生活充满了向往。

3 年后的 1958 年，西蒙斯获得了学士学位。他来到加州大学伯克利分校继续深造。在这里还有一段有趣的小插曲。据说西蒙斯刚入校的时候，想跟陈省身先生（20 世纪著名几何学家，当时为伯克利的数学教授）学习微分几何，然而恰好陈先生那时去了欧洲。西蒙斯没有因此中断学习，他自己找书钻研，看懂了后贴出海报，让大家去听他讲。由于讲得很精彩，吸引了很多教授去旁听。1962 年，23 岁的西蒙斯拿到了博士学位。1961 年至 1964 年，西蒙斯先后在麻省理工和哈佛大学教授数学，开始实现他的人生追求。

然而由于经济和学术等各方面的种种压力，西蒙斯在 1964 年被迫离开了大学校园，进入美国国防部下属的一个组织——国防逻辑分析协会，进行代码破解工作。这份工作让他既有充裕的时间进行科研工作，又有足够的薪水养家糊口。然而没过多久，《时代》周刊上关于越南战争的残酷报道让他意识到他的工作实际上正在帮助美军在越南的军事行动，于是他向《新闻周刊》写信说应该结束战争。当他把他的反战想法告诉老板时，自然，他被解雇了。

西蒙斯又回到了学术界，成为纽约州立石溪大学的数学系主任，在那里做了 8 年的纯数学研究。

在数学上获得斐然成就后，西蒙斯开始寻找新的方向。据说西蒙斯曾经找到陈省身先生咨询是从政好还是经商好，陈先生告诉他，从政比数学复杂多了，不适合他，还是经商吧。于是西蒙斯就转向了投资。

1977 年，西蒙斯离开纽约州立石溪大学，创立了私人投资基金。最初他也采用基本面分析的方式，例如通过分析美联储货币政策和利率走向来判断市场价格走势。1988 年 3 月西蒙斯成立了一只对冲基金 Medallion，最初主要涉及期货交易。当年该基金盈利 8.8%，而 1989 年则开始亏损，西蒙斯不得不在 1989 年 6 月份停止交易。在接下来的 6 个月中，西蒙斯和普林斯顿大学数学家 Henry Larufer 重新开发了交易策略，并从基本面分析转向数量分析。从此，西蒙斯转型

针对不同市场设计数量化的投资管理模型，以电脑运算为主导，并在全球各种市场上进行短线交易是西蒙斯的成功秘诀。对于数量分析型对冲基金而言，交易行为更多是基于电脑对价格走势的分析，而非人的主观判断。

为“模型先生”。此后，这支基金屡创辉煌。1988 年以来，Medallion 年均回报率高达 34%，这个数字较索罗斯等投资大师同期的年均回报率要高出 10 个百分点，较同期标准普尔 500 指数的年均回报率则高出 20 多个百分点；从 2002 年底至 2005 年底，规模为 50 亿美元的 Medallion 已经为投资者支付了 60 多亿美元的回报。这个回报率是在扣除了 5% 的资产管理费和 44% 的投资收益分成以后得出的。

作为一位数学家，西蒙斯知道靠幸运只有二分之一的成功概率，要战胜市场必须以周密而准确的计算为基础。西蒙斯曾经透露，公司对交易品种的选择有三个标准：即公开交易品种、流动性高并同时符合模型设置的某些要求。他表示：“我是模型先生，不想进行基本面分析，模型的优势之一是可以降低风险。而依靠个人判断选股，你可能一夜暴富，也可能在第二天又输得精光。”

针对不同市场设计数量化的投资管理模型，以电脑运算为主导，并在全球各种市场上进行短线交易是西蒙斯的成功秘诀。对于数量分析型对冲基金而言，交易行为更多是基于电脑对价格走势的分析，而非人的主观判断。文艺复兴科技公司主要由 3 个部分组成，即电脑和系统专家、研究人员以及交易人员。西蒙斯每周都要和研究团队见一次面，和他们共同探讨交易细节以及如何使交易策略更加完善。不过西蒙斯对交易细节守口如瓶，除了公司 200 多名员工外，没有人能够得到他们操作的任何线索。

如果说西蒙斯是这只“黑箱”的心脏，那么员工就是流淌在“黑箱”中的血液，而他们共同的基因就是科学背景。文艺复兴科技公司将近二分之一的员工都是数学、物理学、统计学等领域顶尖的科学家，其中包括弗吉尼亚大学的物理学教授罗伯特•劳里。进入文艺复兴科技之后，虽然这些科学家研究的对象变成了各种资产价格，但是所用的研究工具没有什么不同。

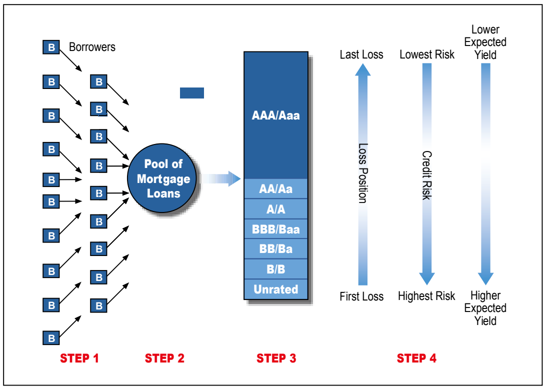
西蒙斯从不雇用商学院毕业生，也不雇用华尔街人士，他说：“我们不雇用数理逻辑不好的学生。”因为“好的数学家需要直觉，对很多事情的发展总是有很强的好奇心，这对于战胜市场非常重要”。他甚至雇用了一些语音学家，包括贝尔试验室的著名科学家彼得•韦恩伯格，并从 IBM 公司招募了部分熟悉语音识别系统的员工，他说：“交易员和语音识别的工作人员有相似之处，他们总是在猜测下一刻会发生什么。”

跟其他暴富的同行不同的是，西蒙斯没有把他的财富用来享乐而是转向了慈善事业。西蒙斯和他的第二任妻子玛里琳成立了西蒙斯基金会，专门为教育、卫生、自然科学研究等项目提供资助。西蒙斯在数学方面的捐助金额也很可观。2006 年他向纽约州立石溪大学捐助了 2500 万美元用作数学和物理的研究经费，2008 年 2 月又捐助了 6000 万美元，这是纽约州历史上数额最大的捐助。由于西蒙斯和陈省身先生亦师亦友的亲密关系，西蒙斯也为中国教育做出了贡献，他为清华大学捐资建立了“陈 - 西蒙斯”专家公寓楼。陈先生生前常开玩笑说希望自己能多活几年，这样就可以跟西蒙斯多要一些钱了。可惜陈先生于 2004 年驾鹤西去，也许西蒙斯捐资中国教育的脚步也就此止住了。

2009 年 6 月 1 日，国际数学家联盟主席和秘书长发布公告，正式宣布：“国际数学家联盟和陈省身基金会将颁发数学中的新奖项——陈省身奖，以纪念杰出的数学家陈省身。奖金授予因数学成就得到最高赞誉的个人。每届一人，获得一枚陈省身奖章，以及 50 万美元奖金。奖金的一半要由获奖人捐助给一些支持数学的研究、教育和其他活动的社会机构，以推动数学的发展。”陈省身基金会主席、陈省身先生之女陈璞博士说，陈省身基金会的来源包括家属的捐献以及陈省身的生前好友与合作者西蒙斯的基金会捐赠。

西蒙斯很少在金融论坛上发表演讲，他最喜欢数学会议。西蒙斯曾经在一个几何学研讨会上庆祝自己的 60 岁生日，为数学界和患有孤独症的儿童捐钱，在发表演讲时，更常常强调是数学使他走上了投资的成功之路。

2009 年 5 月 11 日，度量几何和微分几何国际会议在南开大学陈省身数学研究所开幕。来自中、美、法、德、芬等国家的数十名在该领域最负盛名的学者参加。时年 71 岁的西蒙斯乘坐自己的私人飞机来到了天津参加了这次学术会议。他回忆道，首次见到陈省身距现在已有整整 50 年，



CDO 的构造和等级

金融海啸的大潮曾经无情地摧残了国际金融市场。

陈省身对数学研究所的爱令他感动。他认为数学是促使自己走上成功之路的重要因素，只要有机会，他愿意再次到省身楼这座“美丽的建筑”来访问交流。

投资衍生产品和金融海啸

在上世纪九十年代以前，金融还是数学家未开垦的一块处女地。但基于以下两个重要原因，数学开始与金融分析结缘，且关系愈发密切。其一是“为财富找出路”。信息革命的蓬勃发展导致财富的激增，再投资的压力大大促进了金融投资产品的研发；其二是“为学者谋生路”。由于冷战结束，西方世界特别是美国政府在九十年代初大幅削减了与军备研究相关的资金投入，这迫使一部分数学家和物理学家“再就业”，而其中部分人在“华尔街”（投资银行业的代名词）落脚，并加快了这个行业的计量化。数学界很快地意识到，现代投资银行业开始变成概率论和随机分析的一个应用领域。许多数学系的毕业生，包括学士、硕士，特别是博士，开始把就业的目光投向华尔街。

数学人才的大量参与改造了华尔街甚至整个金融业。在 1995 年到 2007 年的十几年间，金融衍生产品的创新进入了全盛时期，投资交易的高潮也在各个市场逐个出现。上世纪九十年代的后期是股票市场的大牛市，与股票或股市指数相关的各色奇异期权大量出现，交易量也很可观。互联网泡沫破裂之后，股票及其衍生产品市场迅速沉寂下来，资金遂转移到了债券市场。9•11 事件之后，以减息为主要手段的经济刺激政策造成了空前（而远非绝后）的低利率环境，使得定息产品的回报偏低。为了增加定息产品的吸引力，各式各样的利率衍生产品被业界创造出来并嵌入到标准债券中，金融衍生品市场因此又迎来了一个繁荣期。而为了追求更高的回报，在 2004 年前后，资金开始大量进入以公司债券和房屋贷款为基础的信用市场，并催生了以信贷违约风险掉期 [credit default swaps (CDS)] 和抵押债务责任票据 [collateralized debt obligation (CDO)] 为代表的信用风险衍生产品。伴随着美国房屋市场的大牛市，以房贷为基础的 CDO 市场迅速膨胀。在盲目乐观情绪的影响下，各色金融机构，包括房贷公司、投资银行、对冲基金、保险公司和评级公司都参与了这场盛宴。可是，这次真的玩过了。

美国的债券市场由各级政府债券、公司债券和房贷债券市场组成；房贷债券市场的总量又远高于另外两个市场的总和。在这次房屋市场的大牛市中，由于资金泛滥，房屋买家能轻易地获得贷款，其中包括不少没有偿付能力的买房者和信用欠佳的投机客。这些不良房贷（即所谓次贷）经过投资银行打包和证券化，变成了 CDO 并最终落到债券买家的手中。除此之外，市场还大量交易由 CDS 合成的 CDO。这些合成 CDO 凭空把房贷债券市场进一步扩充，风险当然也同步放大。为了抑制房屋市场的投机，美国联邦储备局于 04 年中开始加息，收紧银根；两年以后美国房价见顶，转而下跌。随着房价的下跌，次贷的还贷人纷纷断供，CDO 因现金流干枯而变得一钱不值，而合成 CDO 的价值也一同随之蒸发。信贷债券市场旋即发生崩溃，金融海啸发生（请参阅《纽约时报》专文“Credit Crisis — The Essentials”，2010 年 7 月 12 日）。由于持有大量的 CDO，许多金融机构面临灭顶之灾。如果不是山姆大叔出手搭救，它们都将加入雷曼兄弟的行列而陷入万劫不复的境地。一同被摧毁的当然还有美国的金融体系。

其实早在这次金融海啸以前，因投资衍生产品而引起的重大损失就不时发生过。最著名的当属 1998 年长期资本管理公司的倒闭事件 [2]。但是这些事件的规模都远不足以动摇金融体系，因此政府和民间也未曾对金融衍生产品的功用作出严肃的检讨。可是这次不同了。海啸发生后，金融衍生品甚至金融数学都成为众矢之的。有一个代表性的意见是：大部分的金融衍生品都是圈钱

但是，金融海啸再次暴露了金融数学的局限性：当危机来临的时候，为减低风险而做的投资多样化失效了；衍生产品的定价失误了，对冲失灵了；而风险管理系统则是大大低估了风险。事实上，目前几乎所有的数学模型都只是在正常而稳定的市场况下有效。

的玩意儿，是另类赌博，没有社会价值，应予限制甚至取缔；而金融数学则被认为是一个助纣为虐的学科。

这种批评意见似乎有一定的道理，但不免流于极端。它忽略了一个重要事实，就是金融海啸是由于对 CDO 产品的过度杠杆化即过度投机所引起的。平心而论，CDO 是众多衍生产品当中的佳作之一，它的定价模型虽不完善，但远不至于制造市场性的风险。而过度投机则不然。试想股指期货的交易量是现货交易量的十倍，市场又如何经得起一点风吹草动？事实上，在美国和各国政府介入并稳定了金融市场之后，金融界的首要工作就是去杠杆化。至于金融数学的各个模型，海啸过后则又继续生效。

但是，金融海啸再次暴露了金融数学的局限性：当危机来临的时候，为减低风险而做的投资多样化失效了；衍生产品的定价失误了，对冲失灵了；而风险管理系统则是大大低估了风险。事实上，目前几乎所有的数学模型都只是在正常而稳定的市况下有效。当市况出现急剧变化或危机的情况下，模型就很可能失效，而且还没有替代模型。试想，如果有数学模型帮助投资人安然度过危机，那还有危机吗？而如何减少和避免危机的出现，则是业界和金融监管当局共同的责任。奥巴马的金融改革法案最近在美国国会通过，表明发达国家从此次金融海啸中吸取了教训并做出了一些重要的变革。

现代金融业的一个重要特征就是衍生工具扮演了举足轻重的角色，这一特征并没有因为金融海啸的发生而改变。不少衍生产品在有效调配金融资源和控制风险方面有着重要价值。让我们举几个例子。股指期货、利率掉期和信贷违约风险掉期是分别用于股票、债券和信用风险市场的对冲工具。它的流通性高而成本低。如果没有这些衍生产品的话，股票、政府债券和公司债券市场的对冲将变得非常不方便，甚至于不可行。但是，并非所有衍生产品都有这种正面的价值。金融海啸荡涤了这个市场，淘汰了大量复杂的和缺乏透明度的衍生产品甚至投资陷阱，为今后金融市场的健康发展创造了空间。而金融数学也同样经历了一场洗礼。金融数学家不再热衷于奇异产品的制造和定价，不再沉迷于复杂的技巧，并开始更多地关心他们的理论研究是否能为市场带来正面的影响，以及所研究的产品是否能对投资人带来更佳的选择和更多的便利。

金融海啸的发生对我国的金融监管当局和业界也带来了重要的启示。第一是金融监管不能放松，不能迷信自由市场。在对外国金融机构和产品的开放方面依然应该遵守谨慎和渐进的原则；第二则是应大力加强金融人才的培养，使国家能够更有效地保护和利用本国的财富。在金融海啸期间，我国不少央企因对冲商品价格和外汇而蒙受重大损失[7]。在许多它们交易的合同中，要么风险与回报极不对称，要么定价极其不公平。这反映出我国企业界的金融从业人员对这些合同一知半解，以至于给他人带来可乘之机。类似的重大损失也同样发生在香港企业方面[8]。有鉴于此，在中港两地，金融工程都大有提升的空间，而金融数学的教学和研究则应继续受到重视和扶持。

参考文献

1. Black, F. and M. Scholes (1973). The Pricing of Options and Corporate Liabilities. Journal of Political Economy 81 (3): 637–654.
2. Lowenstein, R. (2000). When Genius Failed: The Rise and Fall of Long-Term Capital Management. Random House.
3. Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. The Journal of Finance 7 (1): 77–91.
4. Merton R.C. (1969). Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous time case, Rev. Econ. Stat. 51: 247–257.
5. Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation) 4 (1): 141–183.
6. Teitelbaum, R. (2008). The Code Breaker. Bloomberg Markets, January.
7. 黄明 (2008). 防范复杂衍生品陷阱。《财经》，10 月 27 日。
8. 李伟 (2009). 多家央企涉足金融衍生产品，巨亏 114 亿。《学习时报》，12 月 1 日。

作者介绍：

吴立昕，毕业于复旦大学数学系，加州洛杉矶大学博士，现为香港科技大学数学系教授，金融数学硕士课程主任。

爱因斯坦（图 1）强调了以上的科学家对理论物理的贡献；从图 2 至图 8 依次为：他的老师闵可夫斯基 (Hermann Minkowski)，他的同学和朋友马赛尔·格罗斯曼（Marcel Grossmann），德国数学家高斯 (Carl Gauss)、黎曼 (Bernhard Riemann)、克里斯托费尔（Elwin Christoffel），意大利数学家里奇（Gregorio Ricci-Curbastro）和列维 - 齐维塔（Tullio Levi-Civita）。

爱因斯坦
谈数学对他创立广义相对论的影响

蒋迅

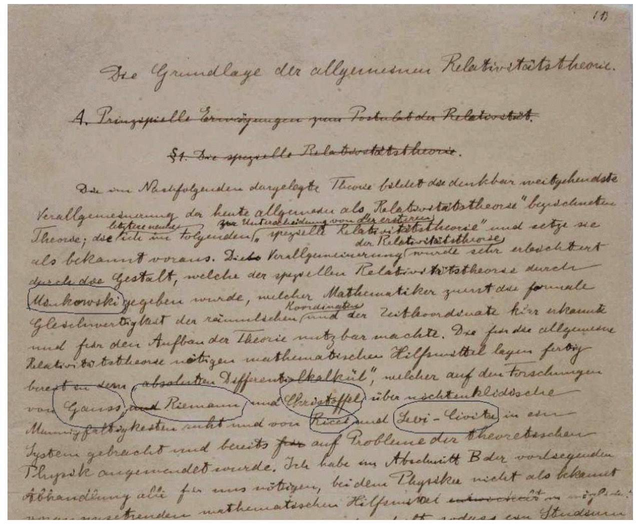
《数学文化》季刊第一卷第三期刊登了一篇 ukim 的文章：《关于广义相对论的数学理论》，介绍了广义相对论的数学背景以及关于数学家对黑洞形成机制研究的历史。数学无疑对爱因斯坦创立广义相对论起到了至关重要的作用。但令人奇怪的是，在爱因斯坦的论文里并没有提到数学家对他的影响。这是为什么呢？难道爱因斯坦出于什么原因忽略了数学家们的贡献？

《美国数学通讯》2009 年第 1 期有一篇阿丽西娅·迪克斯坦 (Alicia Dickenstein) 的文章“A Hidden Praise of Mathematics”揭示了其中的秘密。原来其中的奥妙似乎并不复杂，本来爱因斯坦在第一页就表达了数学家对他的工作的重要性，但是这一页在从德文翻译成英文时由于某种未知原因而漏掉了，而英文是实际上的世界语言，于是给人以一个错误的假象：爱因斯坦在发表广义相对论时没有提到数学家们的贡献。现在，笔者特意把缺失的一页附在这篇短文里，希望它能让中国的数学家（还有物理学家）们也了解一点这段历史。

下面就是漏掉的一页的英文稿：

The theory which is presented in the following pages conceivably constitutes the farthest-reaching generalization of a theory which, today, is generally called the "theory of relativity"; I will call the latter one — in order to distinguish it from the first named — the "special theory of relativity," which I assume to be known. The generalization of the theory of relativity has been facilitated considerably by Minkowski, a mathematician who was the first one to recognize the formal equivalence of space coordinates and the time coordinate, and utilized this in the construction of the theory. The mathematical tools that are necessary for general relativity were readily available in the "absolute differential calculus," which is based upon the research on non-Euclidean manifolds by Gauss, Riemann, and Christoffel, and which has been systematized by Ricci and Levi-Civita and has already been applied to problems of theoretical physics. In section B of the present paper I developed all the necessary mathematical tools — which cannot be assumed to be known to every physicist — and I tried to do it in as simple and transparent a manner as possible, so that a special study of the mathematical literature is not required for the understanding of the present paper. Finally, I want to acknowledge gratefully my friend, the mathematician Grossmann, whose help not only saved me the effort of studying the pertinent mathematical literature, but who also helped me in my search for the field equations of gravitation.

在这一段里，爱因斯坦清楚地指出，是数学家、他的老师闵可夫斯基 (Hermann Minkowski) 最先有了四维时空的思想。虽然闵可夫斯基是爱因斯坦的老师，但是爱因斯坦经常旷课。闵可夫斯基曾经感慨地说，"噢，爱因斯坦，总是不来上课——我真的想不到他能有这样的作为。"事实上，爱因斯坦不是一开始就重视闵可夫斯基的四维时空概念的。他说，"既然数学家们已经开始要攻克相对论理论了，我自己就不再理睬它了。"但是这个观点很快就得到了纠正。这多亏了他的朋友和同学马赛尔 • 格罗斯曼 (Marcel Grossmann)。爱因斯坦在格罗斯曼的帮助下，寻求表现自己思想的数学工具，正是格罗斯曼向爱因斯坦强调了非欧几何的重要性。所以，爱因斯坦最后还特别提到了他。爱因斯坦也指出了德国数学家高斯 (Carl Gauss)、黎曼 (Bernhard Riemann)、克里斯托费尔 (Elwin Christoffel)，以及意大利数学家里奇 (Gregorio Ricci-Curbastro)、列维 - 齐维塔 (Tullio Levi-Civita) 的工作对理论物理的重要性。他说，正是很久以前的数学家们从形式上解决的问题使得物理学家们得出了相对论的命题。这话一点不假。爱因斯坦描述广义相对论，用到的数学就是弯曲空间上的几何学，列维 - 齐维塔在这种几何学上做出了突出的贡献。所以，有人问爱因斯坦他最喜欢意大利的什么，他回答是意大利的细条实心面和列维 - 齐维塔。

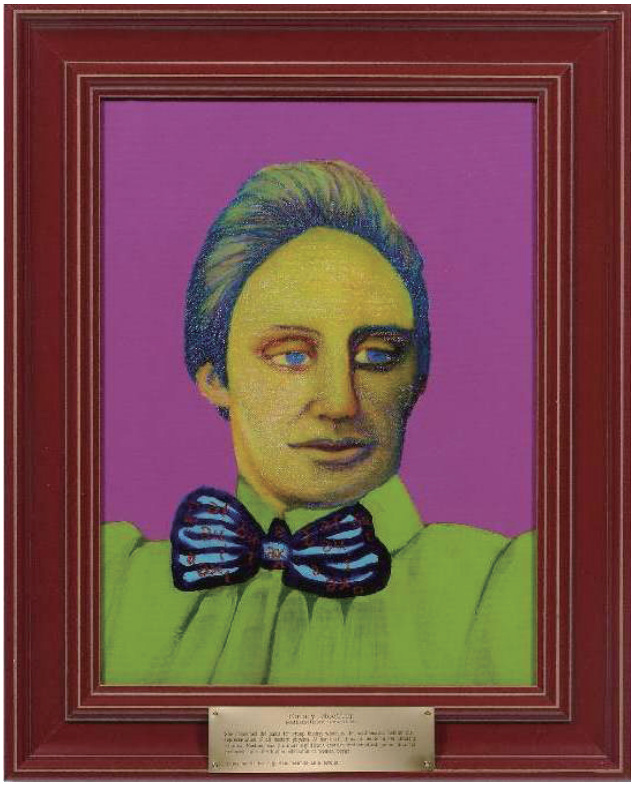


爱因斯坦在取得广义相对论的论文手稿复印件第一页（部分）

不过，在这一页手稿里，爱因斯坦确实没有提到希尔伯特 (David Hilbert)。而正是希尔伯特在爱因斯坦之前的第五天也向普鲁士科学院递上了一份关于引力学的手稿。所以关于广义相对论，希尔伯特和爱因斯坦的优先发明权也有争议。不过这个争吵也不复杂。首先，是爱因斯坦到哥廷根去给希尔伯特等很多数学家做的报告；其次，希尔伯特表现出了高姿态，他说，"发现相对论的，是作为物理学家的爱因斯坦，而不是数学家"；再者，后来发现的一些新材料似乎对希尔伯特不利。因为他是编辑，对文章发表有些控制。尽管如此，还是有一些人仍把广义相对论的作用量称作爱因斯坦－希尔伯特作用量。

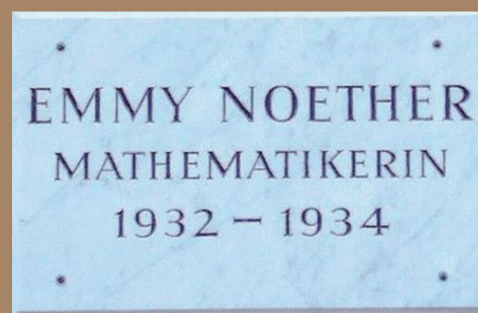
在发表了这篇重要的论文之后，爱因斯坦又从德国女数学家埃米 • 诺特 (Emmy Noether) 在 1918 年发表的关于不变量理论 (Invariant theory) 的论文中受到了启发。一些广义相对论的新概念就是根据诺特定理得到的。爱因斯坦对于哥廷根歧视诺特很看不惯。1935 年，诺特去世的时候（才 53 岁），爱因斯坦写了一个悼词。他写到："纵观现在的数学家，诺特是最显著的具有创造性的数学天才。"

还有两位数学家也许应该提到：鲍耶 • 亚诺什 (Jonas



埃米•诺特 (1882-1935) 是二十一世纪初最著名的数学家；她对数学和理论物理都作出了杰出的贡献。

非欧几何创始人匈牙利数学家亚诺什 (1802-1860) 和俄国数学家罗巴切夫斯基 (1792-1856)



哥廷根城市里诺特的故居；她在这里住了三年。

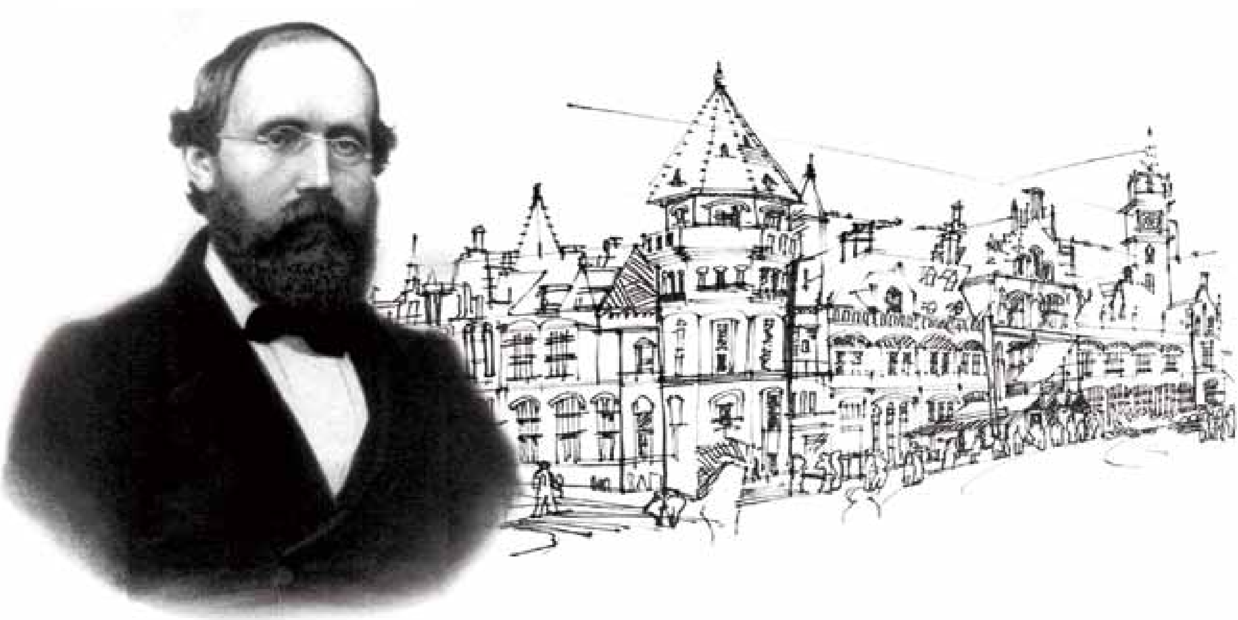
Bolyai) 和尼古拉•罗巴切夫斯基 (Nicolas Loachevski)，因为他们分别独立地创立了非欧几何 (Non-Euclidean geometry) 框架。鲍耶的论文过于简短，高斯在知道他的工作后也没有声张；罗巴切夫斯基又在科学研究中心以外的俄国，结果他们的结果没有被广泛认识。到 1868 年，意大利数学家犹金尼奥•贝尔特拉米 (Eugenio Beltrami) 发表了论文《非欧几何的解释》中指出罗巴切夫斯基和鲍耶创立的双曲几何可以在伪球面上实现，非欧几何才逐渐被关注起来。

对于爱因斯坦和数学家的关系、引力场和数学的关系，ukim 的文章已经写得很详细了，本文不再重复。事实上，ukim 对近年来数学家在爱因斯坦的重力场方程的进展也做了详细的介绍，实为不可多得的精彩文章。

但是这第一页到底是怎么漏掉的呢？这至今仍然是一个谜。有一种猜测是，这篇重要文章后来被收进了一个德文的爱因斯坦论文集里，而英文版是从这个论文集里开始翻译的。偏偏在这个论文集里，这篇文章的第一页遗失了。这有可能是因为打字员拿到的原文副本装订不紧，把第一页丢掉了。似乎爱因斯坦从未意识到他对数学家的感谢之词失踪，所以他从未做过解释。这些都是猜测。这些猜测的原因在迪克斯坦的文章里有讲到。好在这一页终于被发现了，尽管花了这么多年的时间。

总之，爱因斯坦在建立广义相对论的过程中，直接和间接地使用了当时的最新数学成果。这一点得到了爱因斯坦的承认，也为后世所公认。新发现的这一页为爱因斯坦还了一个公正。

Riemann



黎曼猜想漫谈(二)

卢昌海

6 错钓的大鱼

在黎曼的论文发表后的最初二三十年里，他所开辟的这一领域显得十分冷清，没有出现任何重大进展。如果把黎曼论文的全部内涵比做一座山峰的话，那么在最初这二三十年里数学家们还只在从山脚往半山腰攀登的路上，只顾星夜兼程、埋头赶路。那高耸入云的山颠还笼罩在一片浓浓的雾霭之中，正所谓高处不胜寒。但到了 1885 年，在这场沉闷的登山之旅中却爆出了一段惊人的插曲：有人忽然声称自己已经登顶归来！

这个人叫做斯蒂尔吉斯 (Thomas Stieltjes，1856-1894)，是一位荷兰数学家。1885 年，这位当时年方 29 岁的年青数学家在巴黎科学院发表了一份简报，声称自己证明了以下结果：

$$M(N) \equiv \sum_{n<N} \mu(n) = O\left(N^{1/2}\right)$$

这里的 $\mu(n)$ 是我们在第四节末尾提到过的莫比乌斯函数，由它的求和所给出的函数 $M(N)$ 被称为梅坦斯函数。这个命题看上去倒是面善得很：$\mu(n)$ 不过是一个整数函数，其定义虽有些琐碎，却也并不复杂，而 $M(N)$ 不过是对 $\mu(n)$ 的求和，证明它按照 $O(N^{1/2})$ 增长似乎不象是一件太困难的事情。但这个其貌不扬的命题事实上却是一个比黎曼猜想更强的结果！换句话说，证明了上述命题就等于证明了黎曼猜想（但反过来则不然，否证了上述命题并不等于否证了黎曼猜想）。因此斯蒂尔吉斯的简报等于是声称自己证明了黎曼猜想。

Riemann

斯蒂尔吉斯 (Thomas Stieltjes，1856-1894)，荷兰数学家

虽然当时黎曼猜想还远没有象今天这么热门，消息传得也远没有象今天这么飞快，但有人证明了黎曼猜想仍是一个非同小可的消息。别的不说，证明了黎曼猜想就等于证明了素数定理，而后者自高斯等人提出以来折磨数学家们已近一个世纪之久，却仍未能得到证明。与在巴黎科学院发表简报几乎同时，斯蒂尔吉斯给当时法国数学界的一位重量级人物厄米特 (Charles Hermite，1822-1901) 发去了一封信，重复了这一声明。但无论在简报还是在信件中斯蒂尔吉斯都没有给出证明，他说自己的证明太复杂，需要简化。

换作是在今天，一位年青数学家开出这样一张空头支票，是很难引起数学界的任何反响的。但是十九世纪的情况有所不同，因为当时学术界常有科学家做出成果却不公布（或只公布一个结果）的事，高斯和黎曼都是此道中人。因此象斯蒂尔吉斯那样声称自己证明了黎曼猜想，却不给出具体证明，在当时并不算离奇。学术界的反应多少有点象现代法庭所奉行的无罪推定原则，即在出现相反的证据之前倾向于相信声明成立。

但是相信归相信，数学当然是离不开证明的。因此大家就期待着斯蒂尔吉斯发表具体的证明，其中期待得最诚心实意的当属接到斯蒂尔吉斯来信的厄米特。厄米特自 1882 年起就与斯蒂尔吉斯保持着通信关系，直至十二年后斯蒂尔吉斯过早去世为止。在这期间两人共交换了 432 封信件。厄米特是当时复变函数论的大家之一，他与斯蒂尔吉斯的关系堪称数学史上一个比较奇特的现象。斯蒂尔吉斯刚与厄米特通信时只是莱顿天文台的一名助理，而且就连这个助理的职位还是靠了他父亲（斯蒂尔吉斯的父亲是荷兰著名的工程师兼国会成员）的关照才获得的。在此之前他在大学里曾三度考试失败。好不容易进了天文台，斯蒂尔吉斯却“身在曹营心在汉”，干着天文观测的活，心里惦记的却是数学，并且给厄米特写了信。照说当时一无学位、二无名声的斯蒂尔吉斯要引起象厄米特这样的数学元老的重视并不容易，但厄米特是一位虔诚的天主教徒，他恰巧对数学怀有一种奇特的信仰，他相信数学存在是一种超自然的东西，寻常的数学家只是偶尔才有机会了解数学的奥秘。那么什么样的人能比“寻常的数学家”更有机会了解数学的奥秘呢？厄米特凭着自己的神秘主义眼光找到了一位，那就是默默无闻的观星之人斯蒂尔吉斯。厄米特认为斯蒂尔吉斯具有上帝所赐的窥视数学奥秘的眼光，他对之充满了信任。在他与斯蒂尔吉斯的通信中甚至出现了“你总是对的，我总是错的”这样极端的赞许。在这种奇特信仰与十九世纪数学氛围的共同影响下，厄米特对斯蒂尔吉斯关于黎曼猜想的声明深信不疑。

但是无论厄米特如何催促，斯蒂尔吉斯始终没有

厄米特 (Charles Hermite，1822-1901)，法国数学家

Riemann

公布他的完整证明。一转眼五年过去了，厄米特对斯蒂尔吉斯依然“痴心不改”，他决定向对方“诱之以利”。在厄米特提议下，法国科学院将1890年数学大奖的主题设为“确定小于给定数值的素数个数”。在厄米特看来，这个大奖将毫无悬念地落到他的朋友斯蒂尔吉斯的腰包里，因为这个大奖主题实质上就是证明素数定理，这比黎曼猜想弱得多。可惜直至大奖截止日期终了，斯蒂尔吉斯依然毫无动静。

但是厄米特也没有完全失望，因为他的学生哈达马（Jacques Hadamard，1865-1963）提交了一篇论文，领走了大奖——肥水总算没有流入外人田。哈达马论文的主要内容正是我们在上节中提到的对黎曼论文中连乘积公式的证明。这一论文虽然离素数定理的证明还有一段距离，却已足可获得大奖。几年之后，哈达马再接再励，终于一举证明了素数定理。厄米特放出去的这根长线虽没能如愿钓到斯蒂尔吉斯及黎曼猜想，却错钓上了哈达马及素数定理，斩获亦是颇为丰厚（素数定理的证明在当时其实比黎曼猜想的证明更令数学界期待）。

那么斯蒂尔吉斯呢？ 没听过这个名字的读者可能会觉得他是一个浮夸无为的家伙，事实却不然。斯蒂尔吉斯在分析与数论的许多方面都做出过重要的贡献。他在连分数方面的研究为他赢得了“连分数分析之父”的美誉，以他名字命名的斯蒂尔吉斯积分更是声名远播。但他那份哈代电报式的有关黎曼猜想的声明却终究没能为他赢得永久的悬念。

现在数学家们普遍认为斯蒂尔吉斯关于 $M(N)=O(N^{1/2})$ 的证明是错误的，不仅如此，甚至连命题 $M(N)=O(N^{1/2})$ 本身是否成立也已经受到了越来越多的怀疑。这是因为比 $M(N)=O(N^{1/2})$ 稍强、被称为梅滕斯 (Mertens) 猜想的命题：$M(N)<N^{1/2}$ 已于1985年被 Andrew Odlyzko 与 Herman te Riele 所否证。受此影响，目前数学家们倾向于认为 $M(N)=O(N^{1/2})$ 也并不成立，不过到目前为止还没人能够证明 (或否证) 这一点。

7 从零点分布到素数定理

素数定理自高斯与勒让德以经验公式的形式提出（详见第三节）以来，许多数学家对此做过研究。其中比较重要的结果是由俄国数学家切比雪夫 (Pafnuty Chebyshev，1821-1894) 做出的。早在1850年，切比雪夫就证明了对于足够大的 x，素数分布 $\pi(x)$ 与素数定理给出的分布 $\mathrm{Li}(x)$ 之间的相对误差不超过11%。比这更早一些，切比雪夫还证明了：如果 $\lim_{x\to\infty}\{\pi(x)/[x/\ln(x)]\}$ 存在，它必定等于1。切比雪夫的研究对于黎曼的工作及后来人们对素数定理的证明都有影响。

但在黎曼1859年的工作以前，数学家们对素数定理的研究主要局限在实数域中。从这个意义上讲，即使撇开具体的结果不论，黎曼建立在复变函数基础上的工作仅就其方法而言，也是对素数研究的一个重大突破。这一方法上的突破为素数定理的最终证明铺平了道路。

在第五节的末尾我们曾经提到，黎曼对素数分布的研究之所以没能直接成为素数定理的证明，是因为人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布还知道得太少。那么为了证明素数定理，我们起码要知道多少有关非平凡零点分布的信息呢？这一点到了1895年随着曼戈尔特 (Hans Carl Friedrich von Mangoldt，1854-1925) 对黎曼论文的深入研究而变得明朗起来。曼戈尔特的工作我们在第五节中已经提到过，正是他最终证明了黎曼关于 $J(x)$ 的公式。但是曼戈尔特工作的价值比仅仅证明黎曼关于 $J(x)$ 的公式要深远得多。在他的研究中使用了一个比黎曼的 $J(x)$ 更简单有效的辅助函数 $\Psi(x)$，它的定义为：

$$\Psi(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n)$$

其中 $\Lambda(n)$ 被称为曼戈尔特函数，它对于 $n=p^k$ (p 为素数，k 为自然数) 取值为 $\ln(p)$；对于其它 n 取值为0。运用 $\Psi(x)$，曼戈尔特证明了一个本质上与黎曼关于 $J(x)$ 的公式等价的公式：

$$\Psi(x)=x-\sum_{\rho}\left(\frac{x^{\rho}}{\rho}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^{-2}\right)-\ln(2\pi)$$

其中有关 ρ 的求和与黎曼的 $J(x)$ 中的求和一样，也是先将 ρ 与 $1-\rho$ 配对，再依 $\mathrm{Im}(\rho)$ 从小到大的顺序进行。

注 7.1

比这更早一些，切比雪夫还证明了：如果 $\lim_{x\to\infty}\{\pi(x)/[x/\ln(x)]\}$ 存在，它必定等于1。切比雪夫的研究对于黎曼的工作及后来人们对素数定理的证明都有影响。

Riemann

很明显，曼戈尔特的 $\Psi(x)$ 表达式比黎曼的 $J(x)$ 简单多了。时至今日，$\Psi(x)$ 在解析数论的研究中差不多已完全取代了黎曼的 $J(x)$。引进 $\Psi(x)$ 的另一个重大好处是早在几年前，上文提到的切比雪夫就已经证明了：素数定理 $\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x)$ 等价于 $\Psi(x)\sim x$（为了纪念切比雪夫的贡献，曼戈尔特函数也被称为第二切比雪夫函数）。

将这一点与曼戈尔特的 $\Psi(x)$ 表达式联系在一起，不难看到素数定理成立的条件是 $\lim_{x\to\infty}\Sigma_\rho(x^{\rho-1}/\rho)=0$。但是要让 $x^{\rho-1}$ 趋于零，$\mathrm{Re}(\rho)$ 必须小于 1。换句话说黎曼 ζ 函数在直线 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上必须没有非平凡零点。这就是我们为证明素数定理而必须知道的有关黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的信息（不过由于所处理的是无穷级数，严格的证明并不如我们叙述的那样简单）。由于黎曼 ζ 函数的非平凡零点是以 ρ 与 $1-\rho$ 成对的方式出现的，因此这一信息也等价于 $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$。

读者们大概还记得，在第五节中我们曾经证明过黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于 $0\le\mathrm{Re}(s)\le1$ 的区域内。因此为了证明素数定理，我们所需知道的有关非平凡零点分布的信息要比我们已知的 (也是当时数学家们已知的) 略多一些（但仍大大少于黎曼猜想所要求的）。这样，在经过了切比雪夫、黎曼、哈达马和曼戈尔特等人的卓越努力之后，我们离素数定理的证明终于只剩下了最后一小步：即把已知的零点分布规律中那个小小的等号去掉。这也正是我们在第五节中提到的黎曼在计算 $J(x)$ 的过程中对与零点有关的级数进行单项积分时隐含的条件。这一小步虽也绝非轻而易举，却已难不住在黎曼峰上攀登了三十几个年头，为素数定理完整证明的到来等待了一个世纪的数学家们。

曼戈尔特的结果发表的第二年（1896 年），上节提到的哈达马与比利时数学家 Charles de la Vallée-Poussin 就几乎同时独立地给出了证明，从而完成了自高斯以来数学界的一个重大心愿。那时斯蒂尔吉斯已经去世两年了。即便如此，哈达马在发表他的结果时仍然谦虚地写道，他之所以发表有关黎曼 ζ 函数在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上没有零点的证明，是因为斯蒂尔吉斯有关半平面 $\mathrm{Re}(s)>1/2$ 上没有零点的证明尚未发表，并且那一证明可能要困难得多。

经过素数定理的证明，人们对于黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的了解又推进了一步，那就是：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ 的区域内。在黎曼猜想的研究中数学家们把这个区域称为 critical strip。

素数定理的证明——尤其是以一种与黎曼的论文如此密切相关的方式所实现的证明——让数学界把更多的注意力放到了黎曼猜想上来。四年后（1900 年）的一个夏日，两百多位当时最杰出的数学家会聚到了巴黎，一位 38 岁的德国数学家走上了讲台，做了一次永载数学史册的伟大演讲。演讲的题目叫做“数学问题”，演讲者的名字叫做希尔伯特 (David Hilbert，1862-1943)，他恰好来自高斯与黎曼的学术故乡——群星璀灿的哥廷根 (Göttingen) 大学。他是哥廷根数学精神的伟大继承者，一位与高斯及黎曼齐名的数学巨匠。希尔伯特在演讲稿中列出了二十三个对后世产生深远影响的数学问题，黎曼猜想被列为其中第八个问题的一部分，从此成为整个数学界瞩目的难题之一。

二十世纪的数学大幕在希尔伯特的演讲声中徐徐拉开，黎曼猜想也迎来了一段新的百年征程。

8 零点在哪里？

随着黎曼论文中的外围命题——那些被黎曼随手写下却没有予以证明的命题——逐一得到证明，随着素数定理的攻克，也随着希尔伯特演讲的聚焦作用的显现，数学界终于把注意力渐渐投向了黎曼猜想本身，投向了那座巍峨的主峰。

不知读者们有没有注意到，我们谈了这么久的黎曼 ζ 函数，谈了那么久的 ζ 函数的非平凡零点，却始终没有谈及过任何一个具体的非平凡零点。这也是黎曼论文本身一个令人瞩目的特点：即它除了没有给所涉及的许多命题提供证明外，也没有给所提出的猜想提供数值计算方面的支持。黎曼叙述了许多有关 ζ 函数非平凡零点的命题（比如第五节中提到的三大命题），却没有给出任何一个非平凡零点的数值！

倘若那些非平凡零点是容易计算的，倒也罢了，可是就象被黎曼省略掉的那些命题个个都令人头疼一样，黎曼 ζ 函数的那些非平凡零点也个个都不是省油的灯。

它们究竟在哪里呢？

直到 1903 年（即黎曼的论文发表后的第 44 个

年头），丹麦数学家个格拉姆 (Jørgen Gram，1850-1916) 才首次公布了对黎曼 ζ 函数前 15 个零点的计算结果。由于黎曼 ζ 函数在上半复平面与下半复平面的非平凡零点是一一对应的（请读者自己证明），因此在讨论时只考虑虚部大于零的零点。我们把这些零点以虚部大小为序排列，所谓“前 15 个零点”指的是虚部最小的 15 个零点。

在这 15 个零点中，格拉姆对前 10 个零点计算到了小数点后第六位，而后 5 个零点——由于计算繁复程度的增加——只计算到了小数点后第一位。为了让读者对黎曼 ζ 函数的非平凡零点有一个具体的印象，我们把这 15 个零点列在下面。与此同时，我们也列出了这 15 个零点的现代计算值（保留到小数点后第七位），以便大家了解格拉姆计算的精度：

零点序号	格拉姆的零点数值	现代数值
1	1/2 + 14.134725 i	1/2 + 14.1347251 i
2	1/2 + 21.022040 i	1/2 + 21.0220396 i
3	1/2 + 25.010856 i	1/2 + 25.0108575 i
4	1/2 + 30.424878 i	1/2 + 30.4248761 i
5	1/2 + 32.935057 i	1/2 + 32.9350615 i
6	1/2 + 37.586176 i	1/2 + 37.5861781 i
7	1/2 + 40.918720 i	1/2 + 40.9187190 i
8	1/2 + 43.327073 i	1/2 + 43.3270732 i
9	1/2 + 48.005150 i	1/2 + 48.0051508 i
10	1/2 + 49.773832 i	1/2 + 49.7738324 i
11	1/2 + 52.8 i	1/2 + 52.9703214 i
12	1/2 + 56.4 i	1/2 + 56.4462476 i
13	1/2 + 59.4 i	1/2 + 59.3470440 i
14	1/2 + 61.0 i	1/2 + 60.8317785 i
15	1/2 + 65.0 i	1/2 + 65.1125440 i

几十年来，这是数学家们第一次拨开迷雾实实在在地看到黎曼 ζ 函数的非平凡零点，看到那些蕴涵着素数分布规律的神秘家伙。它们都乖乖地躺在四十四年前黎曼划出的那条奇异的 critical line 上。格拉姆的计算使用的是十八世纪三十年代发展起来的欧拉 - 麦克劳林 (Euler-Maclaurin) 公式。欧拉 - 麦克劳林公式为：

$$\sum_{k=m}^{n} f_k = \int_m^n f(k)\,dk + \frac{1}{2}\left[f(m)+f(n)\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(n)-f^{(2j-1)}(m)\right]$$

其中 B_{2k} 为伯努利 (Bernoulli) 数 ($B_2=1/6$，$B_4=-1/30$，$B_6=1/42$，…)。欧拉 - 麦克劳林公式的成立对 $f(k)$ 有一定的要求。

在只有纸和笔的年代里，这种计算是极其困难的，格拉姆用了好几年的时间才完成对这 15 个零点的计算。但即便付出如此多的时间，付出极大的艰辛，他在后五个零点的计算精度上仍不得不有所放弃。

在格拉姆之后，R. J. Backlund 于 1914 年把对零点的计算推进到了前 79 个零点。再往后，经过哈代 (Godfrey Hardy，1877-1947)、李特尔伍德 (John Littlewood，1885-1977) 及 Hutchinson 等人的努力（包括计算方法上的一些改进），到了 1925 年，人们已经知道了前 138 个零点的位置，它们都位于黎曼猜想所预言的 critical line 上。但是到了这个时候，建立在欧拉 - 麦克劳林 (Euler-Maclaurin) 公式之上的计算已经复杂到了几乎难以逾越的程度。

9 黎曼的手稿

随着数学界对黎曼猜想兴趣的日益增加，这个猜想的难度也日益显露了出来。当越来越多的数学家在高不可测的黎曼猜想面前遭受挫折的时候，其中的一些开始流露出对黎曼 1859 年论文的一些不满之意。我们在上面提到，黎曼的论文既没有对它所提到的许多命题给予证明，又没有给出哪怕一个 ζ 函数非平凡零点的数值。尽管黎曼在数学界享有崇高的声誉，尽管此前几十年里人们通过对他论文的研究一再证实了他的卓越见解。但在攀登主峰的尝试屡遭受挫折，计算零点的努力又举步维艰的情况下，对黎曼的怀疑终于还是无可避免地出现了。

于是在承认黎曼的论文为“最杰出及富有成果的论文”之后，艾德蒙 • 朗道 (Edmund Landau，1877-1938) 开始表示：“黎曼的公式远不是数论中最重要的东西，他不过是创造了一些在改进之后有可能证明许多其它结果的工具”；于是在为证明黎曼猜想度过一段“苦日子”之后李特尔伍德开始表示：“假如我们能够坚定地相信这个猜想是错误的，日子会过得更舒适些”；于是就连胆敢用黎曼猜想跟上帝耍计谋的哈代也开始认为黎曼有关零点的猜测只不过是个猜测而已，nothing more。“Nothing more”的意思便是纯

Riemann

哥廷根大学全貌

属猜测，没有任何计算及证明依据。换句话说数学家们开始认为黎曼论文中的一切大致也就是他在这一论题上所做过的一切，他的猜想其依据的只是直觉，而非证据。

那么黎曼猜想究竟只是凭借直觉呢还是有着其它的依据？黎曼的论文究竟是不是他在这方面的全部研究呢？ 既然黎曼的论文本身没有为这些问题提供线索，答案自然就只能到他的手稿中去寻找了。

我们曾经提到，在黎曼那个时代许多数学家公开发表的东西往往只是他们所做研究的很小一部分，因此他们的手稿及信件就成为了科学界极为珍贵的财富。这种珍贵绝不是因为如今人们习以为常的那种名人用品的庸俗商业价值，而是在于其巨大的学术价值。因为通过它们，人们不仅可以透视那些伟大先辈们的“Beautiful Mind”，更可以挖掘他们未曾发表过的研究成果，那是一种无上的宝藏。

不幸的是，黎曼手稿的很大一部分却在他去世之后被他可恶的管家付之了一炬，只有一小部分被他妻子爱丽丝 (Elise Koch) 抢救了出来。爱丽丝把那些劫后余生的数学手稿大部分交给了黎曼生前的挚友、数学家戴德金 (Richard Dedekind，1831-1916)。但是几年之后，爱丽丝又后悔了，因为她觉得那些数学手稿中还夹带着一些私人及家庭的信息，于是她向戴德金索回了一部分手稿。在这部分手稿中，有许多几乎通篇都是数学，只在其中夹带了极少量的私人信息，比如一位朋友的姓名等，其中更有一本小册子是黎曼 1860 年春天在巴黎时的记录。那正是他发表有关黎曼猜想的论文后的几个月。那几个月巴黎的天气十分糟糕，很多时候黎曼都待在住所里研究数学。许多人猜测，在那段时间里黎曼所思考的很可能与他几个月前研究的黎曼 ζ 函数有关联，因此那本被爱丽丝索回的小册子中很可能记录了与黎曼猜想有关的一些想法。可惜那本数学家们非常渴望获得的小册子从此就再也没有出现过，直到今天，它的去向依然是一个谜。有人说它曾被德国数学及数学史学家贝塞尔 - 哈根 (Erich Bessel-Hagen，1898-1946) 获得过，但是贝塞尔 - 哈根死于二战后的混乱年月中，他的遗物始终没有被人找到过。

那些有幸躲过管家的火把、又没有被爱丽丝索回的手稿，戴德金将它们留在了哥廷根大学图书馆，那

就是数学家和数学史学家们可以看到的黎曼的全部手稿 (Nachlass)。

自黎曼的手稿存放在哥廷根大学图书馆以来，陆续有一些数学家及数学史学家前去研究。但是只要想一想黎曼正式发表的有关黎曼猜想的论文尚且如此艰深，就不难想象研读他那些天马行空、诸般论题混杂、满篇公式却几乎没有半点文字说明的手稿该是一件多么困难的事情。许多人满怀希望而来，却又两手空空、黯然失望而去。

黎曼的手稿就象一本高明的密码本，牢牢守护着这位伟大数学家的思维奥秘。

但是到了 1932 年，终于有一位数学家从那些天书般的手稿中获得了重大的发现！这一发现一举粉碎了那些认为黎曼的论文只有直觉而无证据的猜测，并对黎曼 ζ 函数非平凡零点的计算方法产生了脱胎换骨般的影响，让在第 138 个零点附近停滞多年的 Euler-Maclaurin 方法相形见绌。这一发现也将它的发现者的名字与伟大的黎曼联系在了一起，从此不朽。

这位破解天书的发现者叫做西格尔 (Carl Siegel，1896-1981)，他是黎曼的同胞——一位德国数学家。

10 探求天书

西格尔是一位非常反战的德国人，早年曾因拒服兵役而遭拘压，幸亏朗道的父亲出面帮助才得重归自由。他曾计划在柏林学习天文学，因为天文学是看上去最远离战争的学科。但是入学那年的天文学课程开得较晚，为了打发时光，他去听了弗罗贝尼乌斯 (Georg Frobenius，1849-1917) 的数学课，这一听很快改变了他的人生旅途，他最终成为了一名数学家。

西格尔 (Carl Siegel, 1896-1981)，德国数学家

西格尔于 1919 年来到哥廷根，跟随朗道研究数论。当时希尔伯特的二十三个数学问题已经非常出名，而朗道本人对黎曼猜想也颇有研究，在这种环境的影响下，西格尔也开始了对黎曼猜想——希尔伯特第八问题的一部分——的研究。他对黎曼猜想的一些想法得到了希尔伯特本人的赏识，在希尔伯特的支持下，西格尔于 1922 年获得了法兰克福大学的教职。

但尽管如此，西格尔对黎曼猜想的研究并没有取得突破性的进展。正当他为此苦恼的时候，一封来自数学及数学史学家贝塞尔 - 哈根的信寄到了他的案头。贝塞尔 - 哈根当时正在研究黎曼的手稿，但和西格尔研究黎曼猜想一样苦苦得不到进展。由于贝塞尔 - 哈根自身的背景侧重于数学史，对于破解黎曼的手稿来说这样的背景显然还嫌不够，于是他想邀请纯数学家来试试，看看他们是否能有所突破。哥廷根的数学家中对黎曼猜想感兴趣的当首推希尔伯特和朗道，但这两位都是大师级的人物，贝塞尔 - 哈根自不敢贸然相扰，于是他把目光投向了正在研究黎曼猜想的西格尔，邀请他来研究黎曼的手稿。

对西格尔来说贝塞尔 - 哈根的邀请不失为一个散心的机会。另一方面，如我们在上节所说，当时数学界对黎曼及其猜想的怀疑已经开始蔓延，这种氛围也影响到了哥廷根，黎曼是不是真的只凭直觉提出他的猜想？ 这也是西格尔有意一探究竟的谜团。于是西格尔写信向哥廷根图书馆索来了黎曼的手稿。

当那位已被岁月涂抹成只凭直觉研究数学的前辈宗师的手稿终于出现在西格尔眼前的时候，他不由地想起了高斯爱说的一句话：工匠总是会在建筑完成后把脚手架拆除的。现在他所看到的正是一位最伟大工匠的脚手架，任何人只要看上一眼就绝不会再相信那些有关黎曼只凭直觉研究数学的传言。只可惜那些散布传言的数学家们——包括与黎曼手稿近在咫尺的睿智的哥廷根数学家们——竟然谁也没有费心来看一眼这些凝聚着无比智慧的手稿！

在黎曼的手稿中，西格尔发现了黎曼论文中只字未提的黎曼 ζ 函数的前三个零点的数值！（后来的一

Riemann

哥廷根大学数学系

些数学史学家甚至认为，黎曼可能计算过多达 20 个零点。）很显然，这表明黎曼的论文背后是有着计算背景的。黎曼的这一计算比我们在第八节中提到的格拉姆的计算早了 44 年。这倒也罢了，因为格拉姆对零点的计算虽比黎曼的晚，但精度却比黎曼的高得多。但是西格尔对黎曼计算零点的方法进行了细致的整理研究，却吃惊地发现黎曼所用的方法不仅远远胜过了格拉姆所用的欧拉 - 麦克劳林公式，也远远胜过了哈代和李特尔伍德对欧拉 - 麦克劳林公式的改进。一句话，黎曼用来计算零点的方法远远胜过了数学界已知的任何方法！当时已是 1932 年，距离黎曼猜想的提出已有 73 个年头，距离黎曼逝世也已有 66 个年头，黎曼又一次跨越时间远远地走到了整个数学界的前面。而且黎曼的这一公式是如此的复杂[注 10.1]，有些数学家甚至认为假如不是西格尔把它从黎曼的手稿中整理出来的话，也许直到今天，数学家们都无法独立地发现它。

西格尔在整理这一公式上的功绩和所付出的辛劳是怎么评价也不过分的，如我们在上节中所说，黎曼的手稿上诸般论题混杂、满篇公式却几乎没有半点文字说明。而且黎曼晚年的生活很不宽裕，用纸十分节约，每张稿纸的角角落落都写满了东西，使得整个手稿更显混乱。再加上黎曼所写的那些东西本身的艰深。西格尔能从中整理出如此复杂的公式对数学界实是功不可没，为了表达对西格尔工作的敬意，数学家们把这一公式称为黎曼 - 西格尔公式。黎曼若泉下有知，也当乐见他的这位后辈同胞的名字通过这一公式与自己联系在一起，因为在这之后，再也没有人会怀疑他论文背后的运算背景了。

发表于 1932 年的黎曼 - 西格尔公式是哥廷根数学辉煌的一抹余辉。随着纳粹在德国日益横行，曾经是数学圣地的哥廷根一步步地走向了衰落。1933 年，朗道因其“犹太式的微积分与雅里安 (Aryan) 的思维方式背道而驰”被剥夺了授课资格，离开了他一生挚爱的数学讲堂。出于对战争的厌恶，西格尔于 1940 年离开了德国。哥廷根的衰落是德国文化史上最深重的悲剧之一。在这场悲剧中最痛苦的也许要算是希尔伯特，他是自高斯和黎曼之后哥廷根数学传统的灵魂人物，从某种意义上讲，哥廷根也是希尔伯特的灵魂。他一生为发扬哥廷根的数学传统尽了无数的心力，哥廷根记录了他一生的荣耀和自豪，而今在他年逾古稀的时候却要残酷地亲眼目睹这一切的辉煌烟消云散。1943 年，希尔伯特黯然离开了人世，哥廷根的一个时代走到了终点。

注 10.1

当然这种复杂性指的是推导上的复杂，而不是用来计算零点时的复杂——后者虽然也很复杂，却比传统的 Euler-Maclaurin 公式来得简单。

Riemann

11 黎曼-西格尔公式

黎曼-西格尔公式的推导极其复杂，不可能在本文中加以介绍。不过我们将简单叙述一下计算黎曼 ζ 函数非平凡零点的基本思路，并给出黎曼-西格尔公式的表达式，以便读者有一个大致的了解。

读者也许还记得，在第五节中我们曾引进过一个辅助函数：

$$\xi(s)=\Gamma(s/2+1)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

它的零点与黎曼 ζ 函数的非平凡零点重合。因此，我们可以通过对 $\xi(s)$ 零点的计算来确定黎曼 ζ 函数的非平凡零点。这是计算黎曼 ζ 函数零点的基本思路。由于 $\xi(s)$ 满足一个特殊的条件：$\xi(s)=\xi(1-s)$，运用复变函数论中的反射原理 (reflection principle) 很容易证明（读者不妨自己试试），在 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线（即黎曼猜想中的 critical line）上 $\xi(s)$ 的取值为实数。因此在 critical line 上通过研究 $\xi(s)$ 的符号改变就可以确定零点的存在。这是利用 $\xi(s)$ 计算零点的一个极大的优势。在下文中我们将只考虑 critical line 上的情形，为此令 $s=1/2+it$。利用 $\xi(s)$ 的定义可以证明（请读者自行完成）：

$$\xi(1/2+it)=\left[e^{\mathrm{Re}\ln\Gamma(s/2)}\pi^{1/4}\frac{-t^2-1/4}{2}\right]\cdot\left[e^{i\,\mathrm{Im}\ln\Gamma(s/2)}\pi^{-it/2}\zeta(1/2+it)\right]$$

很明显，上式中第一个方括号内的表达式始终为负，因此在计算 $\xi(s)$ 的符号改变——从而确定零点——时可以忽略。因此要想确定黎曼 ζ 函数的零点，只需研究上式中第二个方括号内的表达式就可以了。我们用 $Z(t)$ 来标记这一表达式，即：

$$Z(t)=e^{i\,\mathrm{Im}\ln\Gamma(s/2)}\pi^{-it/2}\zeta(1/2+it)$$

至此，研究黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点就归结为研究 $Z(t)$ 的零点，而后者又可以归结为研究 $Z(t)$ 的符号改变。

黎曼-西格尔公式就是关于 $Z(t)$ 的渐进展开式，它可以表示为：

$$Z(t)=2\sum_{n^2<(t/2\pi)}n^{-1/2}\cos\left[\theta(t)-t\log n\right]+R(t),$$

其中：

$$\theta(t)=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48t}+\frac{7}{5760t^3}+\cdots$$

$$R(t)\sim(-1)^{N-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/4}\left[C_0+C_1\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/2}+C_2\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-2/2}+C_3\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-3/2}+C_4\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-4/2}\right]$$

上面式子中的 R(t) 被称为剩余项 (reminder)，其中的 N 为 $(t/2\pi)^{1/2}$ 的整数部分，R(t) 中各项的系数分别为：

$$C_0=\Psi(p)\equiv\frac{\cos\left[2\pi\left(p^2-p-1/16\right)\right]}{\cos(2\pi p)}$$

$$C_1=-\frac{1}{2^5\cdot3\cdot\pi^2}\Psi^{(3)}(p)$$

$$C_2=\frac{1}{2^{11}\cdot3^2\cdot\pi^4}\Psi^{(6)}(p)+\frac{1}{2^6\cdot\pi^2}\Psi^{(2)}(p)$$

$$C_3=-\frac{1}{2^{15}\cdot3^4\cdot\pi^6}\Psi^{(9)}(p)-\frac{1}{2^8\cdot3\cdot5\cdot\pi^4}\Psi^{(5)}(p)-\frac{1}{2^6\cdot\pi^2}\Psi^{(1)}(p)$$

位于哥廷根的西格尔的墓地

$$C_4=\frac{1}{2^{23}\cdot 3^5\cdot \pi^8}\Psi^{(12)}(p)+\frac{11}{2^{17}\cdot 3^2\cdot 5\cdot \pi^6}\Psi^{(8)}(p)+\frac{19}{2^{13}\cdot 3\cdot \pi^4}\Psi^{(4)}(p)+\frac{1}{2^7\cdot \pi^2}\Psi(p)$$

其中 p 为 $(t/2\pi)^{1/2}$ 的分数部分，$\Psi^{(n)}(p)$ 为 $\Psi(p)$ 的 n 阶导数。

这就是西格尔从黎曼手稿中整理出来的计算黎曼 ζ 函数零点的公式 [注 11.1]。确切地讲它只是计算黎曼 ζ 函数数值的公式，要想确定零点的位置还必须通过多次计算逐渐逼近，其工作量比单单计算黎曼 ζ 函数的数值大得多。读者也许会感到奇怪，如此复杂的公式加上如此迂回的步骤，在没有计算机的年代里能有多大用处？的确，计算黎曼 ζ 函数的零点即使使用黎曼 - 西格尔公式也是极其繁复的，别的不说，只要看看 C4 中对 $\Psi(p)$ 的导数竟高达 12 阶之多就足令人头疼了。但是同样一件工作，在一位只在饭后茶余瞥上几眼的过客眼里与一位对其倾注生命、不惜花费时光的数学家眼里，它的可行性是完全不同的。就象在一位普通人、甚或是一位普通数学家的眼里黎曼能做出如此深奥的数学贡献是不可思议的一样。

不过，也不要把黎曼 - 西格尔公式看得太过可怕，因为在下一节中，我们就将一起动手用这一公式计算一个黎曼 ζ 函数的非平凡零点。当然，我们会适当偷点懒，也会用用计算器，甚至还要用点计算机软件。毕竟，我们与西格尔之间又隔了七十多个年头，具备了偷懒所需的信息和工具。然后，我们将继续我们的旅途，去欣赏那些勤奋的人们所完成的工作，那才是真正的风景。

注 11.1

有两点需要提醒读者：一是黎曼手稿中 C_4 中 $\Psi(p)$ 的系数与西格尔给出的不同；二是我们没有使用西格尔原始论文中的记号。

作者介绍：

卢昌海，哥伦比亚大学物理学博士，现旅居纽约，为本刊特约撰稿人。

漫谈数学文化

曹之江

全国首届名师曹之江

1

文化，是人类区别于动物界的主要标识，是一个无比广博、与时俱进的范畴，而数学文化仅是它的特殊分支。这里所谓的“数学”，当前在国际上有个名称——Mathematics，这是一个西文的名词。根据历史资料所载，它发端于纪元前几百年的古希腊，直到中世纪才传播到欧洲及全世界，并得以发扬光大。因此对我们中国人来讲，Mathematics 乃是一个西方的舶来品。在一百多年以前，中国基本上还没有人知道 Mathematics 为何物，直到西方人用坚船利炮打开这个缺口以后，才逐渐传入到了中国。然而，因为 Mathematics 是一种理性的产物，它不像猫、狗、石头等物质，东西方都有，因此存在着对应的名词可以互相翻译。而在中国的典籍中却没有 Mathematics 对应的东西，因此要把它译成中文就很困难。我们的前人把 Mathematics 译为“数学”，他们这种译法自然有自己的深谋远虑，我们作为后人不便评说。然而“数学”这种译法很容易使人把 Mathematics 理解为“数”的科学。诚然，“数的科学”——就像华罗庚、陈景润等人搞的数论，它虽然是 Mathematics 的一个重要分支，但却远远不是 Mathematics 的全部。因此，从字面上看“数学”不能反应出 Mathematics 的全貌，然而，因上百年来我们都是用的“数学”这个词。由于约定俗成，我们下面的行文仍然沿用“数学”这个词来代表 Mathematics。但我们所讨论的都是 Mathematics 这种舶来学问。

2

为了说明数学是一种什么样的文化，或者说，数学是一种什么样的学问，我们需要先简介一下人类的理性主义文化。人类在长期的争取生存和求得自身发展的斗争中需要观察周围环境中的一切，了解它们的变化发展。例如他们需要观察大自然中声、光、热、电、磁以及各类物体的机械运动和它们之间的表面作用力等原理和规律，这种知识积累多了，就形成了后来的物理学。人类除了有物理学以外，还有化学、生命科学、天文学、地质学、电子学、计算机科学等等种类繁多的各种科学门

类，这些科学门类都是人类在实践中经过长期的观察、实践、再观察、再实践和复杂的理性分析、归纳等过程而得到的，因此我们统称之为人类的理性主义文化活动。这个理性主义的文化活动是由古希腊人发端的，他们的代表人物是毕达哥拉斯、柏拉图、亚里斯多德等。这种理性主义的文化后来推广到欧洲和全世界，形成为今日科学技术物质文明的主流。数学，一般人都把它当作是理性主义文化中的一个部分，因此人们常常把这种文化简称为“数理化”。然而，数学与其他各类物质科学是有实质性区别的，不能混为一谈。譬如化学是研究各类物质元素的结构和它们的相互作用；生命科学是研究各类动植物的生长演化规律；天文学是研究广袤的宇宙空间里星体的演化发展规律等等。而数学的研究对象是什么？数学是没有研究对象的！数学不研究任何实际事物，它所讨论的不过是由一堆文字符号所组成的系统，这些文字符号代表什么？它们不代表任何现实的物质！但它们却在一定的公理规则的约束下进行演绎推理，因此所谓数学乃是各种由文字符号组成的在一定公理规则约束下的演绎系统。因为数学不以任何现实物质作为研究对象，这就表现了数学的超现实性。但是数学的这种超现实性并不等于说它是脱离现实的。下面兹举两个例子：如事物数量上的一条规则 $3+5=8$，这是任何物质系统都要遵循的一条数量规则，它是由数学中的代数公理所演绎出来的一条定理，这里面 3、5、8 只代表抽象数字，它们没有量纲，不代表任何物质，但是数学上演绎它们的代数公理却是从所有物质系统的数量规则中抽象出来的，这类演算规则作为“公理”（即不许再加证明的）被归纳在数学之中，因此由这种代数公理所演绎出来的一切数量演算规则，都可以回归应用到所有物质系统中。于是从这个意义上来讲，数学仍源于物质，并植根于现实。数学的另外一个例子，由三条直线所围成的三角形，它的三个内角 A、B、C 之和 $A+B+C=180°$，这就是著名的由欧几里得的几何公理所演绎的一条几何定理，它适用于地球表面广大空间内一切形体。欧几里得公理也是人们在长期实践中所得到的形体规则。然而后来（十九世纪）人们发现欧氏公理不是绝对的，人们在地球表面以外更广大的宇宙尺度空间中发现 $A+B+C\neq 180°$，这就是知名的非欧几里得几何。但不论是欧氏几何或非欧氏几何，它们的公理亦仍然都是源于物质，植根于现实的。

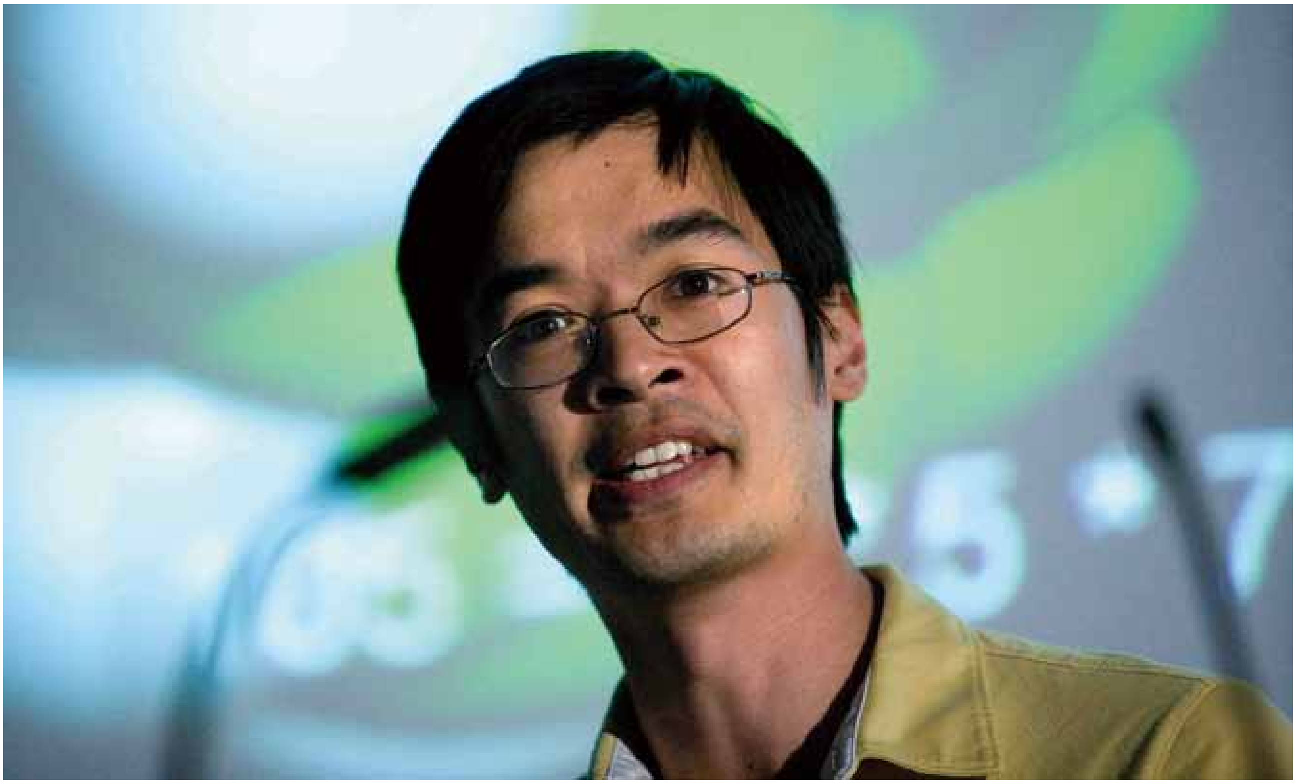
3

上文提到数学是一种不以任何现实的物质系统作为研究对象的科学，表现出了超现实性的品格。正是因为它的超现实性，使得人们对于数学特别是现代数学的认知产生了许多问题，许多人不明了这数学为何物，就学不进去。其实，我们在上文也同时提到了数学仍是一种源于物质，植根于现实的文化，它的超现实性正是它的物质性的一种反映。因为制约一个数学系统的任何公理体系，都是来源于现实的物质系统的，它们是一切现实物质系统本性的概括与抽象。而这种概括与抽象乃是无限的高度概括与抽象。因而它一方面使得抽象物质失去了一切的物质属性，从而产生了超现实性；而另一方面，它又使得由这无限高度概括出来的抽象物（数学公理）具有了一切物质系统所具有的共性，从而使得它所延伸的一切定理和性质，都能普遍适用于任何现实物质系统。这就说明了数学在现实的物质世界里具有无限广阔的应用前景。因此数学的超现实性正是源于它的物质性。正因为数学具有这一对双重的特性，就造成了人们对于数学文化特别是现代数学文化认知上的一对基本矛盾：它既是难于认识的，同时又是可以认知，而且具有无限广阔的应用前景。这就告诉了我们在数学，特别是现代数学的教学上必须正确地去认识这对基本矛盾，并努力把它们调和起来。譬如在教学上做到返朴归真，多讲解抽象数学的物质性。

这一对数学教学上的基本矛盾在现代数字的教学上显得尤为突出。记得我们在上小学、中学时，数学课本里的符号 1，2，3，…以及它们的四则运算从未使我们感觉到抽象难懂，它们的现实背景和物质来源是如此的明白，因此当我们看到这些抽象的数学符号时就会想到二只苹果、三条狗，后来出现了小数分数，以至于用文字符号 A,B,C 等代替了数字仍然未感到不好理解。直到上了大学学到了微积分等抽象数学时，我们才意识到理解上的严重问题。这实数是干什么的？它是从哪里来的？这极限、函数又是什么？微积分又是怎么产生的？我们为什么非要这些东西不可等等。因为上述这些概念都是实际生活中所没有的，都不是我们经验里的东西，于是我们应该怎样去理解这些理性的思辨的东西？这就是本文所讨论的文化，为简易说明它们的来龙去脉，我们还另需要一些篇幅，这里就暂且不谈了。

作者介绍：

曹之江，男，教授。1934 年 11 月出生于浙江省上虞县。1953 年—1957 年就读于北京大学数学力学系，毕业后志愿建设边疆，到内蒙古大学任教。任教期间，曾先后任内蒙古大学数学系主任、内蒙古大学副校长、教育部数学力学教学指导委员会理科数学组组长等职。2003 年被教育部授予首届国家级教学名师奖。



美国人文与科学院院士颁授典礼上的演讲辞

A speech for the American Academy of Arts and Sciences

陶哲轩 / 文　谢敏仪 / 译

下月，我将会到波士顿的美国人文与科学院 (The American Academy of Arts and Sciences)，在一年一度的院士颁授典礼上发表约 3-5 分钟的简短演讲。这次演讲有别于以往我做过的科学报告，因为现场并没有投影机、黑板和其它教辅器材，而且，在场的院士有一半是人文学者，一半则是科学家，另外还有一些是工商业界及政界人士。这次的演讲体验想必既新奇又有趣。(我上一次的演讲是在 1985 年。)

我的演讲题目是「网络辅助技术对学术界未来的影响」(题材与我最近就同一主题做的报告有点相似)。以下是演讲辞，虽然这个版本篇幅很长，但是到了真正演讲的时候，内容应该会容大幅删减（10 月 12 日更新：简化版本详见本文末)，欢迎读者就演讲的总体内容提出意见与建议。

可参照去年典礼演讲片段（讲者包括詹姆斯 • 西蒙斯 (Jim

Next month, I am scheduled to give a short speech (three to five minutes in length) at the annual induction ceremony of the American Academy of Arts and Sciences in Boston. This is a bit different from the usual scientific talks that I am used to giving; there are no projectors, blackboards, or other visual aids available, and the audience of Academy members is split evenly between the humanities and the sciences (as well as people in industry and politics), so this will be an interesting new experience for me. (The last time I gave a speech was in 1985.)

My chosen topic is on the future impact of internet-based technologies on academia (somewhat similar in theme to my recent talk on this topic). I have a draft text below the fold, though it is currently too long and my actual speech is likely to be a significantly abridged version of the one below [Update, Oct 12: The abridged speech is now at the bottom of the post.] In the spirit of the theme of the talk, I would of course welcome any comments and suggestions.

Simons), 彼得 • 金 (Peter Kim), 苏珊 • 艾希 (Susan Athey), 厄尔 • 刘易斯 (Earl Lewis) 及卢英德 (Indra Nooyi)），以作比较。顺带一提，西蒙斯的演讲题目是关于「何谓数学」，以及「数学家为何要搞数学」。

「11 月 3 日更新：请浏览学院网页，观看今年我和其它讲者的演讲片段。其他讲者包括爱米罗 • 哈瑞斯 (Emmylou Harris), 詹姆斯 • 厄尔 • 琼斯 (James Earl Jones), 伊丽莎白 • 纳贝尔 (Elizabeth Nabel), 朗奴 • 马克 • 乔治 (Ronald Marc George), 及爱德华 • 维利拉 (Edward Villela)。」

引言

如果要说近几十年来世界上最伟大的科技成就，我会认为是互联网。我所讲的不只是早于 1960 年代已经在学术及政府机关使用的网络物理结构，还有所有在网络发展成熟后相继涌现的创新技术，涵盖了一般网络工具（如电邮地址列表功能）到超高效的技术（如搜索引擎、维基百科等）。

随着互联网逐渐融入现代生活主流，人类活动陆续受到不同层面的影响和改变。看看新闻，就知道网络媒体如何因「旧」媒体日渐息微而蓬勃发展起来，也认识到网上医疗信息如何改变医生与病人之间的关系，政客如何利用博客、Tweets 讯息和在线影片分享功能，在争持激烈的选举中争取民意，诸如此类的报道。

然而，对于我们这些学术界的人来说，总想抱着一种比较抽离的态度去看待这些转变。当然，实力雄厚的大财团相比其它低成本的网络对手，理应更具竞争优势。在民主社会下，人民应当有权以不同途径进行在线或非在线的讨论，透过公众舆论影响政治。相比之下，我们拥有大学永久聘任的资格、独有的专业知识、以及经得起时间考验的学术成果，应该可以避免被卷入网络革命的洪流之中。

即使新科技的应用逐步进驻我们的生活——令学术期刊的盈利模式受到威胁，或是让学生更便捷地抄袭功课（不过话说回来，老师可是更容易查出学生作弊的情况）——我们仍然会认为这些发展都只是微不足道的转变而已：例如电子期刊取代传统纸版期刊；或是采用更多有效的系统，查找学生有否涉及抄袭功课的行为。我们还是跟以前一样进行教学、研究、及指导学生等核心学术工作，只不过现在可能会多些使用互联网。可是无论用甚么方法，目的都离不开教学，而不是追求日新月异的互联网科技。毕竟真正的课堂是无法被维基百科所取代，而网络搜索引擎也不能代替我们的研究，对不？

For comparison, the talks from last year's ceremony, by Jim Simons, Peter Kim, Susan Athey, Earl Lewis, and Indra Nooyi, can be found here. Jim's chosen topic, incidentally, was what mathematics is, and why mathematicians do it.

[Update, Nov 3: Video of the various talks by myself and the other speakers (Emmylou Harris, James Earl Jones, Elizabeth Nabel, Ronald Marc George, and Edward Villela) is now available on the Academy web site here.]

Introduction

If I had to name the most significant technological development in recent decades, I would have to say it would be the internet. By this, I mean not just the physical architecture of the internet per se, which was already available to academics and government agencies since the 1960s, but also all the innovative technologies that flourished once the internet matured, from tools as humble as the email mailing list to such unreasonably effective services as modern search engines or Wikipedia.

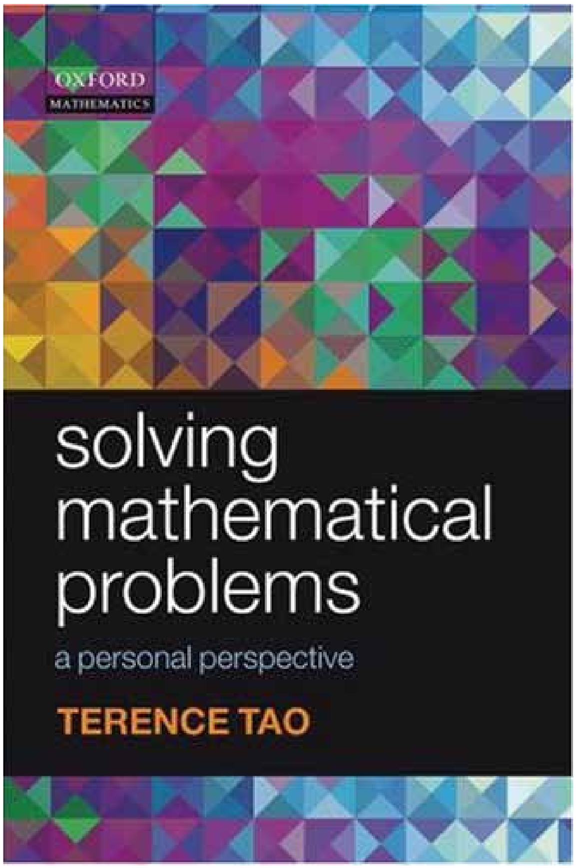
As the internet has become more integrated into the mainstream of modern life, it has disrupted and revolutionised one sphere of human activity after another. We read in the news about how online media is thriving as "old" media stumbles; how online medical information is transforming patient-doctor relationships; how blogs, tweets, and online videos are tipping the balance in closely fought elections; and so forth.

But to most of us in academia, there is a temptation to view these changes with a certain detachment: sure, established for-profit companies may well face competition (as they ought to) from lower-cost internet-based rivals, and it is only reasonable in a democracy that politics should be influenced by popular debate, both offline and online, but we, by contrast, should be secure in our ivory towers from any internet revolution, with our tenure, our unique expertise, and our time-tested academic traditions.

Even when new technologies do hit close to home – by threatening the profit model of the academic journal system, say, or by greatly facilitating the ability for students to cheat on their homework (and also for professors to detect such cheating!) – we can still rationalise away these developments as requiring only superficial changes to adapt to – switching from physical journals to online journals, perhaps, or placing more safeguards on our homework formats. We still perform our "core" academic activities – teaching, advising, research – much as we have for over a century: classroom by classroom, student by student, and paper by paper. We may do more of these things online now rather than offline, but it is still the academic who is at the center of things, not the internet. After all, it is not as if our classes can be replaced by a Wikipedia entry, or our research by a search engine query, right? Right?

嗯，其实可以说是对，但也可以说是不对。即使使用当今最先进的网络技术，其精密和智能程度也不足以取代我们的学术工作，至少现阶段不行。学术界与其它领域不同，现时还没有受到廉价网络对手的真正威胁。

话虽如此，我相信一个「混合型」学术模式会慢慢形成。在这个模式中，通晓互联网的学者及其所属院校会设法利用网络工具的力量，开展大型研究合作项目，然后广泛迅速地公布研究成果。以我的专业数学为例，虽然这些利用网络为主的活动仍处于起步阶段，不过有迹象显示，相对于惯用的合作及传播信息的模式，网络活动可以大大提高效率（或者更重要的是，有助提升研究开放度、知识累积性、以及回馈反应程度），预料未来会逐步成为主流。网络活动可能会彻底改变我们的工作方式、所追求的目标、甚至是身处的学术文化，但在性质上的转变大概是不明显的。



Well, yes and no. It's true that even the most advanced online resources available today are not nearly "smart" or sophisticated enough to render our academic services obsolete; not yet, at least. Unlike many other industries, academia does not currently face any real threat from a cheap internet-based competitor.

But I believe a "hybrid" form of academic activity is beginning to emerge – one in which internet-savvy academics and their institutions harness the full power of online tools to initiate and organise large research collaborations, and to disseminate and share their results at far more rapid and effective rates than were previously possible. In my discipline – mathematics – this type of net-centric activity is still in its infancy, but it shows signs of potentially being substantially more efficient (and perhaps more importantly, open, cumulative and responsive) than traditional collaboration and dissemination, and is likely to become increasingly mainstream in the years ahead. It may not totally revolutionise the way we work, the ambition of what we hope to achieve, and the academic culture we work in, but it is likely to transform them significantly.

教学

谈到大学教学，过去历世历代，无论在哪一所学府，老师都是站在讲台，把学科的基本理论同一时间授予班上几十位，甚至过百位的学生。这个做法无疑可以让我们与学生有面对面接触的机会，而且能够操练自己的教学技巧，从而得到满足感。不过，这是最有效率的方法吗？

在数学领域中有一个称为「莫比乌斯变换」(Mobius transformations) 的方程——全世界过千所大学的数学系都把此方程列入复分析 (complex analysis) 的课程中，由老师在课堂上同时向全班约 30-50 名学生讲授，我自己也曾经教过好几次。在影片分享网站 Youtube 里有一段很棒的影片，正好解释了此等变换的几何含义。该影片的点击率达 1,600,000 次，即使上 10000 次课堂，覆盖的人数也远低于这个数字。现在只要在网上搜一下，就能轻易找到影片（一般会出现在常用搜索引擎中的首三个搜索结果之中）。

Teaching

Consider teaching, for instance. Year after year, day after day, and in universities across the world, we stand in lecture halls and present the foundations of our subject to classrooms consisting of hundreds, or even just dozens, of students at a time. This keeps us engaged with our students, hones our skills, and makes us feel useful, but is it the most efficient way to do things?

There is a mathematical topic – Mobius transformations – which is taught routinely in complex analysis classes in a thousand mathematics departments across the world, to classes of perhaps thirty or fifty students in size; I have done so myself several times. On Youtube, there is a beautiful video explaining the geometric interpretation of these transformations which has been viewed one million, six hundred thousand times so far

目前我们当然不能期望要把课堂体验完完整整地复制到 Youtube 影片上，因为不论是师生互动质素、教材的深度、或是专家的关注度都会大大减低。即使影片揉合更多专业成果，例如麻省理工学院等知名学府所推出的网上教学影片，也不足以跟真正课堂教学相比。不过纯粹就互联网的惊人用户人数来说，便可以知道采用网络辅助教学的未来潜力。

数以百计的学者（包括我自己在内）已经使用博客发布课堂讲义，鼓励师生及来自世界各地的访客在网上进行全方位讨论。我讲授的班级普遍来说只有约 30 名本地学生，但是在博客上观看或参与讨论的却多达一百人。他们各自拥有不同的背景，提出来的问题质量兼备，大大提升教材内容的质量。通过预备博客的教学素材，以及阅读学生和参与同事之意见，我对学科的认识便会更深入。

课堂教学虽然结束了 ，但是网上教学依然继续。很多时候，有些人对某个课题感兴趣，透过搜索引擎会无意中找到博客里一年前的讲义，然后重新开始讨论起来。如此一来，不到几年，每一个学术专题就会有很多有用的网上资源，任何人只要在网上搜一下就能看见。

在线互动的技术肯定会不断提升，可想而知会逐渐变成课堂的常规内容，比如说，正在收看课堂直播的海外学生用短信把问题发送过来，这些信息可以透过在线互动技术处理，即使上完课，仍可继续在线讨论。其实，不是所有在线教学的实验都能够达到预期的目标，有时只需要向前多走一步，就能给出一个模型，让世界各地的学府及老师争相仿效。

在我看来，传统的课堂讲授在未来还是会发挥不可或缺的功能，只是形式会与现在的不同，结合互联网技术，成效可望进一步扩展及持续。

交流合作

交流合作研究是另一个有较大转变的范畴。

四十年前，远隔两地的学者是用书信作为主要通讯方式，信息传递速度较慢，妨碍交流合作的发展。时至今日，现代通讯工具（如电邮）广泛使用，情况大大改善。远程合作项目已经成为常见的合作模式，合作伙伴一年中有大部分时间都是进行在线交流，真正见面的时间只有几天（但很关键）而已。也许因为这个原因，在数学领域中，合撰论文的比率急剧上升，跨学科论文的比例也大幅增加。

近年全球有很多论文作者都使用软件工具，以便推动交流合作。数学与其它科学领域不同，这门学科从来都不必动用大型实验室，为一大批研究生、博士后和高级研究员提供一个

– more people than can be reached than by even ten thousand mathematics lecturers. It can be accessed by just about anyone on the internet through a simple web search on the topic (it is in the top three hits currently on all major search engines).

Now, clearly, one cannot hope to replicate the entire classroom experience as a sequence of Youtube videos – the quality of interactivity, depth of material, and availability of expert attention, in particular, is much poorer. Even more professional organised efforts, such as the online videotaped lectures offered by institutions such as MIT, are an imperfect substitute for physically being present at these lectures. But the sheer numbers of people one can reach by the internet shows the potential of tapping this medium to teach in the future.

Already, hundreds of academics (including myself) use a blog to post their course notes and encourage online discussion (in all directions) between the teacher and students in the classroom, as well as visitors from around the world; I have had classes with perhaps thirty local students but up to a hundred other participants from a variety of backgrounds following (and commenting!) using the blog. There is a much higher quantity and level of questions asked, and the material in my notes is much improved, because of this; and I have learned more about the subject than if I had taught it in a traditional way, both from preparing the blog material, and from obtaining feedback from students and participating colleagues.

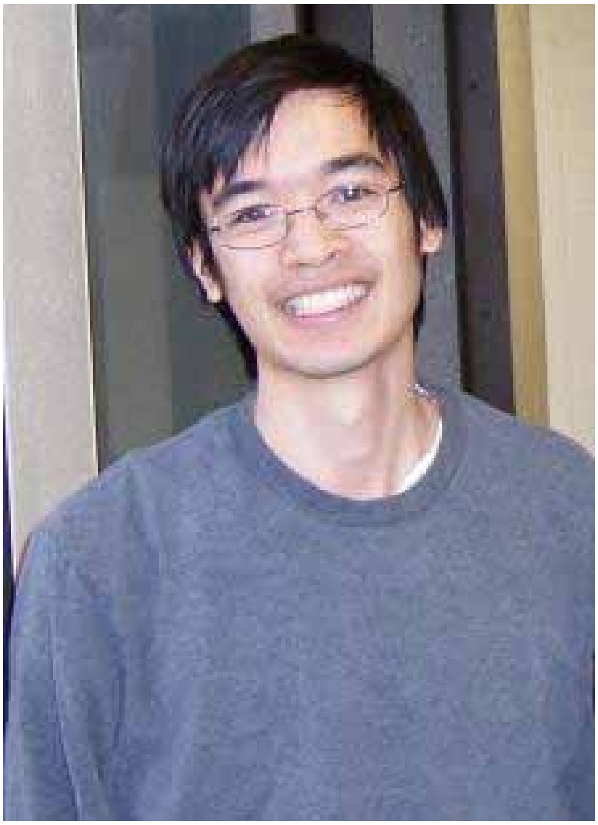
Even after the physical class ends, the online class goes on; I have often had people wanting to learn a subject stumble onto one of my online lecture notes on my blog from a year ago through a search engine, and continue the discussion afresh. Within a few years, there may well be valuable online content like this for virtually every commonly taught academic topic, just one search query away from anyone with internet access.

The technological level of online interactivity is certain to increase in the future; one can well imagine it becoming routine in classes to (for instance) field questions by text message from students overseas who are watching the lecture in real time through video, with the discussion continuing online long after the class has ended. Not all experiments in online teaching will achieve their intended objectives, but it only takes one clear success to provide a model that can then be rapidly emulated by institutions and lecturers worldwide.

In my view, the traditional classroom lecture will still play an indispensable role in the future, but in a rather different format than it is today, with its effects being vastly amplified and prolonged through its integration with the internet.

Collaboration

Another major area where profound changes are happening is



很大的地方，一起向着同一目标进行研究。然而，发展大规模项目的相关技术正相继涌现。

举例说，利用博客和维基等网络平台，今年首次发起了一个名为“Polymath Projects”的大型合作研究项目，让其它有兴趣的数学家在网上各抒己见，集思广益，从而解决当前的数学难题。

此项目推出不久即成功破解了一个重要的组合数学问题，经过近六星期的时间及许许多多参与者的努力，共给出了一千余个精辟独到的讨论条目。使用网络平台来讨论数学问题，可说是相当新颖的做法，有效地把拥有相同专业和研究方向的学者集中在一起，也许可以作为一种模式，透过在线网络开展交流合作。

网上讨论还有其它意想不到的好处，它可以把所有网上讨论的内容，无论是错误的开始、失败的终结、抑或在问题尚未解决前，逐步形成的每个进展，都一一纪录下来，把数学研究的整个过程更全面、更生动、更真实地呈现出来，而并非一般在论文或教科书等制作品上所见到的研究成果。

进行网上研究与生活息息相关。曾经有一位参与讨论的人士

that of collaboration in research.

It was only four decades ago that the primary mode of communication among academics in distant institutions was by physical mail. This was inconveniently slow, and it discouraged collaboration with anyone who was not in the same physical location. With modern communication tools such as email, the situation today is vastly different; it is completely routine now in mathematics to collaborate over long distances, with months of online communication punctuated by only a few (but crucial!) days of physical contact each year. Perhaps as a consequence, there has been a huge increase in the proportion of papers in mathematics that are jointly authored, rather than singly authored. As a related phenomenon, an increasing fraction of papers are also interdisciplinary rather than specialised to a single subfield.

Very recently, software tools have become available to allow easier collaboration by large numbers of authors from across the world. Unlike the sciences, pure mathematics in academia has never really had the large laboratories in which armies of graduate students, postdocs, and senior researchers work on a single goal; but the technology is just becoming available for such large-scale projects to be possible.

This year, for instance, by ad hoc usage of existing tools such as blogs and wikis, the first “polymath” projects were launched – massively collaborative mathematical research projects, completely open for any interested mathematician to drop in, make some observations on the problem at hand, and discuss them with the other participants.

The very first such project solved a significant problem in combinatorics after almost six weeks of effort, with almost a thousand small but non-trivial contributions from dozens of participants. It was a novel way to do mathematics, but also a novel way to locate the collaborators with the right expertise and interest to solve the problem, perhaps serving as a model to begin collaborations through online networking rather than physical networking.

And there were other unexpected benefits too; the projects have retained a fully available online record of all the discussion, including false starts, dead ends, and incremental progress, that took place while the problem was not yet solved, giving a much richer, more dynamic, and more accurate picture of how mathematical research really takes place than the cut-and-dried presentations one sees in finished products such as papers and textbooks.

By taking research online, it comes to life; one participant compared his anticipation to seeing the latest developments on a polymath project to the suspense one might feel while watching a TV or movie drama. Veteran researchers are familiar with

表示，非常期待看到 Polymath 项目的最新发展，感觉就像追看电视或电影剧集一样。拥有丰富经验的研究人员虽然知道面对压力和成败得失的秘訣，不过要他们向刚踏上研究之路的学生分享这方面的经验，确实不易。也许将来有一天，借助这些开放式网络平台，可以用「摆事实，不空讲道理」的方式来与众人分享经验。

学术文化

采用新技术会导致我们的行为文化产生微妙的变化。在数学方面，搞研究从来都是秘密活动。如果未正式投稿到期刊，学者基本上是不会轻易跟别人提起自己的研究结果，在印刷版面世之前（过程需时几个月，甚至几年），只会把预印本发给少数同行。随着预印本服务器和搜索引擎的应用日益普及，不少学者在正式提交论文前（有的甚至更早），就已经把预印本放上网。从我自身的经验得知，这个做法不但可以提升研究工作的知名度、影响力和关注度，而且（与普通人所想的恰恰相反）有助遏制过度竞争行为，摒除抄袭之风。还有，透过预印本服务器发表的文章都有时间标记，避免出现争位次的情况。

其实，在许多数学的分支中都拥有同一个「社会期望」，也就是说，希望不用大费周张就能轻易地在网上取得某学者的研究结果，同时期刊在刊登文章时，不会造成垄断的情况。因此，现今研究发展的传播速度比过去几十年要快得多。

我能预料未来会出现更多同类型的文化转向。目前，在数学研究中，解决困难的过程往往都是充满疑惑，直至问题圆满解决写出一篇质量符合出版要求的文稿。随着 Polymath 等开放式合作项目的兴起，今后的学术文化会有所改变，正如今次我预先把这篇演讲辞放上来，希望得到大家的宝贵意见，让我可以继续努力，写得更好。如果在几年前，我大概只会把文稿发给一两位值得信任的朋友，然后最多做一次修改。

同样地，数学博客和其它半正式论坛的兴起，带动了现时数学界的风气——某一数学题目背后蕴含的涵义和启示，就如其定义、定理与证明一样，都是被人看重的。有些学者在比较专门的数学专业中，可能会面对越来越多由同行所造成的压力，致使他们毫不保留地公开自己的研究成果。

目前的数学教学都是采用「老师讲、学生听」的单向模式，单凭班上少数勇于发问的学生所提出的问题，要不就从学生在课堂结束几天、甚至几星期后，在功课、评估及考试中的表现，才可以得到他们对教学的回馈。

在不断改善技术的情况下，人们对于课堂及课外网上论坛的互动教学成效的期望会越来越高，而接近同步的实时反馈系

these tensions, frustrations, and joys, but it used to be quite difficult to convey these experiences to the graduate students entering the field; perhaps these open internet projects, with their “show, don’t tell” nature, may succeed in doing so in the future.

Academic culture

As we adopt new technology, our culture of doing things subtly changes. In mathematics, for instance, research used to be a secretive activity; one would often not discuss what one was working on before it was ready for submission to a journal, and would only give out preprints to a select few colleagues before the publication process was complete (which takes months or even years). With the rise of preprint servers and search engines, it is nowadays quite customary to put a preprint online as soon as it is submission-ready (or sometimes even sooner!); experience has shown that doing so greatly increases the visibility, impact, and influence of one’s work, and (perhaps counterintuitively) discourages excessively competitive behaviour and even plagiarism, as the timestamps given by preprint servers can help defuse arguments over precedence.

Indeed, in many parts of mathematics there is now a social expectation that one’s work should be readily available online, and journals have largely abandoned attempts to enforce a (counterproductive) monopoly on the dissemination of their authors’ work. As a result, research developments propagate at a significantly faster speed than in previous decades.

In the future, I can imagine further cultural shifts of this type. Currently, the actual problem-solving process in mathematical research is usually obscured from view until the problem has been solved and a polished, publication-quality draft is available; with the rise of open collaborative projects such as polymath, this culture may begin to change in the future. (For instance, I circulated a draft of this talk on my blog weeks in advance, both to obtain valuable feedback and to encourage me to continue working on the text. A few years ago, I might only have shown a draft to one or two trusted friends, with perhaps a single round of revisions.)

Similarly, the advent of mathematical blogs and other semi-formal outlets for discussion is reinforcing an existing trend in mathematics in which the intuition and motivation behind a mathematical topic is emphasised as much as the definitions, theorems, and proofs; some of the more technical and specialised subfields of mathematics may well encounter increasing societal pressure in the future from their peers to make their work more accessible and transparent to wider audiences.

In teaching mathematics, the current model is that of a nearly one-way street; the lecturer does almost all of the talking. Apart from a few questions from the more bold students, one only receives feedback days or weeks after the class has ended, from

统将成为大势所趋。

如此改变肯定会受到一定的拦阻，例如学界一直为「老师应否允许学生在课堂上使用笔记本计算机」闹得热哄哄。事实上，许多类似的建议都不可能百分百成功，而我们对于在线实验的成功关键仍然一知半解。尽管如此，在技术发展和社会变迁的过程中，我怀疑我们是否可以一直保持现状。

结语

试试把前网络时代的学术界比喻作前工业时代的制造业：工业革命前，制造业是由个别工匠或秘密同业公会来构成。工人各自为自己的工作辛苦劳碌，师傅们则把多年来累积的珍贵经验和技艺仅仅传授予为数不多的徒弟。其实在学术界中，也不难找到相似的地方。

工业革命发生后，专业化和大规模生产成为制造业的主导趋势，生产成效和信心增加了，不过也意味着业内人士之间的关系变得不再如从前那么紧密。有人会哀叹工匠独特的创造力和个性失去了，可是随着工业革命发展进入新纪元，创意产物最终能够渗透进更广泛的群众。由于有生产、设计、研发、企业、制造、市场推广、培训、管理等细分工序，才能把最佳的人才安排在最合适的工作岗位上，不必单靠一己之力去承担整个生产销售的过程。此外，每一个范畴中的最佳做法都得到行内广泛采用，而并非局限于始创人和少数追随者之中。

自印刷机发明以来，学术界还没有经历过像工业革命般的大规模转变，然而随着互联网（现代版的印刷机）的出现，学术界会再一次面临一场革命吗？

简化版

今天我很高兴获颁院士，也很荣幸能够在此发表讲话。我必须承认，虽然之前做过超过一百次科学报告，但是这次可说是我第二次正式做演讲，而第一次发生在九岁的时候。我会尽量把讲话内容整理得好一点，希望听起来不要像九岁小孩的话。有甚么不好的地方，请各位多多包涵。

接下来，我会谈谈互联网的影响力、以及其有效的应用，从现代搜索引擎到维基百科。

我们都知道互联网在娱乐、新闻、政治等方面，都造成了前所未有的改变。然而，在这场网络革命中，我们总希望自己可以置身事外，凭着自己的大学永久聘任资格、独有的专业知识、丰富的学术成果，应该可以避免卷入网络革命的洪流之中。毕竟，真正课堂无法被维基百科所取代，而搜索引擎

the assignments, evaluations and exams the students turn in.

With improvements in technology, there may be a greater expectation in the future for such classes to be significantly more interactive, both during the “actual” class, as well as the online discussions before and afterwards, and with near-instant feedback becoming the norm.

Such changes will certainly encounter resistance; consider for instance the ongoing debate on whether to allow laptops in classrooms. Many such initiatives will not be fully successful; we still have a very partial understanding of what makes one online experiment flourish and another one fail. Nevertheless, I doubt that we will keep the status quo indefinitely in the presence of such technological and social changes.

Conclusion

One can draw an analogy between pre-internet academia and pre-industrial manufacturing. Before the industrial revolution, manufacturing was the province of individual craftsmen or of secretive guilds, working painstakingly on each individual piece of work, with each master passing down their carefully hoarded insights and tricks to just a handful of disciples. It is not hard to find parallels to each of these phenomena in academia.

But after the industrial revolution, specialisation and mass production became the paradigm in manufacturing; less intimate, surely, but also vastly more efficient and reliable. One might bemoan the loss of creativity and individuality that each craftsman exhibited, but eventually, as the industrial revolution matured into the modern era, the outlets for creativity became dispersed to a wider group of people. Thanks to division of labour, design, invention, entrepreneurship, manufacturing, marketing, training, or management could now be performed by whoever was best qualified to do each, rather than by the same individual; and the best practices in each of these areas could be adopted widely, rather than being confined to their originator and a select number of followers.

Academia has not experienced change on the scale of the industrial revolution since the invention of the printing press. With the advent of the internet – the modern day analogue of the printing press, among other things – could it be revolutionised once again?

Abridged version of speech

It’s a great honour, both to be inducted to the Academy and to address you all today. I must confess that while I have given over a hundred scientific talks, this is only my second speech; and the first one was when I was nine. So I please bear with me; I’ll try not to sound like a nine-year-old.

也不能替代我们的研究，至少现在不行。

不过，我相信重大的改变已经展开。

以教学为例，在数学领域中有一个称为「莫比乌斯变换」(Mobius transformations) 的方程——全世界过千所大学的数学系都把此方程列入复分析 (complex analysis) 的课程中，老师在课堂上同时向全班约 30-50 名学生讲授，我自己也曾经教过好几次。

可是，如果在网上搜一下「莫比乌斯变换」(Mobius transformations)，就会得出一段很棒的 Youtube 影片，该影片的点击率达 1,600,000 次，即使上 10000 次课堂，覆盖的人数也远低于这个数字。

数以百计的学者（包括我自己在内）已经开始使用博客去推动教学。我讲授的班级一班大约只有 30 名本地学生，但是在博客中参与讨论的人士却多达一百人。课堂教学结束了，网上教学依然继续。通过搜索引擎，偶然会有些新访客发现某个课堂的资料，开始参与讨论。

这些网络工具都有意想不到的用处，几星期前我把这篇讲稿放上网，结果得到许多宝贵的意见。

研究方面，比如说，通过使用博客和维基等现有的网络平台，今年首次发起了一个名为“Polymath Projects”的大型合作研究项目，开放给所有有兴趣的数学家在网上进行公开讨论，发表意见。

此项目推出不久即成功破解了一个重要的组合数学问题，经过近六星期的时间及许许多多参与者的努力，共给出了一千余个精辟独到的讨论条目。

通过网络平台讨论数学问题，可说是相当新颖的做法，有效地把拥有相同专业和研究方向的学者集中起来，也许可以作为一种模式，利用在线网络开展交流合作。

用这种方式展开讨论、研究数学，真是既新颖又有趣。有一位参与讨论的人士更表示，非常期待看到 Polymath 项目的最新发展，感觉就像追看电视或电影剧集一样。（要是当时你也在场便好了！）

自印刷机发明以来，学术界还没有经历过像工业革命般的大规模转变，然而随着互联网（现代版的印刷机），学术界会再一次面临一场革命吗？

致谢：感谢陶哲轩教授允许本刊连载他的博客译文。

I would like to talk about the impact of the internet, and all the unreasonably effective services it has spawned, from modern search engines to Wikipedia.

We know that the internet has revolutionised area after area: entertainment, journalism, politics will never be the same again. But those of us in academia like to feel protected in our ivory towers from the internet revolution, with our tenure, our expertise, and our academic traditions. After all, our classes can't be replaced by a Wikipedia entry, and our research can't be replaced by a search engine – not yet, anyway.

Nevertheless, I believe major change is already underway.

Consider teaching, for instance. There is a mathematical topic – Mobius transformations – which is taught in a thousand mathematics departments across the world, to perhaps thirty or fifty students at a time. I've done so myself many times.

But if you do a web search for Mobius transformations, you'll find a beautiful video on Youtube explaining this concept clearly, which has been viewed one million, six hundred thousand times – more people than can be reached by ten thousand mathematics classes.

On a smaller scale, hundreds of academics (including myself) have actively pushed their classes onto the internet, using such tools as blogs. I have had classes with perhaps thirty local students but up to a hundred online participants. Even after the physical class ends, the online class goes on, with new visitors stumbling onto the class via a search engine and continuing the conversation.

These tools can have unexpected uses; for instance, I posted a draft of this talk online a few weeks ago, and got a tremendous amount of valuable feedback in return.

Or consider research. This year, for instance, by ad hoc usage of existing tools such as blogs and wikis, the first "polymath" projects were launched – massively collaborative mathematical research projects, completely open for any interested mathematician to drop in.

The very first such project solved a significant problem in combinatorics after almost six weeks of effort, with almost a thousand small but non-trivial contributions from dozens of participants. It was a novel, transparent, and lively way to initiate and then do mathematics. One participant even compared his anticipation to seeing the latest developments on a polymath project to the suspense one might feel while watching a TV or movie drama. (You had to be there, I guess.)

Academia has not experienced massive change – on the scale of the industrial revolution – since the invention of the printing press. With the advent of the internet – the modern day analogue of the printing press, among other things – could it be revolutionised once again?

谷歌背后的数学

卢昌海

在如今这个互联网时代，有一家家喻户晓的公司，它自1998年问世以来，在极短的时间内就声誉鹊起，不仅超越了所有竞争对手，而且彻底改观了整个互联网的生态。这家公司就是当今互联网上的第一搜索引擎：谷歌(Google)。

在这样一家显赫的公司背后，自然有许许多多商战故事，也有许许多多成功因素。但与普通商战故事不同的是，在谷歌的成功背后起着最关键作用的却是一个数学因素。

本文要谈的就是这个数学因素。

谷歌作为一个搜索引擎，它的核心功能顾名思义，就是网页搜索。说到搜索，我们都不陌生，因为那是凡地球人都会的技能。我们在字典里查个生字，在图书馆里找本图书，甚至在商店里寻一种商品等，都是搜索。如果我们稍稍推究一下的话，就会发现那些搜索之所以可能，并且人人都会，在很大程度上得益于以下三条：

1. 搜索对象的数量较小——比如一本字典收录的字通常只有一两万个，一家图书馆收录的不重复图书通常不超过几十万种，一家商店的商品通常不超过几万种等。

2. 搜索对象具有良好的分类或排序——比如字典里的字按拼音排序，图书馆里的图书按主题分类，商店里的商品按品种或用途分类等。

3. 搜索结果的重复度较低——比如字典里的同音字通常不超过几十个，图书馆里的同名图书和商店里的同种商品通常也不超过几十种。

但互联网的鲜明特点却是以上三条无一满足。事实上，即便在谷歌问世之前，互联网上的网页总数就已超过了诸如图书馆藏书数量之类传统搜索对象的数目。而且这还只是冰山一角，因为与搜索图书时单纯的书名搜索不同，互联网上的搜索往往是对网页内容的直接搜索，这相当于将图书内的每一个字都变成了搜索对象，由此导致的数量才是真正惊人的，它不仅直接破坏了上述第一条，而且连带破坏了二、三两条。在互联网发展的早期，象 Yahoo 那样的门户网站曾试图为网页建立分类系统，但随着网页数量的激增，这种做法很快就“挂一漏万”了。而搜索结果的重复度更是以快得不能再快的速度走向失控。这其实是可以预料的，因为几乎所有网页都离不开几千个常用词，因此除非搜索生僻词，否则出现几十万、几百万、甚至几千万条搜索结果都是不足为奇的。

互联网的这些“不良特点”给搜索引擎的设计带来了极大的挑战。而在这些挑战之中，相对来说，对一、二两条的破坏是比较容易解决的，因为那主要是对搜索引擎的存储空间和计算能力提出了较高要求，只要有足够多的钱来买“装备”，这些还算是容易解决的。套用电视连续剧《蜗居》中

某贪官的台词来说，“能用钱解决的问题就不是大问题”。但对第三条的破坏却要了命了，因为无论搜索引擎的硬件如何强大，速度如何快捷，要是搜索结果有几百万条，那么任何用户想从其中“海选”出自己真正想要的东西都是几乎不可能的。这一点对早期搜索引擎来说可谓是致命伤，而且它不是用钱就能解决的问题。

这致命伤该如何治疗呢？药方其实很简单，那就是对搜索结果进行排序，把用户最有可能需要的网页排在最前面，以确保用户能很方便地找到它们。但问题是：网页的水平千差万别，用户的喜好更是万别千差，互联网上有一句流行语叫做：“在互联网上，没人知道你是一条狗”(On the Internet, nobody knows you're a dog)。连用户是人是狗都“没人知道”，搜索引擎又怎能知道哪些搜索结果是用户最有可能需要的，并对它们进行排序呢？

在谷歌主导互联网搜索之前，多数搜索引擎采用的排序方法，是以被搜索词语在网页中的出现次数来决定排序，出现次数越多的网页排在越前面。这个判据不能说毫无道理，因为用户搜索一个词语，通常表明对该词语感兴趣。既然如此，那该词语在网页中的出现次数越多，就越有可能表示该网页是用户所需要的。可惜的是，这个貌似合理的方法实际上却行不大通。因为按照这种方法，任何一个像祥林嫂一样翻来复去倒腾某些关键词的网页，无论水平多烂，一旦被搜索到，都立刻会“金榜题名”，这简直就是广告及垃圾网页制造者的天堂。事实上，当时几乎没有一个搜索引擎不被“祥林嫂”们所困扰，其中最具讽刺意味的是：堪称互联网巨子的当年四大搜索引擎在搜索自己公司的名字时，居然只有一个能使之出现在搜索结果的前十名内，其余全被“祥林嫂”们挤跑了。

就是在这种情况下，1996 年初，谷歌公司的创始人，当时还是美国斯坦福大学研究生的佩奇 (Larry Page) 和布林 (Sergey Brin) 开始了对网页排序问题的研究。这两位小伙子之所以研究网页排序问题，一来是导师的建议（佩奇后来称该建议为“我有生以来得到过的最好建议”），二来则是因为他们对这一问题背后的数学产生了兴趣。

网页排序问题的背后有什么样的数学呢？这得从佩奇和布林看待这一问题的思路说起。在佩奇和布林看来，网页的排序是不能靠每个网页自己来标榜的，无论把关键词重复多少次，垃圾网页依然是垃圾网页。那么，究竟什么才是网页排序的可靠依据呢？出生于书香门第的佩奇和布林（两人的父亲都是大学教授）想到了学术界评判学术论文重要性的通用方法，那就是看论文的引用次数。在互联网上，与论文引用相类似的显然是网页链接。因此，佩奇和布林萌生了一个网页排序的思路，那就是通过研究网页间的相互链接来确定排序。具体地说，一个网页被其它网页链接得越多，它的排序就越靠前。不仅如此，佩奇和布林还进一步提出，一个网页越是被排序靠前的网页所链接，它的排序就也应该越靠前。这一条的意义也是不言而喻的，就好比一篇论文被诺贝尔奖得主所引用，显然要比被普通研究者所引用更说明其价值。依照这个思路，网页排序问题就跟整个互联网的链接结构产生了关系，正是这一关系使它成为了一个不折不扣的数学问题。

思路虽然有了，具体计算却并非易事，因为按照这种思路，想要知道一个网页 W_i 的排序，不仅要知道有多少网页链接了它，而且还得知道那些网页各自的排序——因为来自排序靠前网页的链接更“值钱”。但作为互联网大家庭的一员，W_i 本身对其它网页的排序也是有贡献的，而且基于来自排序靠前网页的链接更“值钱”的原则，这种贡献与 W_i 的排序有关。这样一来，我们就陷入了一个“先有鸡还是先有蛋”的循环之中：想要知道 W_i 的排序，就得知道与它链接的其它网页的排序，而想要知道那些网页的排序，却又首先得知道 W_i 的排序。

为了打破这个循环，佩奇和布林采用了一个很巧妙的思路，即分析一个虚拟用户在互联网上的漫游过程。他们假定：虚拟用户一旦访问了一个网页后，下一步将有相同的几率访问被该网页所链接的任何一个其它网页。换句话说，如果网页 W_i 有 N_i 个对外链接，则虚拟用户在访问了 W_i 之后，下一步点击这些链接中任何一个的几率均为 $1/N_i$。初看起来，这一假设并不合理，因为任何用户都有偏好，怎么可能以相同的几率访问一个网页的所有链接呢？但如果我们考虑到佩奇和布林的虚拟用户实际上是对互联网上全体用户的一种平均意义上的代表，这条假设就不象初看起来那么不合理了。那么网页的排序由什么来决定呢？是由该用户在漫游了很长时间（理论上为无穷长时间）后访问各网页的几率分布来决定，访问几率越大的网页排序就越靠前。

为了将这一分析数学化，我们用 $p_i(n)$ 表示虚拟用户在进行第 n 次浏览时访问网页 W_i 的几率。 显然，上述假设可以表述为（请读者自行证明）：

$$p_i(n+1) = \Sigma_j\, p_j(n) p_{j\rightarrow i}/N_j$$

这里 $p_{j\rightarrow i}$ 是一个描述互联网链接结构的指标函数 (indicator function)，其定义是：如果网页 W_j 有链接指向网页 W_i，则 $p_{j\rightarrow i}$ 取值为 1，反之则为 0。显然，这条假设所体现的正是前面提到的佩奇和布林的排序原则，因为右端求和式的存在表明与 W_i 有链接的所有网页 W_j 都对 W_i 的排名有贡献，而求和式中的每一项都正比于 p_j，则表明来自那些网页的贡献与它们的自身排序有关，自身排序越靠前（即 p_j 越大），贡献就越大。

随机矩阵在谷歌算法里占据了重要的地位

为符号简洁起见，我们将虚拟用户第 n 次浏览时访问各网页的几率合并为一个列向量 p_n，它的第 i 个分量为 $p_i(n)$，并引进一个只与互联网结构有关的矩阵 H，它的第 i 行第 j 列的矩阵元为 $H_{ij} = p_{j \to i}/N_j$，则上述公式可以改写为：

$$p_{n+1} = Hp_n$$

这就是计算网页排序的公式。

熟悉随机过程理论的读者想必看出来了，上述公式描述的是一种马尔可夫过程 (Markov process)，而且是其中最简单的一类，即所谓的平稳马尔可夫过程 (stationary Markov process)[1]，而 H 则是描述转移概率的所谓转移矩阵 (transition matrix)。不过普通马尔可夫过程中的转移矩阵通常是随机矩阵 (stochastic matrix)，即每一列的矩阵元之和都为 1 的矩阵（请读者想一想，这一特点的“物理意义”是什么？）[2]。而我们的矩阵 H 却可能有一些列是零向量，从而矩阵元之和为 0，它们对应于那些没有对外链接的网页，即所谓的“悬挂网页”(dangling page)[3]。

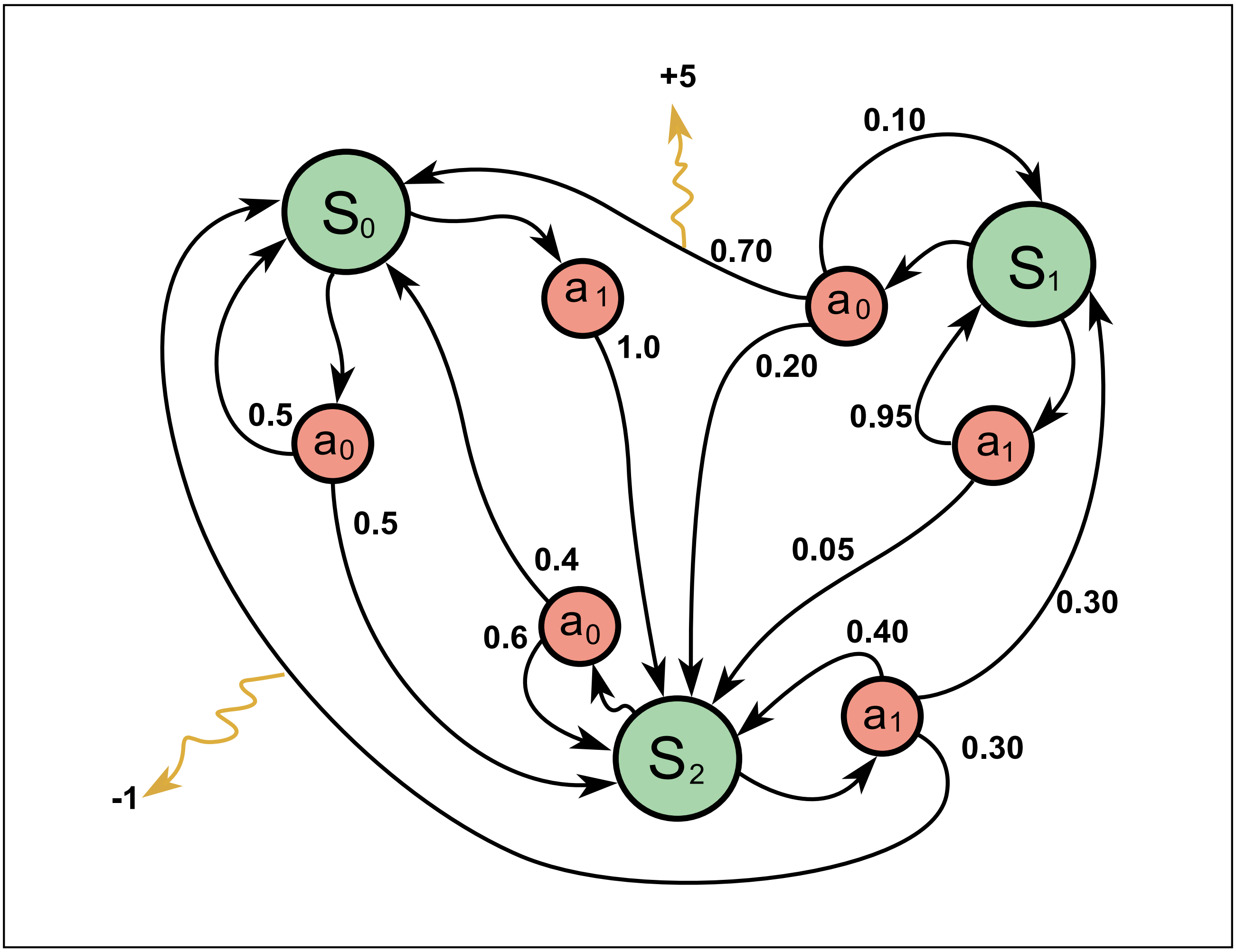
上述公式的求解是简单得不能再简单的事情，即：

$$p_n = H^n p_0$$

其中 p_0 为虚拟读者初次浏览时访问各网页的几率分布（在佩奇和布林的原始论文中，这一几率分布被假定为是均匀分布）。

如前所述，佩奇和布林是用虚拟用户在经过很长（理论上为无穷长）时间的漫游后访问各网页的几率分布，即 $\lim_{n\to\infty} p_n$，来确定网页排序的。这个定义要想管用，显然要解决三个问题：

1. 极限 $\lim_{n\to\infty} p_n$ 是否存在？
2. 如果极限存在，它是否与 p_0 的选取无关？
3. 如果极限存在，并且与 p_0 的选取无关，它作为网页排序的依据是否真的合理？



马尔可夫过程(Markov process)在谷歌算法里占据了重要的地位。我们称离散的马尔可夫过程为马尔可夫链；其在各个时刻的状态转变由一个概率矩阵所控制。这是一个马尔可夫链的例子。

如果这三个问题的答案都是肯定的，那么网页排序问题就算解决了。反之，哪怕只有一个问题的答案是否定的，网页排序问题也就不能算是得到满意的解决。那么实际答案如何呢？很遗憾，是后一种，而且是其中最糟糕的情形，即三个问题的答案全都是否定的。这可以由一些简单的例子看出。比方说，在只包含两个相互链接网页的迷你型互联网上，如果 $p_0 = (1, 0)^T$，极限就不存在 (因为几率分布将在 $(1, 0)^T$ 和 $(0, 1)^T$ 之间无穷振荡)。而存在几个互不连通（即互不链接）区域的互联网则会使极限——即便存在——与 p_0 的选取有关（因为把 p_0 选在不同区域内显然会导致不同极限）。至于极限存在，并且与 p_0 的选取无关时它作为网页排序的依据是否真的合理的问题，虽然不是数学问题，答案却也是否定的，因为任何一个“悬挂网页”都能象黑洞一样，把其它网页的几率“吸收”到自己身上（因为虚拟用户一旦进入那样的网页，就会由于没有对外链接而永远停留在那里），这显然是不合理的。这种不合理效应是如此显著，以至于在一个连通性良好的互联网上，哪怕只有一个“悬挂网页”，也足以使整个互联网的网页排序失效，可谓是“一粒老鼠屎坏了一锅粥”。

为了解决这些问题，佩奇和布林对虚拟用户的行为进行了修正。首先，他们意识到无论真实用户还是虚拟用户，当他们访问到“悬挂网页”时，都不可能也不应该“在一棵树上吊死”，而是会自行访问其它网页。对于真实用户来说，自行访问的网页显然与各人的兴趣有关，但对于在平均意义上代表真实用户的虚拟用户来说，佩奇和布林假定它将会在整个互联网上随机选取一个网页进行访问。用数学语言来说，这相当于是把 H 的列向量中所有的零向量都换成 e/N（其中 e 是所有分量都为 1 的列向量，N 为互联网上的网页总数）。

百度的创始人李彦宏

如果我们引进一个描述“悬挂网页”的指标向量 (indicator vector) a，它的第 i 个分量的取值视 W_i 是否为“悬挂网页”而定，如果是“悬挂网页”，取值为 1，否则为零，并用 S 表示修正后的矩阵，则：

$$S = H + ae^T/N$$

显然，这样定义的 S 矩阵的每一列的矩阵元之和都是 1，从而是一个不折不扣的随机矩阵。这一修正因此被称为随机性修正 (stochasticity adjustment)。这一修正相当于剔除了“悬挂网页”，从而可以给上述第三个问题带来肯定回答（当然，这一回答没有绝对标准，可以不断改进）。不过，这一修正解决不了前两个问题。因此，佩奇和布林引进了第二个修正。他们假定，虚拟用户虽然是虚拟的，但多少也有一些“性格”，不会完全死板地只访问当前网页所提供的链接。具体地说，他们假定虚拟用户在每一步都有一个小于 1 的几率 α 访问当前网页所提供的链接，同时却也有一个几率 1-α 不受那些链接所限，随机访问互联网上的任何一个网站。用数学语言来说（请读者自行证明），这相当于是把上述 S 矩阵变成了一个新的矩阵 G：

$$G = \alpha S + (1-\alpha)ee^T/N$$

这个矩阵不仅是一个随机矩阵，而且由于第二项的加盟，它有了一个新的特点，即所有矩阵元都为正（请读者想一想，这一特点的“物理意义”是什么？），这样的矩阵是所谓的素矩阵 (primitive matrix)[4]。这一修正因此被称为素性修正 (primitivity adjustment)。

经过这两类修正，网页排序的计算方法就变成了：

$$p_n = G^n p_0$$

这个算法能给上述问题提供肯定答案吗？是的，它能。因为随机过程理论中有一个所谓的马尔可夫链基本定理 (Fundamental Theorem of Markov Chains)，它表明在一个马尔可夫过程中，如果转移矩阵是素矩阵，那么上述前两个问题的答案就是肯定的。而随机性修正已经解决了上述第三个问题，因此所有问题就都解决了。如果我们用 p 表示 p_n 的极限 [5]，则 p 给出的就是整个互联网的网页排序——它的每一个分量就是相应网页的访问几率，几率越大，排序就越靠前。

这样，佩奇和布林就找到了一个不仅含义合理，而且数

学上严谨的网页排序算法，他们把这个算法称为 PageRank 不过要注意的是，虽然这个名称的直译恰好是“网页排序”。但它实际上指的是“佩奇排序”，因为其中的“Page”不是指网页，而是佩奇的名字。这个算法就是谷歌排序的数学基础，而其中的矩阵 G 则被称为谷歌矩阵 (Google matrix)。

细心的读者可能注意到了，我们还遗漏了一样东西，那就是谷歌矩阵中描述虚拟用户“性格”的那个 α 参数。那个参数的数值是多少呢？从理论上讲，它应该来自于对真实用户平均行为的分析，不过实际上另有一个因素对它的选取产生了很大影响，那就是 $G^n p_0$ 收敛于 p 的快慢程度。由于 G 是一个 N×N 矩阵，而 N 为互联网上——确切地说是被谷歌所收录的——网页的总数，在谷歌成立之初为几千万，目前为几百亿，是一个极其巨大的数字。因此 G 是一个超大型矩阵，实际上是人类有史以来处理过的最庞大的矩阵。对于这样的矩阵，$G^n p_0$ 收敛速度的快慢是关系到算法是否实用的重要因素，而这个因素恰恰与 α 有关。可以证明，α 越小，$G^n p_0$ 的收敛速度就越快。 但 α 也不能太小，因为太小的话，“佩奇排序”中最精华的部分，即以网页间的彼此链接为基础的排序思路就被弱化了（因为这部分的贡献正比于 α），这显然是得不偿失的。因此，在 α 的选取上有很多折衷的考虑要做，佩奇和布林最终选择的数值是 α＝0.85。


谷歌公司创始人佩奇（左）和布林（右）

以上就是谷歌背后最重要的数学奥秘。与以往那种凭借关键词出现次数所作的排序不同，这种由所有网页的相互链接所确定的排序是不那么容易做假的，因为做假者再是把自己的网页吹得天花乱坠，如果没有真正吸引人的内容，别人不链接它，一切就还是枉然 [6]。而且“佩奇排序”还有一个重要特点，那就是它只与互联网的结构有关，而与用户具体搜索的东西无关。这意味着排序计算可以单独进行，而无需在用户键入搜索指令后才临时进行。谷歌搜索的速度之所以快捷，在很大程度上得益于此。

在本文的最后，我们顺便介绍一点谷歌公司的历史。佩奇和布林对谷歌算法的研究由于需要收集和分析大量网页间的相互链接，从而离不开硬件支持。为此，早在研究阶段，他们就四处奔走，为自己的研究筹集资金和硬件。1998 年 9 月，他们为自己的试验系统注册了公司——即如今大名鼎鼎的谷歌公司。但这些行为虽然近乎于创业，他们两人当时却并无长期从商的兴趣。1999 年，当他们觉得打理公司干扰了自己的研究时，甚至萌生了卖掉公司的想法。他们的开价是一百万美元。与谷歌在短短几年之后的惊人身价相比，那简直就是“跳楼大甩卖”。可惜当时却无人识货。佩奇和布林在硅谷“叫卖”了一圈，连一个买家都没找到。被他们找过的公司包括了当时搜索业巨头之一的 Excite（该公司后来想必连肠子都悔青了）。为了不让自己的心血荒废，佩奇和布林只得将公司继续办了下去，一直办到今天，这就是谷歌的“发家史”。

谷歌成立之初跟其它一些“发迹于地下室”(one-man-in-basement) 的 IT 公司一样寒酸：雇员只有一位（两位老板不算），工作场所则是一位朋友的车库。但它出类拔萃的排序算法很快为它赢得了声誉。公司成立仅仅三个月，《PC Magzine》杂志就把谷歌列为了年度最佳搜索引擎。2001 年，佩奇为“佩奇排序”申请到了专利，专利的发明人为佩奇，拥有者则是他和布林的母校斯坦福大学。2004 年 8 月，谷歌成为了一家初始市值约 17 亿美元的上市公司。不仅公司高管在一夜间成为了亿万富翁，就连当初给过他们几十美元“赞助费”的某些同事和朋友也得到了足够终身养老所用的股票回报。作为公司摇篮的斯坦福大学则因拥有“佩奇排序”的专利而获得了 180 万股谷歌股票。2005 年 12 月，斯坦福大学通过卖掉那些股票获得了 3.36 亿美元的巨额收益，成为美国高校因支持技术研发而获得的有史以来最巨额的收益之一 [7]。

谷歌在短短数年间就横扫整个互联网，成为搜索引擎业的新一代霸主，佩奇和布林的那个排序算法无疑居功至伟，可以说，是数学成就了谷歌 [补注]。当然，这么多年过去了，谷歌作为 IT 界研发能力最强的公司之一，它的网页排序方法早已有了巨大的改进，由当年单纯依靠“佩奇排序”演变为了由两百多种来自不同渠道的信息（其中包括与网页访问量有关的统计数据）综合而成的更加可靠的方法。而当年曾给佩奇和布林带来过启示的学术界，则反过来从谷歌的成功中借鉴了经验，如今一些学术机构对论文影响因子 (impact factor) 的计算已采用了类似“佩奇排序”的算法。

在本文的最后，还有一件事情在这里提一下，那就是与佩奇和布林研究排序算法几乎同时，有另外几人也相互独立地沿着类似的思路从事着研究 [8]。他们中有一位是当时在美国新泽西州工作的中国人，他的算法后来也成就了一家公司——一家中国公司。此人的名字叫做李彦宏 (Robin Li)，他所成就的那家公司就是百度。这些新公司的发展极好地印证了培根 (Francis Bacon) 的一句名言：知识就是力量。

注释

1. 马尔可夫过程，也称为马尔可夫链 (Markov chain)，是一类离散随机过程，它的最大特点是每一步的概率分布都只与前一步有关。而平稳马尔可夫过程则是指转移概率与步数无关的马尔可夫过程 (体现在我们的例子中，即 H 与 n 无关)。另外要说明的是，本文在表述上不同于佩奇和布林的原始论文，后者并未使用诸如“马尔可夫过程”或“马尔可夫链”那样的术语，也并未直接运用这一领域内的定理。
2. 在更细致的分类中，这种每一列的矩阵元之和都为 1 的随机矩阵称为左随机矩阵 (left stochastic matrix)，以区别于每一行的矩阵元之和都等于 1 的所谓右随机矩阵 (right stochastic matrix)。这两者在应用上基本是等价的，区别往往只在于约定。
3. 这种几乎满足随机矩阵条件，但有些列（或行）的矩阵元之和小于 1 的矩阵也有一个名称，叫做亚随机矩阵 (substochastic matrix)。
4. 确切地说，这种所有矩阵元都为正的矩阵不仅是素矩阵，而且还是所谓的正矩阵 (positive matrix)。这两者的区别是：正矩阵要求所有矩阵元都为正，而素矩阵只要求某个正整数次幂为正矩阵。
5. 读者们想必看出来了，p 其实是矩阵 G 的本征值为 1 的本征向量，而利用虚拟用户确定网页排序的思路其实是在用迭代法解决上述本征值问题。在数学上可以证明，上述本征向量是唯一的，而且 G 的其它本征值 λ 全都满足 $|\lambda|<1$ (更准确地说，是 $|\lambda|\leq\alpha$ ——这也正是 $G^n p_0$ 的收敛速度与 α 有关的原因)。
6. 当然，这绝不意味着在网页排序上已不可能再做假。相反，这种做假在互联网上依然比比皆是，比如许多广告或垃圾网页制造者用自动程序到各大论坛发贴，建立对自己网页的链接，以提高排序，就是一种常见的做假手法。为了遏制做假，谷歌采取了很多技术手段，并对有些做假网站采取了严厉的惩罚措施。这种惩罚（有时是误罚）对于某些靠互联网吃饭的公司有毁灭性的打击力。
7. 从投资角度讲，斯坦福大学显然是过早卖掉了股票，否则获利将更为丰厚。不过，这正是美国名校的一个可贵之处，它们虽擅长从支持技术研发中获利，却并不唯利是图。它们有自己的原则，那就是不能让商业利益干扰学术研究。为此，它们通常不愿长时间持有特定公司的股票，以免在无形中干扰与该公司存在竞争关系的学术研究的开展。
8. 那些研究与“佩奇排序”的类似仅仅在于大方向（即都利用互联网的链接结构来决定网页排序），而非具体算法类似。

参考文献

1. D. Austin, How Google Finds Your Needle in the Web's Haystack.
2. J. Battelle, The Birth of Google, Wired (August 2005).
3. S. Brin and L. Page, The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine, Seventh International World-Wide Web Conference, April 14-18, 1998, Brisbane, Australia.
4. O. Ibe, Markov Processes for Stochastic Modeling, (Elsevier Academic Press, 2009).
5. A. N. Langville and C. D. Meyer, Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings, (Princeton University Press, 2006).
6. C. Rousseau and Y. Saint-Aubin, Mathematics and Technology, (Springer, 2008).

补注

有些读者对“是数学成就了谷歌”这一说法不以为然，认为是佩奇和布林的商业才能，或将数学与商业结合起来的才能成就了谷歌。这是一个见仁见智的问题，看法不同不足为奇。我之所以认为是数学成就了谷歌，是因为谷歌当年胜过其它搜索引擎的地方只有算法。除算法外，佩奇和布林当年并无其它胜过竞争对手的手段，包括商业手段。如果让他们去当其它几家搜索引擎公司的老总，用那几家公司的算法，他们是不可能脱颖而出的；而反过来，如果让其它几家搜索引擎公司的老总来管理谷歌，用谷歌的算法，我相信谷歌依然能超越对手。因此，虽然谷歌后来确实用过不少出色的商业手段（任何一家那样巨型的公司都必然有商业手段上的成功之处），而当年那个算法在今天的谷歌——如正文所述——则早已被更复杂的算法所取代，但我认为谷歌制胜的根基和根源在于那个算法，而非商业手段，因此我说“是数学成就了谷歌”。

聊聊数学家的故事

ukim
（连载四）

写给那些，喜欢数学和不喜欢数学的人们
写给那些，了解数学家和不了解数学家的人们

故事十七：法国数学家的故事（1）

法国的数学家故事多就可想而知了。从最天才的人谈起，他就是群的创始人——伽罗华（Galois）。

伽罗华一共参加了两次法国高等理工（Ecole Polytechnique）的考试。第一次，由于口试的时候不愿意做解释，并且显得无理，结果被拒了。他当时大概十七八岁，年轻气盛，大部分东西的论证都是马马虎虎，一般懒得写清楚，并且拒绝采用考官给的建议。第二次参加高等理工的考试，他口试的时候，逻辑上的跳跃使考官Dinet感到困惑，后来伽罗华感觉很不好，一怒之下，把黑板擦掷向Dinet，并且直接命中。伽罗华的天才是不可否认的，不过性格却不甚完美，而后者在高等理工考试中很重要。最后和伽罗华决斗的那个人，是当时法国最好的枪手，伽罗华的勇气令人钦佩。两个人决斗的时候，相距25步，伽罗华被击中了腹部。

伽罗华 (1811-1832), 法国数学家

在一次法国国王接见柯西（Cauchy）的时候，他有五次回答国王的问题时都这样说：“我预料陛下将问我这个问题，所以我准备好了答案。”然后，他从口袋里拿出笔记本，照本宣读。

法语是一种让人恐怖的语言。伯克霍夫（Birkhoff）是上个世纪初美国最著名的数学家之一，一个西方人学习法语，按照常理说应当有一定的优势，不过当他老人家去了法国的时候，还是遇到了麻烦。

哈达玛（Hadamard）曾在法国主持讨论班，有很多人慕名而来，伯克霍夫就这样子来到了法国，不过他的法语实在太差。那几天，巴黎一直下雨，一天伯克霍夫见到了曼德尔勃罗伊（Mandelbrojt）问：“一周…几次？”大概中间的词他不会发音。曼德尔勃罗伊说：“两次。”“什么，两次？”

伯克霍夫 (1884-1944), 美国数学家

"是呀，礼拜二和礼拜五。""怎么可能呢？""下午三点半开始，五点之前就结束了。""这个绝对不可能！！！"这个时候伯克霍夫已经快疯了。

后来曼德尔勃罗伊才知道原来伯克霍夫问的不是讨论班的时间，而是什么时候下雨。

故事十八：法国数学家的故事（2）

说三个可爱的法国数学家爷爷当年的事情，一个是哈达玛，他是最出色的法国数学家之一，无论在几何、分析哪个方面，都是那种经常用名字来修饰"定理"这个词的人；另一个是勒贝格（Lebesgue），他是实变函数论的创始人，其对数学的贡献不言而明；还有一个叫做蒙特尔（Montel），他相对于前两个人不是那么出名，不过在复分析当中有一个极其重要的概念，叫做蒙特尔正规族，就是用他的名字命名的。

这三个人都是巴黎高等师范学校毕业的（Ecole Normale Superieure)。哈达玛是他们那一届的第二名，他一生都对那个第一名不忿，尽管那个人作为数学家来说和他绝对不是一个档次；勒贝格和蒙特尔是同一级的学生，分别是当年的第三和第二名，两个人一生都是很好的朋友，据说那个他们同一届的第一名仍然在数学方面和他们不能相提并论。

哈达玛 (1865-1963)，法国数学家

勒贝格 (1875-1941)，法国数学家

先说哈达玛的诡异嗜好。他老人家是一个狂热的蕨类植物收集者，一次他带领自己的小妹妹到阿尔卑斯山去采集这些东西，把妹妹放在一个冰河旁边，采完了之后就自己兴冲冲地回家了；他这种马虎的习惯一直改不掉，到了40岁的时候，他成功地在忘了带护照的情况下，从法国动身去了美国。当然，蕨类植物也是他一生的最爱。老年的时候，他去莫斯科访问，柯尔莫哥洛夫（Kolmogorov）和亚历山德罗夫（Aleksandrov）陪同他坐船，哈达玛忽然很兴奋地让他们靠岸，自己激动地站在船头，最后终于掉到了水里，原来他发现岸上有一种罕见的蕨类植物。

再说勒贝格和蒙特尔，他们后来工作也是在一起厮混，所以下面的事情经常发生。

一次，勒贝格打电话（那个时候有电话，大概很富有了）给蒙特尔讨论一个事情，两个人各持己见，吵了一个小时（那个时候的电话怎么收费？）也没有结果。第二天早上，勒贝格又给蒙特尔打了一个电话，说我开始同意你的说法了，然而蒙特尔说我也同意你的了，于是又开始争吵。

故事十九：几何和数学的神圣

穿过柏拉图学院的拱形门楼，首先映入眼帘的是："不懂几何者请勿入内。"

下面讲一个和倍立方有关的小故事，也就是如何用直尺圆规做一个正方体，使它的体积是给定的正方体的两倍。当然这个问题用一点域扩张的知识，就可以证明是做不到的，和三等分已知角一样的。最初，在雅典流行瘟疫，人们很恐慌，就去求助于神，神谕说要使得瘟疫消失的充要条件是把一个立方体神坛重新建为一个体积是原来两倍的神坛。按照古希腊的规矩，就是要用尺规作图。于是大家去问柏拉图（Plato），柏拉图说这是神的旨意，用来警告大家要对几何学有着足够的敬意。

回过头来说法国，法国的数学家大都对抽象的东西情有独钟。拉格朗日（Lagrange）写出了他著名的分析力学的书的时候，就骄傲地宣称书中"没

柏拉图，古代著名哲学家

有一个图”；魏依（A.Weil）在教师资格考试时，理论力学交了白卷，他认为那根本不算数学。魏依就是这个样子，皮埃尔•卡瑞尔（Pierre Carier）曾经问他哥廷根的事情，提到量子力学的时候，魏依根本不知所云，尽管当时希尔伯特、博恩（Bohn）、海森堡（Heisenberg）都在做量子论。后来，谢瓦莱（Chevally）和魏依在悼念外尔（Weyl）的时候，根本不提外尔的物理学的成就，然而大家公认外尔最有名的两本书一本是关于相对论，一本是关于量子力学。

故事二十：黎曼的故事

今天写伟大的却仅活到 39 岁的黎曼（Riemann）。在一百多年后的今天，他的思想还是能够让人们感到最强烈的震撼。在此表示深深的敬意。

因为家里特别的穷，所以黎曼从小体弱多病。黎曼的父亲是个牧师，他也打算做牧师。有一个人（据说是黎曼的中学校长）发现他在数学上比在神学上更有潜力，送给他一部勒让德（Legendre）的数论书。勒让德是一个伟大的法国数学家，他的书十分晦涩难懂。六天之后，黎曼就找到那个人把这本 859 页的名著还了，说:“这本书的确十分精彩，我已经看懂了。”这个时候黎曼只有 14 岁。

黎曼 19 岁的时候去哥廷根读神学，平时也会听一些数学的课程，他比较喜欢泡在图书馆里。一次，他在那里找到了柯西（Cauchy）的分析著作，如获至宝。读完之后，他便坦然地决定放弃神学，从此开始读数学了。

黎曼 (1826-1866), 德国数学家

故事二十一：数学家的刻苦

昨天有人批评说这个系列的文章有一种过分吹捧天才的倾向，我觉得批评得特别有道理。每一个数学家的成功除了他们的天分之外，更加让人们钦佩的是他们完全忘我的疯狂如自杀般的工作。

今天举两个牛人。西格尔（Siegal）是那种很聪明又很努力的，而小平邦彦（Kunihiko Kodaira,1954 年菲尔兹奖和 1984 年沃尔夫奖得主）曾经说自己天资不好，但是他从中学开始就是那种做事情一丝不苟全身心投入的人。他回忆自己第一次学习范•德•瓦尔登的《代数学》，几乎学不懂，然后就开始抄书，一直到抄懂为止。由此可见菲尔兹奖得主的学习方法也不见得先进，唯手熟尔。

西格尔 (1896-1981), 德国数学家

西格尔曾经说过，他可以从早上 9 点起研究数学，一直到深夜 12 点，不吃不喝，最后把一天的食物一并吃掉，弄得胃很不舒服。西格尔被小平邦彦称为“非常勤奋”，被小平邦彦称为勤奋的人，可见其勤奋程度是何等可怕。

小平邦彦一天的生活（1949 年 4 月 19 日）：8:00 起床，剃须，穿西服，外出早餐（玉米片，牛奶，咖啡）；散步到研究所，大约 9:30；9:40 至 10:40：西格尔的关于三体问题的课；11:15 至 12:00：外尔的讨论班；到食堂吃午饭；坐车去普林斯顿，1:20 至 2:20：在自己的讨论班上讲论文；回家继续写论文；5：30：到街上的餐馆吃饭；回家继续工作到深夜。

小平邦彦 (1915-1997), 日本数学家

翰林外史

连载三

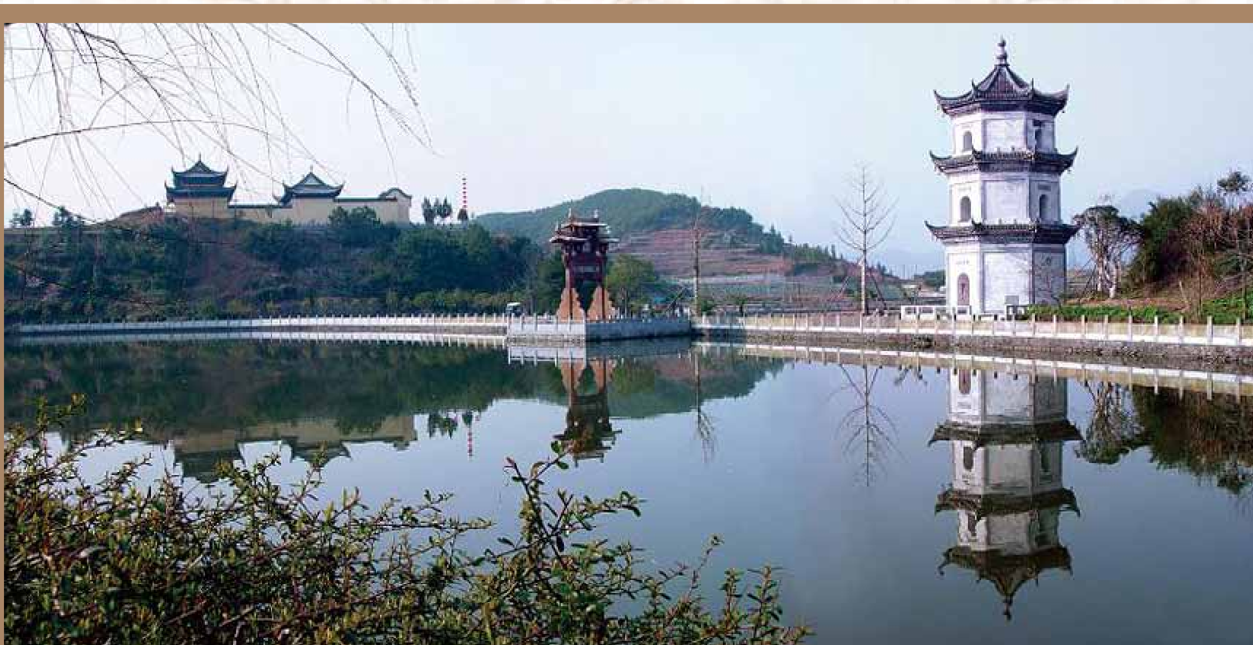
数学家江泽涵和安徽江村

朱铭

江泽涵于1902年10月6日出生于安徽省旌德县，其家乡江村是一个偏僻山村。童年时他进过私塾，后又上过乡村小学。他奋发好学，学业突出。1919年初，他的堂姐夫、大学者胡适回乡探亲，他于是跟胡适来到北方求学。

江村，隶属安徽省旌德县白地镇，总面积9.2平方公里，现有人口2300人，是江泽民主席的祖居地，始建于隋末唐初，是一个具有1300多年历史的文化古村。江村水口由狮山和象山把守，狮山古庙和文昌宝塔，一如杭州灵隐寺与雷峰塔，山光村影与诗碑堤栏，袅袅垂柳与依依秀荷相映成画。村内牌坊、祠堂、老街、名人故居基本保存完好，千年古韵依旧，特别是江氏宗祠，飞檐重阁，雕梁画栋，古朴威严。“黄峰晓日”、“天都耸翠”、“箬岭晴雪”、“狮山著雨”、“羊冈夕照”，景色旖旎，如诗如画，“溥公祠”、“父子进士坊”、“进修堂”、“喑然别墅”、“茂承堂”、“笃修堂”、“江泽涵故居”、“江冬秀故居”等修缮完毕，喜迎来客。江氏宗谱，历时千载，全套22本，被史学家称为中国三大宗谱之一。江村景秀人杰，可谓皖南大地上一颗璀璨夺目的明珠。

身处徽文化的边缘地带，江村的魅力并不仅仅在于它是一个千年古村落，更在于它所特有的文化现象，一种历经数百年之久却挥之不去的文气馨香。仅以近代而论，江村许多人的名字就为自然科学界、社会科学界研究者耳熟能详。譬如：江志伊，又名莘农，光绪二十四年（公元1898年）进士，授翰林院编修，著有《沈氏玄空学》四卷和《农书述要》16卷；江朝宗，清代末年京城九门提督，民国期间还曾出任过短期国务总理；江亢虎，原名绍铨，民国时期社会党领袖，早年曾任北洋编译局总办，兼任《北洋官报》总纂，后在北



1	
2	3
4	

图 1：江村风光

图 2：聚秀湖处于江村村口，又称荷花塘

图 3：江氏宗祠

图 4：江村特色的牌坊群

江泽民 2001 年 5 月访问江村

京创办四所女子学堂，曾多次会晤过列宁、托洛茨基，被美国总统威尔逊亲授博士之衔，主要著作有《洪水集》、《缚虎集》、《新俄游记》；江希舜，海内外颇有名声的“人痘接种法”的发明者，医学家；江泽澍，跟随孙中山先生为国捐躯的海军肇和舰将领；江绍原，又名绍平，宗教学和民俗学家，早年毕业于北京大学，是鲁迅挚友，五四运动骨干，后两次留学美国，获芝加哥大学硕士、加利福尼亚大学哲学博士学位，是《语丝》发起人和主要撰稿人之一；江泽涵，中国代数拓扑学的主要创建人，1930 年获得美国哈佛大学博士学位，回国后任北京大学数学系教授、系主任，他把拓扑学引进了中国，所著《拓扑学引论》是中国人编写的第一部拓扑学教材，1979 年出版《不动点类理论》使我国不动点类理论研究在国际上处于领先地位。此外，江村知名人士还有抗日先驱、革命烈士江上青；江泽涵嫡亲堂姐、胡适夫人江冬秀等。

江泽民担任国家主席期间，曾访问过江村。在一篇题为《江泽民主席安徽旌德江村行》的报道中，有以下的介绍：“2001 年 5 月 21 日上午 10 时 25 分至 55 分，时任中共中央总书记、国家主席、中央军委主席江泽民，在曾庆红、曾培炎等人的陪同下，来到了黄山脚下的古村落旌德县江村进行视察。……江泽民一到江村，首先来到了江村历史文化展览室内，听取了导游刘四清关于江村区位、历史、名人等方面的介绍，江泽民一边听讲、一边不断点头，特别是当导游介绍到江希舜、江泽涵时，更感兴趣。…… 当江泽民一行参观江村展览室后，有人提议：‘总书记，题个字吧！’江泽民笑着说：‘江姓，五百年前是一家。’…… 其间，江泽民还问到：‘旌’字怎么写？旁边有人说：方字旁，右上是个人，下面是个生字。”

报道中下面的这段文字也很有趣：“江泽民在江村时，十分重视江村的历史文化保护工作，…… 在看到‘胡适对联’时，导游刘四清朗读了胡适写的这幅对联，‘为民族主义努力奋斗，于传种问题积极研求。’江泽民问道：‘是真迹吗？’刘四清回答说：‘是真迹。’江泽民说：‘要注意保存好。’在溥公祠，他仔细参观展览的一些史料和陈设，许多史料他未曾见过，感到很新鲜。特别是对那部丰厚的家谱及墙上挂的那幅唐伯虎画的祖宗像尤感兴趣。他一边看，一边问话，极为仔细。并嘱咐大家，一定要重视历史文物的保护工作。在参观江氏宗祠时，巍峨雄伟的宗祠内的雕梁画栋，有一些被‘文革’被坏，江泽民痛心地说：‘文化大革命真没有文化！’”

身处旌德西乡的江村，东面与绩溪一山之隔，南行不远即达太平县境，徽文化影响显而易见，而来自近邻绩溪的

胡适夫人江冬秀故居

影响更是深刻：宋景德四年（公元 1007 年），绩人首建书院——桂枝书院，这不仅是绩溪历史上第一个书院，也是安徽省最早的书院。宋元丰年间，史称“唐宋八大家”之一的苏辙知绩溪县事，在他的倡导下，绩溪文风蔚起，书院大兴，社学和私塾也纷纷建立，此后，邑人对文化的追求经久不衰。明代全县书院 57 所，居省内前列。清光绪间邑人首建毓才坊女校，开创安徽女子学校的先河。重视教育的结果必然是人才辈出，文化氛围日深，人文荟萃，名士如林：宋代文学大家胡仔，名臣胡舜陟，元代诗人舒由叶，明代户部尚书胡富，工部尚书胡松，兵部尚书胡宗宪，清代宦海“三奇士”邵绮园、程秉钊、胡铁花，还有两大墨家、一代巨贾和礼学“三胡”。近代名人首推国学大师、五四运动的先驱胡适，以及图书馆学家洪范五、古典小说标点创始人汪原放，小说家章依萍，建筑学家程士范，诗人汪静之，出版家汪孟邹和王子野等。众所周知，绩溪也是胡锦涛主席的祖居地。

而江村与绩溪历史上亲缘关系也十分密切，绩溪人胡适的夫人江冬秀就是江村人，江泽涵就是被胡适夫妇带去北京上中学的（见《胡适研究从录》三联书社 1989 年第一版，第 5 页《回忆胡适的几件事》，江泽涵著）。江冬秀的母亲“吕贤英是庙首吕朝瑞（探花）、吕佩芬翰林的后裔，”（引自《胡适研究从录》，三联书社 1989 年第一版，第 62 页《胡适的夫人江冬秀》）。

被胡适夫妇带去北京的江泽涵，当年夏天考入天津南开中学二年级，并且只用了三年时间，就修完了中学的全部课程。1922 年，江泽涵升入南开大学数学系，开始了他漫长的数学生涯。在南开大学，他幸遇中国近代数学的先驱，数学家和教育家姜立夫教授，并从此师从姜立夫先生。1926 年大学毕业后，姜立夫带他去厦门大学数学系，让他当自己的助教。

在姜立夫的鼓励和督促下，江泽涵参加了 1927 年夏清华大学留美专科生的考试，考取了那年唯一的学数学的名额，并于当年赴美，在哈佛大学数学系攻读博士学位。他刻苦努力，第二年就赢得了哈佛研究院数学系“约翰·哈佛学侣”的荣誉称号。他的博士论文导师是数学家 H. M. 莫尔斯（Morse）。那时，莫尔斯的临界点理论刚问世不久。该理论深刻揭示了拓扑学在分析学中的重要作用，引起江泽涵对拓扑学产生浓厚兴趣，从此他专心致力于这门新兴的学科。1930 年他获得哈佛大学博士学位，随后到普林斯顿大学数学系，做 S. 莱夫谢茨（Lefschetz）的研究助教，跟这位拓扑学大师研究不动点理论。

在几年的留学生活中，江泽涵从两位数学大师那里学到了当时最前沿的数学理论。1931 年，北京大学理学院新任院长刘树杞先生经姜立夫先生推荐，邀请江泽涵到北京大学任教。江泽涵把这看作实现自己抱负的机会。当时，莱夫谢茨也曾劝他留下来继续做研究助教，但他决定学习姜立夫先生学成回国的榜样，谢绝了莱夫谢茨的挽留，当年夏天他回国，到北京大学任数学系教授。

1949 年江泽涵正在瑞士进修，此时北京和平解放了，是否要回北京成为他面临的重大抉择，他决心回到北京为祖国效力。据他的远房堂妹江春泽在 2002 年第 6 期《炎黄春秋》中述及的江泽涵夫妇的回忆，当时胡适从美国给江泽涵拍去一个电报，要他“到台湾去”（Go to Taiwan），但他回北京的决心已定，只在回国途经香港时，买了一张限期 5 天的往返机票，去台北探望江冬秀和老师姜立夫以及北大的老同事。老同事们都劝他留下，还有人想把他扣留在台北的国民党中央研究院工作。但是江冬秀却坚决支持他回北京，她顶撞想扣留江泽涵的台湾大学校长傅斯年说：“泽涵的工作在北大，泽涵的妻儿在北京。”姜立夫也支持他回北京（姜立夫本人随后也借口寻机回大陆了）。由于江冬秀的明确态度，傅斯年只好放行。

江泽涵最重要的工作是在不动点理论方面的研究。不

动点理论是20世纪数学发展中的重大课题之一。江泽涵和他的学生姜伯驹一起提出自映射的伦型概念，证明尼尔森数具有伦型不变性。在他的指导下，姜伯驹和石根华在尼尔森数的计算和尼尔森数的实现问题上取得了重大突破。他们的工作打破了50年来国际上这个课题研究工作长期停滞的状态，从而在国际上得到很高的评价，同行称他们为拓扑学界的一个新的“中国学派”。美国数学家R．布朗（Brown）在他的一本专著《莱夫谢茨不动点定理》中专门用两章的篇幅介绍了他们的结果。1978年，江泽涵和姜伯驹、石根华一起，以他们在不动点理论方面的出色工作获得了中国科学大会奖。

江泽涵是中国数学会的创始人之一，从1935年该会成立时起，他就是副理事长，直到1983年改任名誉理事长。1955年起他任中国科学院数理学部委员（院士）。

江泽涵总是千方百计地为自己身边的年轻人创造发展的条件。1946年北京大学迁回北平时，他从各地聘来了一大批年轻教员，以充实北京大学的教师队伍。不久，陈省身在中央研究院组织拓扑学的研究，他又让许多聘来的教师转到中央研究院。例如廖山涛、孙以丰、马良等都是他推荐给陈省身的。 程民德也于1946年被聘来北京大学，江泽涵第二年就推荐他投考李氏奖学金，后赴美国普林斯顿大学攻读博士学位。1978年，系里要派出第一批去美国的访问学者。当时江泽涵已70多岁，并且正和姜伯驹一起带三名研究生。为了让姜伯驹不失去出国访问的好机会，江泽涵亲自徒步走到当时的系主任丁石孙家，要他千万不要顾虑自己的身体和工作，一定要让姜伯驹出国访问。

姜伯驹院士是北京大学教授，是著名数学家姜立夫的公子。姜立夫是陈省身和江泽涵的恩师，其子又成为学生的学生，这也算数学界的一段佳话。

江泽涵的堂姐江冬秀，比他大12岁，他由江冬秀带大，关系十分密切。堂姐夫胡适对他照顾有加。在他考取南开中学前，胡适请北大英语系的学生为他补习英文，请北大绩溪同乡为他补习数学，语文则由胡适亲自指导。江泽涵得到博士学位后，时任北大文学院院长的胡适又协助他完成回国到北大任教的愿望。江泽涵在西南联大时，时任驻美大使的胡适购得一本拓扑学专著《维数论》，立即用航空快件寄到昆明。江泽涵接到书后，如获至宝，马上组织同事学生阅读讨论，陈省身当时甚至手抄这本约165页的英文书加以研读。

当然作为胡适的亲戚，江泽涵也有痛苦的经历。1948同年12月，北平即将和平解放之际，胡适的小儿子胡思杜决定留在北京。江冬秀为此感到很难过，只好给胡思杜留下许多细软和金银首饰，说是让他结婚时用。不久，胡思杜便被安排到华北革命大学（中国人民大学前身）“学习改造”。

江泽涵院士（左）和老师姜立夫院士合影于燕南园51号寓所

临走前，他把母亲留给他的一皮箱细软和金银首饰寄存到堂舅江泽涵那儿。1950年9月22日，胡思杜在《大公报》上发表《对我父亲——胡适的批判》一文，斥责自己的父亲是“帝国主义走狗及人民公敌”，表示要与之划清界线，断绝往来。此事在海内外引起了一场极大的震动，许多媒体纷纷报道，身在美国的胡适大受打击，亦大为尴尬。随后，胡思杜被分配到唐山铁道学院，在马列主义教研组资料室任主任。

反‘右’之前，胡思杜因为想入党，就积极、主动地给他所在院、部的领导提了关于教学改革的建议，但马上学院领导把他定为‘右派’分子。批斗大会开了许多次，他精神上崩溃了，于1957年9月21日“上吊自杀”！

年仅36岁的胡思杜死了，而身居海外的胡适一家更是无从得知音讯。1957年6月4日胡适在美国纽约预立遗嘱时还在第六条里写道：“去年以后，如果留有遗产，留给夫人江冬秀女士，如江女士先行去世，则留给两子胡祖望、胡思杜，如两子仅一人留在，则留给该子。如两子均已去世，则留给孙子。”胡适直到1962年病逝台北，也不知道他的小儿子在大陆已经“畏罪上吊自杀”了！而在那个年代自身难保的江泽涵也爱莫能助，只能以泪洗面。人间悲剧啊。

数学界还有两位旌德籍江姓人；一位是函数论、泛函分析专家江泽坚（1921—2005），一位是概率与数理统计学家江泽培（1923-2004）。这两位是亲兄弟，江泽坚于1938年秋以初中毕业学历越级考人西南联大数学系；江泽培1941年考入西南联大。由于两人在上海出生，之后在南京受的教育，所以他们小时候和江泽涵没有联系。碰巧的是，三位堂兄弟因数学在西南联大喜相逢。江泽坚是吉林大学数学学科主要创始人之一、原吉林大学数学研究所所长。江泽培毕业后长期任教于北京大学，其间曾于1955年至1958年在莫斯科大学进修概率论，是我国随机过程和过程统计研究

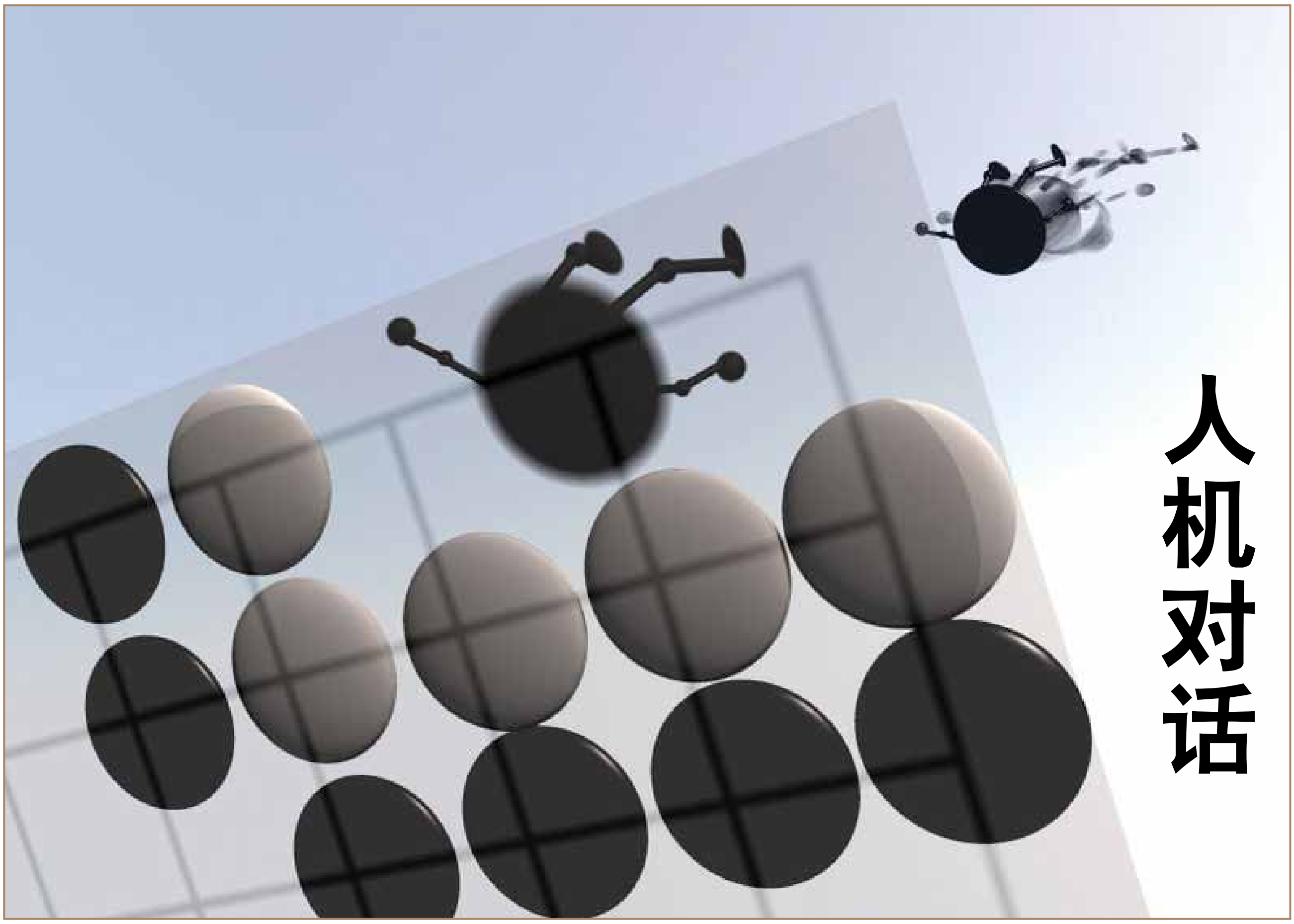
江泽涵院士（左）和学生姜伯驹院士 1985 年在一起讨论问题

领域的先驱之一。可喜的是，江泽涵和江泽培这两位堂兄弟在美丽的燕园相伴了近半个世纪。

江泽涵 1927 年与蒋守方结婚，生有三子，均为科技人才，学有所成。夫人系留美数学硕士，是江先生的得力助手，于 1994 年 3 月 29 日病故，享年 89 岁；江泽涵同月逝世，享年 92 岁。夫妻恩爱，共同生活 67 年，同年同月携手而走，也谱写了一段数学人美满人生的佳话。

江村的农家子弟江泽涵离去了，但家乡江村的父老乡亲们却永远地怀念他。2002 年在江先生百年诞辰之际，安徽《新安晚报》发表专文“从江村走出的第一位院士"，纪念这位皖籍杰出人物。文章的结尾写道，江先生不愧是一代宗师，是江村人又一杰出代表。江村的江泽涵故居是家乡人们保留的永恒的纪念。

[注：在本文的写作过程中，得到江泽涵先生的弟子姜伯驹院士以及江先生的公子江丕权教授和江丕栋教授的支持。在此表示感谢。]



人机对话

万精油

“人战胜了机器”，这曾是美国围棋协会电子杂志的一个小标题。说是一个职业五段在九乘九的棋盘上以二比一战胜围棋程序ＭＯＧＯ。读到这里，稍微有一点围棋程序常识的人或许会问，有没有搞错？这说的是围棋程序吗？最好的围棋程序不是都要被让十几子的吗？不会是国际象棋或五子棋吧？或者又是墨绿那样的虚幻东西。千真万确，这是实实在在的围棋程序，不是只存在于虚幻世界里的墨绿。

说到墨绿，就必需要提到深蓝甚或它的前辈，浅蓝或者淡黄。我们还是从头说起。

让计算机下棋一直都是人工智能的一个重要课题之一。先是从简单的跳棋，五子棋之类的搞起，后来搞国际象棋，围棋。虽说这些程序属于人工智能范畴，但实际上它们并没有多少“智”的部分，主要部分都是在可行范围内搜索。各种研究也大都是怎样使搜索更快更有效。它们缺乏“智”的部分的根本原因是我们自已就不是太清楚人类以怎样的形式思考。比如你写一个名字问一个计算机系主任，这人是不是他系里的教授。系主任马上就可以回答是或不是。如果你问计算机，计算机也可以马上正确地回答是或不是。但计算机的方式是把这个名字与系统里所有名字比较以后得出的答案。计算机搜索很快，全走一遍几乎可以瞬间完成。但我们知道系主任是不可能在短时间内把系里所有教授的名单过一遍的。类似的问题还可以更进一步，如果有人拿一张照片问你这辈子有没有见过这个人。一般情况下，你会很快告诉他有或没有。可是我们不能想象你在短时间内把你这辈子（包括孩提时代）见过的人都检查一遍。那么你是怎样得出结论的呢？我们对此还不是完全清楚。

懂计算机算法的人会说，计算机也不用把全部名单走一遍。它可以搞一种

深蓝（Deep Blue）是由 IBM 开发，专门用以分析国际象棋的超级电脑。1997 年 5 月曾击败国际象棋世界冠军卡斯巴罗夫（图左）。

映射，拿到名字后直接到映射位置找这个人（所谓 Hash Table）。或者把东西分类按类别排除，几下就找到相应的位置（比如 K-D Tree）。或者在各种目标间加上大大小小的联接，然后按联接排序。诸如此类的聪明方法都是人类在不懂得自己怎样思维的情况下设计出来的，试图达到人类的思维效果。这些方法有用也很有效，在很多方面都有应用。但当要搜索的空间实在太大（做表已经行不通）时，这些方法就不灵了，速度不够，内存也跟不上。

人的大脑当然不可能存下这些大空间的东西。但人的大脑有一个很大的优点，那就是“模式识别”（Pattern Recognition），不需要用到大搜索空间。前面的例子说明一个人看见一张照片，几乎马上就可以知道他以前有没有见过这个人，不需要把他从前见过的人都过一遍。再举一个真实的例子。在去年我参加的一个中国人的新年晚会上，有人用黑管吹出“大海航行靠舵手”的曲子。虽然几十年没有听过这个曲子了，但下面的几乎所有人都马上跟着哼起来。大家不需要在大脑里把以前听过的所有曲子过一遍来检索到这个曲子。你或许要说这些东西大脑里都存着，只不过它有很快的方法搜到那里。这“很快的方法”就是我们想要知道的。但我说的“模式识别”还不只是这些。再举一个没有事先储存的例子。比如你去一个你常去的网站，打开网站后出现一整页的标题或文章（以前从来没见过）。如果里面有任何地方提到你的名字（或 ID），你几乎马上就会注意到，并不需要你去一个字一个字地读整页内容。这种“模式识别”能力计算机（或者说现在的人工智能）是没有的。所以，遇到大空间搜索问题计算机就显得很弱。

再回到下棋的问题。下棋的时候棋盘上可走的地方很多，但下棋的人并不是每种走法都去考虑。比如一般情况下就不会有人去考虑在死角位置上走一子会有什么结果。那么哪些位置需要考虑，哪些位置不需要考虑，这就是“模式识别”问题。计算机没有这种功能，只好所有的位置都考虑，于是就产生了几乎无穷大的搜索空间问题。几十年以前的国际象棋程序就处于这种情况。因为大面积搜索不可行，就只能用一些自己设计的判别模式进行选择性地搜索（模仿人的思维）。选择不见得对，搜索又不彻底，结果当然不会好到哪里去。所幸的是，计算机领域里有一个莫尔规律（Moore's Law），说是计算机的速度（以及别的相关能力）每一年半就会翻倍。几十倍上百倍地翻下去，以前速度和空间不可行的搜索后来就变得可及或可行了。到了一九九七年，IBM 的深蓝就硬是用“硬搜索”（Brute Force）打败了人类国际象棋最高手卡斯巴罗夫（Kasparov）。当然深蓝还请了一些国际象棋专家指点判别程序，但主要靠的还是硬搜索。

讲围棋怎么扯到国际象棋去了？我们现在就回头来讲围棋。

深蓝的方法可不可以平移到围棋上来？一般的共识是不可以。这里面有两个问题。

第一个是搜索空间。围棋的变化空间比国际象棋大很多数量级。有人估计围棋的变化空间是 10 的 170 次方，相应的国际象棋变化空间是 10 的 120 次方，差别是 10 的 50 次方。古人在形容很大的数的时候常用的一个词是“恒河沙数”，因为沙是他们知道的最小的东西，而恒河是它们知道的最大的河。按《孙子算经》大数单位算，恒河沙数等于 10 的 52 次方。这是受佛经影响的抽象单位，实际恒河沙数没有那么大。按物理学家卡尔•萨根估计，地球上所有沙滩上的沙粒数目可能是 10 的 20 次方。就算恒河占其中十分之一，也就是 10 的 19 次方。大至算一下，如果恒河中的每一颗沙都是一条恒河，把这 10 的 19 次方条恒河组合成一条大恒河。这大恒河的沙数是 10 的 38 次方。围棋复杂度与国际象

棋复杂度的比例就是这大恒河与其中一颗沙的比例再乘上一万亿倍。10 的 170 次方可以与什么来比呢？现代人知道原子当然比沙要小很多，最大的东西也不能大于可观测到的宇宙。有人算过，可观测到的宇宙中的原子个数大约是 10 的 80 次方。假设每个原子就是一个宇宙，把这些所有宇宙中的原子个数加起来仍然不够 10 的 170 方。有了这些背景，从现实意义来说，我们完全可以把围棋的变化空间 10 的 170 次方当成无穷大，可望而不可及。当然，围棋程序并不需要搜索到底，只需要搜索到人类下棋时搜索的深度就可以了。

如果要让一个围棋程序达到与深蓝同样深度的搜索，对计算机速度的要求是一百万倍以上。这不是一两个莫尔规律可以解决的问题。

第二个问题，也是更严重的问题，就是判别好坏的问题。国际象棋的好坏可以有比较明显的判别方法，比如吃掉对方的皇后基本上应该算是好棋。事实上深蓝的判别更简单，搜索到几十步以后数子。如果某种走法剩的子数多，这种走法就算好（子数当然是加权过的，比如皇后算九个兵之类的）。可是围棋没有很好的优劣判别方法。一个子的好坏或许要到几十步以后才显示出来，或者与盘上十几格以外的子有关（比如征子的情况）。而且吃子也不见得就一定是好事。

搜索空间大和判别优劣难这两个问题加起来，几乎就完全否定了深蓝的方法在围棋上的应用。

由于意识到“硬搜索”在围棋上行不通，几乎所有围棋程序设计者都选择走“人工智能”的路。也就是模仿人类的思维，搞模型识别，算死活，背定式等等。由于没能真正搞清楚人类

美籍华人许峰雄是深蓝的创造者与主要设计者

的思维方法，这些模仿都不是很成功。这些方法产生的最佳程序仍然处于很初等的阶段，以至于我这样的一般围棋爱好者左手让它九子也没有问题。很多人甚至认为有生之年看不到战胜人类最高手的围棋程序了。比如台湾的应昌期先生就没能在他的有生之年看到哪怕是战胜业余初段的围棋程序，他放出的一百万美元大奖至今也没人能领。

在大家对围棋程序的前途悲观失望的时候，深蓝的主要创造者许峰雄放出话来：十年之内可以看到战胜人类最高手的围棋程序。他的观点发表在 IEEE 的杂志上。如果是别人放出这种话，我一定把它当成痴人说梦，不去理会。但许峰雄不是一般人，他腰下插着深蓝的金牌，说话还是有份量的。他的文章至少值得一读。

许峰雄说大家现在对“硬搜索”在围棋程序上不抱希望，就象几十年前大家对国际象棋程序一样。纯“人工智能”的路现在看来效果不是很好，而“硬搜索”却有很大潜力。我们都清楚，只要搜的足够深，“硬搜索”产生出来的程序是可以很强大的，不信可以去问一问卡斯巴罗夫。深蓝的搜索深度是，普遍搜索 12 层，特殊搜索 40 层以上。据他估计，一个围棋程序要达到深蓝的搜索深度必需搜索 10 的 19 次方个节点。这看起来是一个可望而不可及的数，但他认为是可以有办法把它拿下的。他的这个结论主要有四个支撑点。

第一点，用 Alaph-Beta 搜索。Alpha-Beta 不是什么新东西，计算机科学家很早就发明出来。其主要思想是，在搜索某个节点时发现如果继续搜下去最好结果也不会好于到现在为止在别的节点上搜到的最好结果，那就没有必要继续搜下去。比如这一步棋让对

豪华的蒙特卡罗（Monte-Carlo）赌场，曾是贵族的休养地，还是摩纳哥皇家的外交场。科学家们用蒙特卡罗这个名字命名了现今最有名的一个随机算法。MO 就是 Monte-Carlo 的前两个字母，GO 就是英文围棋的名字。

方一大块死棋变活，大概就没有搜下去的必要。这个 Alpha-Beta 搜索可以把搜索空间缩小到平方根，也就是从 10 的 19 次方到 10 的 9.5 次方。

第二点，加入零空间搜索。所谓零空间搜索相当于停走一步。我们看围棋比赛，偶尔会听见观战者说这个时候即使白棋停走一步，黑棋也没得下，意思是白棋赢多了。零空间搜索就是这个意思。由于国际象棋的特殊规则（有时停走一步反到有优势），深蓝不能采用零空间搜索。但围棋完全可以采用零空间搜索。如果停走一步还有很大优势，则这一路搜索就有很大价值（或者很没有价值，如果停走的是对方的话）。据他说加入零空间搜索又可以把搜索空间开方。而且这个优势是深蓝没有的。

第三点，重复利用已有知识。比如一块棋活了，就不用老去算它的死活，除非附近有新情况发生。这个“除非”在国际象棋上出现太多，因为棋盘太小，所以不好用。判断“除非”所用的时间以及上下传递已知信息所花的时间使它的利用得不偿失。但围棋棋盘大，很多时候一块棋的死活与别处无关，如果再用特殊硬件加速已知信息的交流，这个优势在围棋程序上就可以很大。

最后一点又是莫尔规律。他说深蓝过去十年了。现在的新技术几乎可以把与深蓝有同等能力的计算机放到一个 PC 上（深蓝用的是 480 个加有平行结构的超级处理器），再过十年，速度又可以提高 100 倍。假如再加上几百个平行结构的联接，则又可以提高几百倍。

把以上几点加在一起，可以消掉在深蓝搜索范围内围棋与国际象棋的一百万倍的差别。十年以后我们将会有一个与深蓝有同等能力的围棋程序。如果假设围棋职业棋手与国际象棋职业棋手搜索的深度一样的话，那么这个程序就可以打败人类最高手。

许峰雄是高手，他的话应该有一定的

围棋 MOGO 程式 19 路围棋，首度打败台湾职业九段棋王周俊勋，双方各胜一场。

可信度。他说他的研究生已经开始着手这方面的工作了。但是他的文章里始终没谈判别好坏问题，而我认为这是一个关键问题。因为没有搜索到底，始终都存在判断好坏的问题。搜索到 12 步或者 40 步以后怎样决定结果的好坏。四五十步棋的时候中盘或许刚开始，怎样判断什么是好什么是坏。这个问题大概得输入一些专家知识。相当于当初深蓝让国际象棋大师作顾问。许峰雄现在在中国，找专家当然不是什么难事。

对这个没搜索到底的问题有疑虑的人还不少。象我这样的人只是问一问，另外有些人就要想法设计四十步以后的判断算法。还有些人更进一步，干脆搜索到底。且慢，你刚才不是说搜到底是无穷大吗？怎么有人可以搜索到底。这又要扯到人工智能的另一个方法：模拟。

围棋是完全信息游戏。不象桥牌或 Poker，总有未知因素。桥牌要考虑牌形分布，大牌的位置等等。Poker 的未知因素就更明显，虽说手上的 2，7 是最烂的牌，但如果 Flop 出来 7，7，2，你的牌马上就变成强牌。围棋没有这个问题，对弈双方可以使用的一切招术以及结果都没有未知成分。可是，虽说没有未知成分，但因为没有人能够算到底，这些公开的信息并不是清楚地摆在双方的面前。想得深的就多一些信息，想得浅的就少一些信息。下棋时对方给你设圈套就是指望你算不到那么深。好象一口井，只有竹杆够长的人才能打到里面的水。有些问题，比如围棋程序问题，深一点或许不够，希望能深入到底。可是太多的路径选择又不允许每条路径都走到底。这时候我们就采用一种叫做随机模拟的方法。其基本思想是，虽然不能每条路都走到底，但选择一些路走到底是可以的。在每个分岔点我们都随机的选一些岔道走下去。走到底以后看结果。如果某个结点后随机选的岔道都显示这是一条好路，从概率上来说这是一条好路的可能性就很大。这种随机模拟的算法在很多方面都有应用，尤其是在物理和工程上。第二次世界大战时美国的一批造原子弹的物理学家（费米，冯•诺依曼等）给这种随机模拟方法取了一个响亮的名字叫 Monte-Carlo。这是欧洲以赌场闻

名的一个城市名字。这种算法和赌场都靠大量的随机结果为其工作原理。

本文最开始说的围棋程序 MOGO 就是基于这种原里。MO 就是 Monte-Carlo 的前两个字母，GO 就是英文围棋的名字。这个程序不需要背任何定识，做任何模式识别。只是随机地在棋盘上选许多点，走一步以后再随机的选许多点，一直这样把一盘棋下完，然后数子。因为一直走到底，胜负已经很清楚，不需要任何判断。如果某个点以后随机选择的路径以最大胜率结束，这个点就被认为是最有利的点，程序就选这一步。顺便说一句，MOGO 的前辈（第一个在这方面有成就的程序）叫做疯棋（Crazy Go），我觉得这个名字恰如其分。这个看似疯狂而且简单的原理居然弄出惊人的结果。首先是在计算机围棋比赛中战胜了所有其它对手。在此之前，计算机围棋程序的冠军几乎一直都是陈志行教授写的［手谈］。陈志行教授自己是围棋高手，又是计算机专家，把自己的许多想法都注入了［手谈］，所以，它能打败同类的其它程序。［手谈］可以说是一个典型的“人工智能”程序。没想到这个“人工智能”高手遇到这么一个没有任何“智能”成分的傻瓜程序却无能为力。这一方面说明［手谈］的所谓“人工智能”还有很多缺陷，另一方面也说明 MOGO 的算法有一定道理。

不光是对计算机程序，这种完全随机的模拟方法对人类也有优良表现。正规的 19 路棋盘现在对它们来说还太大，于是从小棋盘开始。中国旅欧职业五段棋手郭娟与 MOGO 的前身疯棋在小棋盘上下了很多盘。在 7 X 7 的棋盘上，疯棋执白从来不输，执黑也偶尔能赢。在 9 X 9 的棋盘上与郭娟下了 14 盘，9 胜 5 负。成绩还是很拿得出手的。MOGO 比疯棋又进化了一步，在最近的一次计算机围棋程序比赛上，MOGO 与疯棋的新版疯子（Crazy Stone）进行冠亚军决赛，MOGO 大胜。看来 MOGO 要比疯棋强很多。所以当另一职业五段 2 胜一负战胜 MOGO 时就成了大新闻。

出于好奇，我把 MOGO 与疯子的决赛棋谱调出来看了一下，同时发现一些可喜和可忧的部分。可喜的是 MOGO 似乎能产生有很强的大局观的棋。对方在角上压过来时它居然会脱先去占大场，而且这个大场不是三路或四路，而是在五路上。只看布局，很有武宫正树宇宙流的风格。在对杀时还能走出单立这样的好棋。可忧的是它毕竟没有什么智能，走到后来简直惨不忍睹，或者说愚不可及，比一个刚学棋一天的人都不如。毕竟它们是一点智力都没有。从这一点上看，这条路还有得一阵走。另外，从小棋盘到大棋盘进发的问题，还是由莫尔规律来掌握其进度吧。

写到这里，正好看到记者采访聂卫平谈到围棋程序，聂卫平说围棋程序不是还处在随便一个人都可以让二十多子的水平吗？看来聂卫平需要有人给他更新一下有关围棋程序水平的认识了。

MOGO 与许峰雄的“硬搜索”都是朝非传统人工智能的方向走。如果有朝一日走出一个没有任何智能却能打败人类最高手的程序，真的是一种悲哀。所以有人在围棋网络上呼吁程序员们不要继续这种程序，要给人类留一块圣地。我想，挡是挡不住的，呼吁也没有用。人们在前进的道路上总是要在不同的路径上进行探索。［手谈］是一条路，疯棋又是一条路，还有别的许多路，我个人认为墨绿是更好的路。不同的路都走一走，才知道哪条路好。从某种意义上来说，人类的进步不也正是一种 Monte-Carlo 过程吗？

GO，MOGO！ GO，MORE GO。

注：有兴趣的读者可以到以下网址读到相关文章：

许峰雄：Cracking Go http://spectrum.ieee.org/oct07/5552

MOGO 与疯子对局 http://www.grappa.univ-lille3.fr/icga/round.php?tournament=167&round=7&id=2

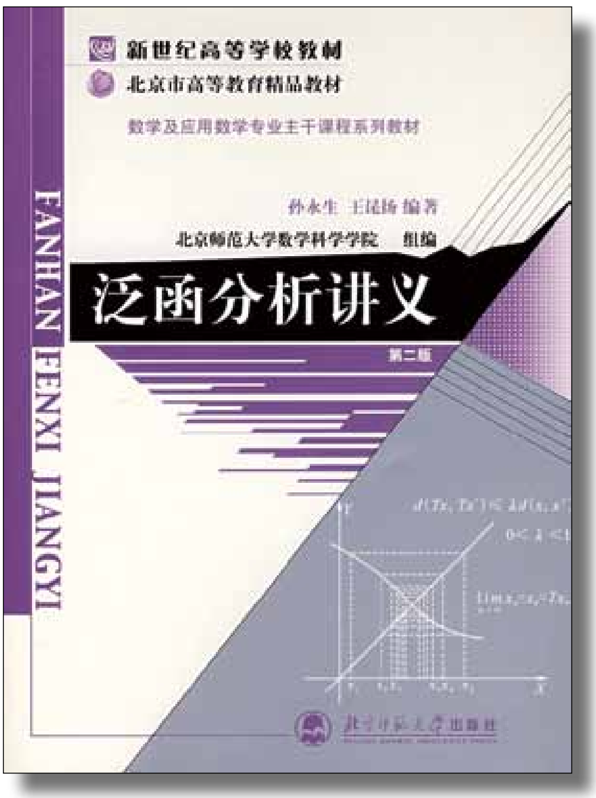
墨绿 http://www.zhipingyou.com/qqsh/index.php?topic=280.0

又注：这篇文章已经写了近三年了。这三年来围棋程序又有了进步。MOGO 在 9X9 棋盘上战胜了台湾的围棋世界冠军周俊勋，而且在 19X19 棋盘上被让 7 子的情况下战胜周俊勋。这已经有业余 3 段的能力。其它的近况可以参见 http://en.wikipedia.org/wiki/Computer_Go

源于科技，面向科技

——再读孙永生和王昆扬著《泛函分析讲义》有感

蒋迅



在科学计算和工程计算中，我们常常涉及“误差”，比如受力误差、受热误差、轨道误差等，对于诸如汽车和飞机这样的对象，其三角剖分可能多到成千上万个节点，我们通常不是指某一个点上的受力误差、受热误差、轨道误差，那么我们是如何定义“误差”的呢？学过泛函分析的人就会知道，我们指的是在某种范数意义下的误差，是一个整体意义上的量值。我学过很多理科、工科和计算机方面的课程，《泛函分析》是我学过的最最重要的课程之一。20多年来，我家搬了许多次，每次搬家时都会舍弃一些自认为不会再用到的书籍，但孙永生先生的《泛函分析讲义》一直跟着我。2007年12月，北京师范大学出版社再版了孙永生先生和王昆扬先生的《泛函分析讲义》。当我看到这个新的版本后，我更觉得应该把它推荐给广大的现在或将来从事科技或工程工作的读者。

我修这门课程是在1981年，是北师大在粉碎“四人帮”之后第一次开这门课，由孙永生先生讲授，王昆扬先生辅导。当时没有教材和讲义，同学们都是快速地记笔记。先生上课不看讲稿，在黑板上的演算、推理走笔迅速，大家都说，先生一定没有讲稿，整个《泛函分析》都在他的脑子里。这样过了半个学期，直到有一天，先生推导一个定理时，三个标码 i、j、k 乱了，这才第一次拿出了书包里的讲稿，我们大家都目瞪口呆。下课后我专门去看了一下他的讲稿，厚厚的一打，每页都写满了清秀的钢笔字。整个一年这样的事只发生了两次。这就是第一版的《泛函分析讲义》的初稿。先生在这门课结束后又将讲稿加以整理并由其他老师多次试用。在此基础上才有了第一版的《泛函分析讲义》，而这已经是四年以后了。由此可见先生认真负责的态度。

后来我跟随孙永生先生和王昆扬先生读硕士学位，在学逼近论理论中更深刻体会到了这本《泛函分析讲义》的重要性。很显然，这本《泛函分析讲义》已经很好地为读者进一步学习逼近论、数值分析和调和分析等研究生课程在抽象的范畴里做好了准备。有些在研究生课程里引入的新概念已经在《泛函分析讲义》里打下了伏笔。最为精彩的是积分算子在不同条件下和不同空间里的反复讨论和 Fourier 级数


孙永生教授(1929-2006)，中国第一批博士导师。


王昆扬教授，北京师范大学教授，博士导师。

的展开和收敛，既体现了泛函分析的威力，又使得学生们自然而然地对逼近论和调和分析这两个传统课题发生兴趣，许多在做研究中使用的技巧在这本书里已经学到。一切都变得顺理成章，抽象的概念不再抽象，复杂的推导不再复杂。

本书各章配备了从简到难的习题，有的是为了强化概念，有的是为了练习常用演算技巧。我当时把习题通通做了一遍，记得有一道题特别难，超出了本书的范围。这道题在第二版里已经取消。第一版还有一本习题解答《〈泛函分析讲义〉附册》，也是由北京师大出版社出版的。解答并不是把所有的题目都做一遍。有的题目只给了提示，有的则连提示都没有。想照抄解答的人是达不到目的的。那本解答还有一个特点：它增加了一些新的习题并提供了1985、1987和1988年的北京师大研究生入学考试泛函分析试题。学生们可以通过这些练习评估自己的真实水平。听说第二版的习题解答也将出版。我想这对学生们的学习一定大有好处，对任课老师也很有参考价值。

王昆扬先生继承了孙永生先生严谨治学的优良传统，他在多次实际教学过程中认真观察总结教学经验，又于第二版出版时在原来的基础上做了一些调整，内积空间提前了，紧接在距离空间和线性赋范空间之后，这样的处理可以让学生更直观并巩固范数的概念；线性算子写进了第三章的标题，使得这个重要概念得到了应有的加强；习题分配到了各个小节，使学生做作业时更有针对性，例题和习题的数量也增加了。这些大都在“第二版编者的话”里提到了。从第一版到第二版，历时21年，这再一次说明了孙永生先生和王昆扬先生严谨的治学态度。

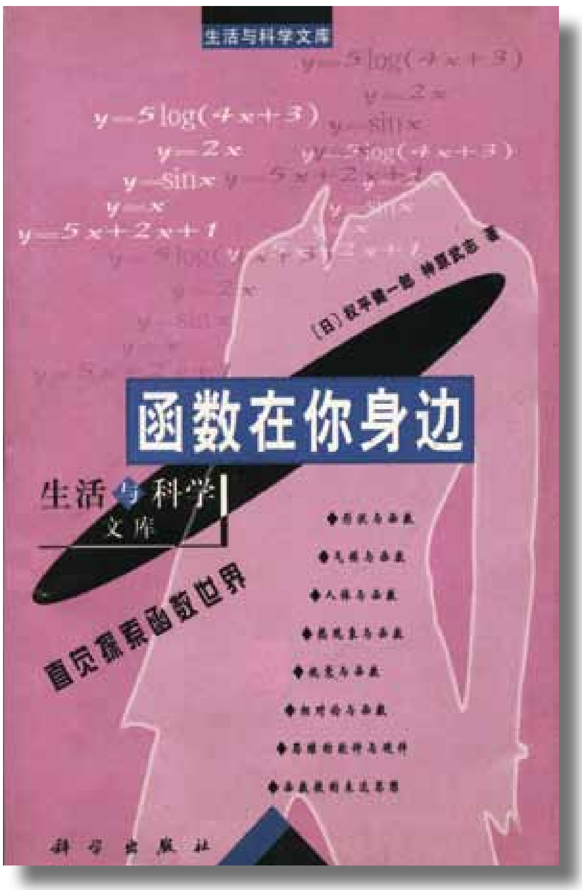
还有两个重要的特点应该提到，一个是书中的基本概念都有英文对照，参考文献目录里也有一半是英文书籍，这对于希望上研究生的学生无疑是一件好事；另一个是在第二版里增加了索引。我感觉中国以前的专业书籍不太重视索引。其实索引应该是科技书籍的一个必不可少的组成部分。但这个索引有一点不太清楚——作者显然是将英文词按英文字母排列，中文词按笔划顺序排列，也许有个说明就更好了。但无论如何，这丝毫不影响全书的高质量。

泛函分析来自于科技，又服务于科技。孙永生和王昆扬先生编著的《泛函分析讲义》正体现了这样一个思想。正因为如此，通过这本书学习泛函分析也一定更能学到这门课的精髓，为深入数学的研究做好准备。

函数：人类的一种重要的思维方式

——评生活与科学文库丛书《函数在你身边》

赵临龙



数学在人类社会的地位和作用越来越显出它的重要性，但数学对一般大众来说，又是那么的“恐惧”。这无不说明，由于我们的数学书籍过多的强调“理论”，而远离实际生活，使数学成为“抽象、难学、无用”的学科。因此，广大的教育工作者，应加强数学理论与实际生活的联系，使数学真正成为人们“锤炼思维、富有趣味、实用必学”的学科。

2001 年 2 月，由科学出版社推出的生活与科学文库丛书《函数在你身边》(作者日本权平健一郎、神原武志，译者罗亮生、罗丽生)，由浅入深地介绍了函数概念的内在本质及其应用，使人们清楚地看到函数在日常生活中的作用，深受人们的喜爱，从 1982 出版到 1995 年期间，此书在日本再版就达 15 次。

全书 11 万字，分 4 章讨论函数的问题。第 1 章《人与函数的关系》，通过举例，说明日常生活中哪些地方出现了函数，并叙述人们对函数的看法以及介绍函数发展的历史；第 2 章《函数用在哪些方面》，针对实际问题，指出函数的概念是如何被引入实际问题中的以及讨论了函数扮演了怎样的角色；第 3 章《如何表示函数》，从数学建模角度，介绍了如何从实际问题来建立函数表达形式的方法；第 4 章《掌握用函数表达思想的方法》，从数学思维的高度，指出了函数的本质以及说明了函数对人类社会的影响。

该书并不像其它数学书籍那样，仅仅阐述函数概念以及讨论函数计算中的一些技巧。作者明确指出,“函数的功能(作用）就是人类的思维”这一新观点，并采用“把数学式省略，让函数本身在日常生活中起作用”的方法,强调函数的“广义”作用。

具体来说，本书有以下特点：

1. 生活中体现数学的趣味性。将日常生活的事用函数表达出来，体现数学源于生活，让人感受到函数的趣味性。如用函数$r=a\cos n\theta$表示人的心脏形状；又如将高高的铁塔之间的电线的“悬链线”用函数表达为$y=\frac{a}{2}(e^{x/a}+e^{-x/a})$；炮弹在真空中飞行的弹道的“抛物线”用一元二次多项式函数表达。再如大自然中，每隔 76.02 年绕太阳一周的哈雷彗星轨道表达为椭圆函数(隐函数)。而无法回归地球的彗星可沿“抛物线”(显函数)

或“双曲函数”（隐函数）轨道离开地球。若将复杂的人声和乐器声，通过纯音合成为波形，并可用函数无限表达为正弦和余弦函数的迭加，也就是我们常说的富利叶级数展开。这些处理可以很好地激发读者的学习兴趣。

2．真实的研究结果利于指导学习。作者为便于人们对函数概念的正确认识，采取调研的方法，用数量回答问题，使人信服。如对“函数是什么”进行调研，大学生回答：(1) 映射与对应有6人；(2)把变量 x 变换为 y 的操作有7人；(3) 表示因果关系有5人；(4) 诸元素之间的关系的方程有8人；(5) 表示自然与社会现象的数学式有5人。

可见，学生较多者，是将函数作为数学中的变量关系式，而将函数抽象为一种现实生活中的对应结构的较少。这与我国今天学生学习函数情况相一致，他们往往注重函数的外显形式——数学解析式，而忽视函数深层次的含义——对应思想。上述调查结果，无疑对注意加强函数内涵的教学，具有很好的说服力。

3．从史料中丰富函数的内涵。本书对函数的形成过程，做了细致的讨论，介绍了各个时期的函数概念，涉及到相关书籍：《国法词典》、《广辞花》、《百科事典》、《理论词典》及《中学数学自由自在》等。作者权平健一郎明确指出：“函数的内容在随时代而扩大，站在集合论的立场上，用对应、映射来描述函数是最好的倾向。”可见，从注意函数的形式结构，上升为重视函数的深刻思想的内在本质，才是把握函数的根本所在。

把握函数的本质，就是具有“函数意识”。作者权平健一郎将函数意识比喻为日本的剑道、柔道、和尚老道中的“道”，而道的精神在于思维，只有善于思维，才能有所创新。像笛卡儿抓住函数“对应”这一特征，创造性地将几何图形通过坐标与曲线方程建立对应关系。无怪数学家指出：“从最一般的意义上说，数学是‘关系’的科学”，这“关系”不就是深层的函数吗?

因此，人们常说：“数学是锻炼思维的体操，”而权平健一郎又指出：“函数的功能就是人类的思维。”因人类了解的事物就是了解它与其它事物的关系，“关系”的函数属性就是思维的本质。即函数般的表达思想本质是：发现事物之间的关系，至于这种关系是否能用数学式表达，则是次要的。实际上，在我们日常生活中，不能用数学式表达的函数情况比比皆是。

4．显示函数广泛的应用性。书本作为科普读物，但反映函数的应用却是多方面的，而且不乏高深的数学知识。如旋转体侧面积函数表达式的积分形式：

$$s(x)=2\pi\int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1+(\tfrac{dy}{dx})^2}\,dx\text{ ；}$$

元素的衰变率的微分方程：$\frac{dN}{dt}=-\lambda N(t)$；刺激现象结果的积分方程

$$f(t)=\int_{t_0}^{t_1} k(t-t')\varphi(t')dt'$$

等等。使人们清楚看到函数广泛地应用于各个学科领域。

当然，本书也有一些不“美满”的地方。如谈到函数是人类的思维，但用函数的对应思想处理日常事例还不足。其实，就在日本动画片《聪明的一休》中，就有“对应”的精彩片段：一次，一休遇到难题，让他在很短时间内，数清一山坡上不规则生长的树木棵数。一休开始想这很简单，让人数就是了。结果左数花了眼，右数也无法数清楚，于是他不得不开动脑筋，让伙伴到村子里，拿来数量一定的稻草，然后给每一棵树系一根稻草，最后通过稻草与树木之间的对应关系数清了树木的棵数。这真是绝妙的函数思想应用。

顺便提一下，我国徐利治教授提出关系映射反演方法：将一个实际问题通过一种关系映射为一个熟悉的问题，并将这个熟悉问题的解决结果再反演到原问题中，以最终解决问题。这是函数“对应思想”应用的典范。

此书另外一处缺憾是，在介绍函数史料时，将函数概念最终落脚到“集合”对应上，但对集合论的基础未作进一步阐述。由于罗素悖论（矛盾集合）的出现，使集合论发生危机，这就必然导致函数概念真正意义上的严格化还没有真正建立，将有待于人们继续做出艰辛的努力。这样的补充，可极大地提高人们学习函数以及数学的热情和参与意识。

作者介绍：

赵临龙，陕西安康学院数学系主任。1987年数学教育专业本科毕业，2000年取得教授职称，2006年获得陕西省教学名师荣誉。

尊敬的主编：

我这封信想谈谈重要场合的英文说明。我去年年底至今正在访问属于中国科学院的某个研究所。第一天上班，我就在园区新闻布告栏上看到不久前中共中央政治局委员刘延东女士在科学院院长路甬祥先生等陪同下参加一个国家级交叉科学研究中心成立典礼的醒目报道，并配以他们与科学家代表们的合影留念，其背景是中国科学家们一直引以为豪的那张闻名于世的毛泽东主席当年接见数学家华罗庚、生物学家童第周等人的大幅照片。我深深感染于中央领导人对将基础学科用于热门应用学科研究的极端重视，于是第二天午饭后，就以十分快乐的心情漫步到位于主楼大厅那四张引人注目的毛泽东、邓小平、江泽民、胡锦涛等四代领导人分别与华罗庚等四名科学家亲切握手的巨照前欣赏一番。照片照得绝对优美，尤其是第一张，把伟大政治家和杰出数学家的风采和气质展现得淋漓尽致。

但是，当素来仔细的我把目光射向位于照片下方的中文说明之英文翻译时，顿时诧异得几乎跳起来。这四张照片的说明，除了人名，内容都是一样的。以第一张照片为例，中文说明是“毛泽东主席与华罗庚教授亲切握手（1958）”，其对应的英文翻译为“Chairman Mao Zedong shook Hua Luogeng Kindly by hand”。这里，除了文法问题外，中文单词“教授”未被翻译，故英文翻译中有“Chairman”而没有“Professor”，缺乏中文说明中的“头衔对称性”。照片拍摄时间“(1958)”也没有顾及到英文说明部分。另外，英文单词“kindly”中的小写“k”也不规范地写成了大写“K”。

如果美国国家数学研究所所长来中国访问时看到这一张照片也会“嫉妒”中国数学家的，因为没有哪一个美国数学家，哪怕他是当代的高斯或希尔伯特，在自己的国家里会像中国的华罗庚（去年 11 月 12 日诞辰 100 周年）那样家喻户晓，令人敬佩。但是不懂中文的他只能从英文说明中去寻找照片的来龙去脉。看到毛主席对华罗庚面带微笑的慈祥面孔时，他怎么也不敢相信英文翻译的中文意思：“毛泽东主席仁慈地用手来摇动华罗庚的身体”。作为有名的数学家，他问起数学问题来大概会毫不迟疑，但此时他只好把疑问埋入心中。要不然，这些标志性照片的英文说明怎么还在上岗呢？

虽然我一直自信于英文写作能力，怀着“大胆假设，小心求证”的态度，我还是询问了在美国一直读到研究生的女儿。她赞成我与上面那句英文最接近的翻译“Chairman Mao Zedong shook hands with Professor Hua Luogeng kindly”，并说将“kindly”改成“warmly”会更好。至于照片下的翻译，她电子信中的回答是：“I've never heard of that expression before. It's probably Chinglish.”“Chinglish”是“Chinese English”的缩写，意指“中国式英语”。至于“by hand”的用法，她颇为诙谐地说道，“‘by hand’ has a mathematical connection, though. Doing a problem by hand means to work out the details using paper and pencil rather than technology.”呜呼哀哉，早已“国际化”的中国最顶尖科学研究基地之一，每年邀请成百上千海内外教授、学者的堂堂学术中心，居然对英文翻译的规范化如此忽视，在令人崇敬的毛主席的照片下犯下如此低级的“初中生英语错误”。

如果仅仅是一时的疏忽，我就不应该“如此挑剔”。且慢，无独有偶，我刚从四张巨照前调头走回，一眨眼就在贴于大厅学术布告栏上，下一周将在中国一间有名的大学校园内举办的新一届世界华人专家大会英文通知中看到一些不该有的不规范用法，比如“in December 2010”写成了“on December 2010”。通知中列出的大会组委会成员都是华人学术界赫赫有名人物、呼风唤雨之辈，但很难相信他们中的任何人仔细审查过这个通知，或许没人让他们过目过。具体操办的人员可能也没有请英文专家最后把关，没有认识到英文质量对区区一张通知的重要程度。其实，外国学者往往能从中国学者或中国学术会议通知的英文表达来推演中国人的治学态度和行事风格。古今中外，严谨的科学家也往往精于文字推敲，甚至成为语言巨匠，如一百年前的法国大数学家庞加莱。

几年前，我有次从北京机场出境，就曾向机场管理人员指出过“出入境须知”中好几处英文错误。当时我就纳闷，国内有很多想出国的大学生托福、GRE 能考满分，正如著名的“新东方学校”常引以为荣的“广而告之”那样，为什么在重要的场所常让外国人看到令人啼笑皆非的低级英文错误？首都机场是祖国的窗口，理应“窗明几净”。英语是向不懂汉语的外国人介绍中国的最合适语言，起码应做到合乎规范、准确无误，这是对文字写作的基本要求。

我们的国家越来越开放，我们的对外交流越来越频繁，这就需要我们把外文表达和外文翻译等“语言要素”充分重视起来。重要的场所、重要的活动，其外文资料一定要不逊色于母语版本。我们重要的学术会议英文通知一定要仔细推敲，切忌犯下贻笑大方的文字错误。 我们的学术会议组织者一定要成为名副其实的负责者，而不是仅仅满足于“挂名在上”。总之，我们只要把好像是不太重要的一些小事充分重视起来，就会少出现不该出现的一些遗憾。

丁 玖

2011 年 1 月 1 日

尊敬的主编：

谢谢来信并寄来关于江先生文章的初稿。文章写得很好，我很高兴地读完它。我只发现了一个错：第 71 页左 第 19 行，“ 专着”应为“ 专著”。

至于我与江教授的合照，我手边这张（见附件）质素与文中那张相比似乎不会好很多。江教授的儿子现在都在北京，我想他们应该会有一些好的照片。我下封电邮会提供他们的联系方式，请直接和他们联系。

姜伯驹

2011 年 2 月 18 日

尊敬的主编：

你好！我找到的照片已经由我哥哥江丕权发送给你。我愿意补充些情况供你参考。1979 年 9 月，江泽涵曾经回过一次家乡。好像先是在安徽芜湖先开会，可能是拓扑会议。随信附去江泽涵，吴文俊等和安徽师大数学系老师的合影。 后来他们一行去到旌德县，和县里的三好学生座谈和照相。这是他最后一次回旌德县。

另外您问的江泽坚和江泽培二人，他们是亲兄弟。他们都是在抗战时期考到西南联大后与我父亲相遇。此后就都在西南联大念书。

此外，感到文稿结尾处似乎突然中断。所说胡思杜之死，与全文的气氛，以及与文题的两个方面（江泽涵和江村）都无关。设想如果为能够切题起见，加几句与文题有关的话，可能自然一些。

现附上有关我父亲后来与旌德县的联系有关内容，供参考。

江丕栋

2011 年 2 月 20 日