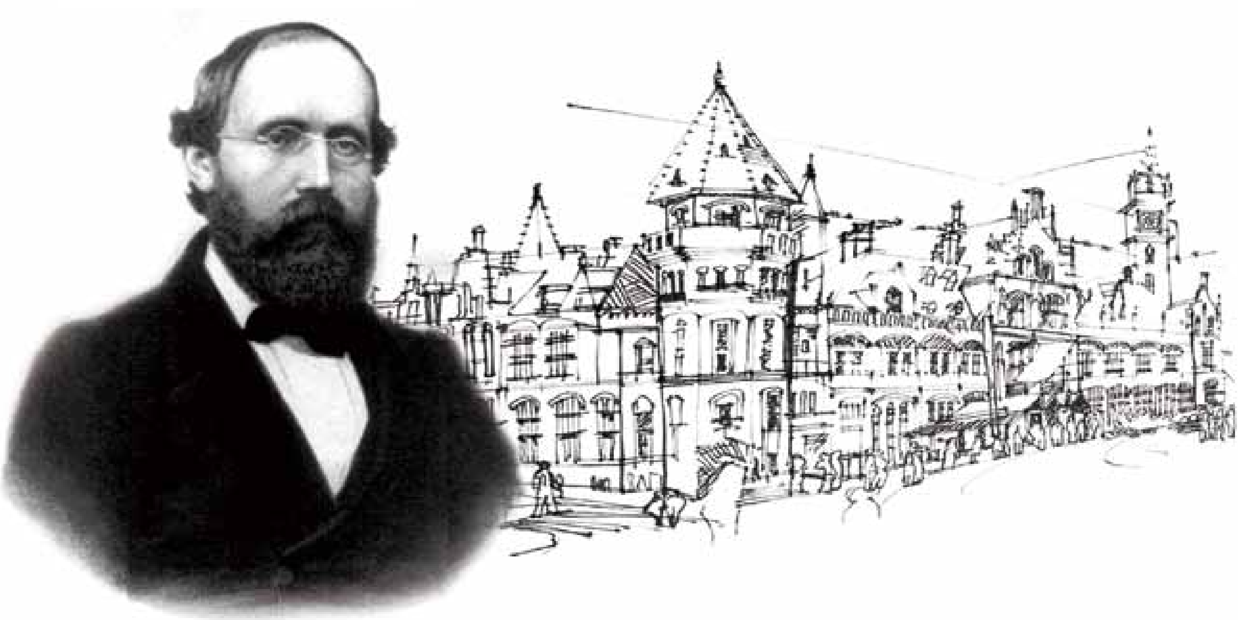
Riemann



黎曼猜想漫谈(二)

卢昌海

6 错钓的大鱼

在黎曼的论文发表后的最初二三十年里，他所开辟的这一领域显得十分冷清，没有出现任何重大进展。如果把黎曼论文的全部内涵比做一座山峰的话，那么在最初这二三十年里数学家们还只在从山脚往半山腰攀登的路上，只顾星夜兼程、埋头赶路。那高耸入云的山颠还笼罩在一片浓浓的雾霭之中，正所谓高处不胜寒。但到了 1885 年，在这场沉闷的登山之旅中却爆出了一段惊人的插曲：有人忽然声称自己已经登顶归来！

这个人叫做斯蒂尔吉斯 (Thomas Stieltjes, 1856-1894)，是一位荷兰数学家。1885 年，这位当时年方 29 岁的年青数学家在巴黎科学院发表了一份简报，声称自己证明了以下结果：

$$M(N) \equiv \sum_{n<N} \mu(n) = O\left(N^{1/2}\right)$$

这里的 $\mu(n)$ 是我们在第四节末尾提到过的莫比乌斯函数，由它的求和所给出的函数 $M(N)$ 被称为梅坦斯函数。这个命题看上去倒是面善得很：$\mu(n)$ 不过是一个整数函数，其定义虽有些琐碎，却也并不复杂，而 $M(N)$ 不过是对 $\mu(n)$ 的求和，证明它按照 $O(N^{1/2})$ 增长似乎不象是一件太困难的事情。但这个其貌不扬的命题事实上却是一个比黎曼猜想更强的结果！换句话说，证明了上述命题就等于证明了黎曼猜想（但反过来则不然，否证了上述命题并不等于否证了黎曼猜想）。因此斯蒂尔吉斯的简报等于是声称自己证明了黎曼猜想。

Riemann

斯蒂尔吉斯 (Thomas Stieltjes，1856-1894)，荷兰数学家

虽然当时黎曼猜想还远没有象今天这么热门，消息传得也远没有象今天这么飞快，但有人证明了黎曼猜想仍是一个非同小可的消息。别的不说，证明了黎曼猜想就等于证明了素数定理，而后者自高斯等人提出以来折磨数学家们已近一个世纪之久，却仍未能得到证明。与在巴黎科学院发表简报几乎同时，斯蒂尔吉斯给当时法国数学界的一位重量级人物厄米特 (Charles Hermite，1822-1901) 发去了一封信，重复了这一声明。但无论在简报还是在信件中斯蒂尔吉斯都没有给出证明，他说自己的证明太复杂，需要简化。

换作是在今天，一位年青数学家开出这样一张空头支票，是很难引起数学界的任何反响的。但是十九世纪的情况有所不同，因为当时学术界常有科学家做出成果却不公布（或只公布一个结果）的事，高斯和黎曼都是此道中人。因此象斯蒂尔吉斯那样声称自己证明了黎曼猜想，却不给出具体证明，在当时并不算离奇。学术界的反应多少有点象现代法庭所奉行的无罪推定原则，即在出现相反的证据之前倾向于相信声明成立。

但是相信归相信，数学当然是离不开证明的。因此大家就期待着斯蒂尔吉斯发表具体的证明，其中期待得最诚心实意的当属接到斯蒂尔吉斯来信的厄米特。厄米特自 1882 年起就与斯蒂尔吉斯保持着通信关系，直至十二年后斯蒂尔吉斯过早去世为止。在这期间两人共交换了 432 封信件。厄米特是当时复变函数论的大家之一，他与斯蒂尔吉斯的关系堪称数学史上一个比较奇特的现象。斯蒂尔吉斯刚与厄米特通信时只是莱顿天文台的一名助理，而且就连这个助理的职位还是靠了他父亲（斯蒂尔吉斯的父亲是荷兰著名的工程师兼国会成员）的关照才获得的。在此之前他在大学里曾三度考试失败。好不容易进了天文台，斯蒂尔吉斯却“身在曹营心在汉”，干着天文观测的活，心里惦记的却是数学，并且给厄米特写了信。照说当时一无学位、二无名声的斯蒂尔吉斯要引起象厄米特这样的数学元老的重视并不容易，但厄米特是一位虔诚的天主教徒，他恰巧对数学怀有一种奇特的信仰，他相信数学存在是一种超自然的东西，寻常的数学家只是偶尔才有机会了解数学的奥秘。那么什么样的人能比“寻常的数学家”更有机会了解数学的奥秘呢？厄米特凭着自己的神秘主义眼光找到了一位，那就是默默无闻的观星之人斯蒂尔吉斯。厄米特认为斯蒂尔吉斯具有上帝所赐的窥视数学奥秘的眼光，他对之充满了信任。在他与斯蒂尔吉斯的通信中甚至出现了“你总是对的，我总是错的”这样极端的赞许。在这种奇特信仰与十九世纪数学氛围的共同影响下，厄米特对斯蒂尔吉斯关于黎曼猜想的声明深信不疑。

但是无论厄米特如何催促，斯蒂尔吉斯始终没有

厄米特 (Charles Hermite，1822-1901)，法国数学家

公布他的完整证明。一转眼五年过去了，厄米特对斯蒂尔吉斯依然“痴心不改”，他决定向对方“诱之以利”。在厄米特提议下，法国科学院将 1890 年数学大奖的主题设为“确定小于给定数值的素数个数”。在厄米特看来，这个大奖将毫无悬念地落到他的朋友斯蒂尔吉斯的腰包里，因为这个大奖主题实质上就是证明素数定理，这比黎曼猜想弱得多。可惜直至大奖截止日期终了，斯蒂尔吉斯依然毫无动静。

但是厄米特也没有完全失望，因为他的学生哈达马（Jacques Hadamard，1865-1963）提交了一篇论文，领走了大奖——肥水总算没有流入外人田。哈达马论文的主要内容正是我们在上节中提到的对黎曼论文中连乘积公式的证明。这一论文虽然离素数定理的证明还有一段距离，却已足可获得大奖。几年之后，哈达马再接再励，终于一举证明了素数定理。厄米特放出去的这根长线虽没能如愿钓到斯蒂尔吉斯及黎曼猜想，却错钓上了哈达马及素数定理，斩获亦是颇为丰厚（素数定理的证明在当时其实比黎曼猜想的证明更令数学界期待）。

那么斯蒂尔吉斯呢？ 没听过这个名字的读者可能会觉得他是一个浮夸无为的家伙，事实却不然。斯蒂尔吉斯在分析与数论的许多方面都做出过重要的贡献。他在连分数方面的研究为他赢得了“连分数分析之父”的美誉，以他名字命名的斯蒂尔吉斯积分更是声名远播。但他那份哈代电报式的有关黎曼猜想的声明却终究没能为他赢得永久的悬念。

现在数学家们普遍认为斯蒂尔吉斯关于 $M(N)=O(N^{1/2})$ 的证明是错误的，不仅如此，甚至连命题 $M(N)=O(N^{1/2})$ 本身是否成立也已经受到了越来越多的怀疑。这是因为比 $M(N)=O(N^{1/2})$ 稍强、被称为梅滕斯 (Mertens) 猜想的命题：$M(N)<N^{1/2}$ 已于 1985 年被 Andrew Odlyzko 与 Herman te Riele 所否证。受此影响，目前数学家们倾向于认为 $M(N)=O(N^{1/2})$ 也并不成立，不过到目前为止还没人能够证明 (或否证) 这一点。

7 从零点分布到素数定理

素数定理自高斯与勒让德以经验公式的形式提出（详见第三节）以来，许多数学家对此做过研究。其中比较重要的结果是由俄国数学家切比雪夫 (Pafnuty Chebyshev，1821-1894) 做出的。早在 1850 年，切比雪夫就证明了对于足够大的 x，素数分布 $\pi(x)$ 与素数定理给出的分布 $\mathrm{Li}(x)$ 之间的相对误差不超过 11%。比这更早一些，切比雪夫还证明了：如果 $\lim_{x\to\infty}\{\pi(x)/[x/\ln(x)]\}$ 存在，它必定等于 1。切比雪夫的研究对于黎曼的工作及后来人们对素数定理的证明都有影响。

但在黎曼 1859 年的工作以前，数学家们对素数定理的研究主要局限在实数域中。从这个意义上讲，即使撇开具体的结果不论，黎曼建立在复变函数基础上的工作仅就其方法而言，也是对素数研究的一个重大突破。这一方法上的突破为素数定理的最终证明铺平了道路。

在第五节的末尾我们曾经提到，黎曼对素数分布的研究之所以没能直接成为素数定理的证明，是因为人们对黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布还知道得太少。那么为了证明素数定理，我们起码要知道多少有关非平凡零点分布的信息呢？这一点到了 1895 年随着曼戈尔特 (Hans Carl Friedrich von Mangoldt，1854-1925) 对黎曼论文的深入研究而变得明朗起来。曼戈尔特的工作我们在第五节中已经提到过，正是他最终证明了黎曼关于 $J(x)$ 的公式。但是曼戈尔特工作的价值比仅仅证明黎曼关于 $J(x)$ 的公式要深远得多。在他的研究中使用了一个比黎曼的 $J(x)$ 更简单有效的辅助函数 $\Psi(x)$，它的定义为：

$$\Psi(x)=\sum_{n<x}\Lambda(n)$$

其中 $\Lambda(n)$ 被称为曼戈尔特函数，它对于 $n=p^k$ (p 为素数，k 为自然数) 取值为 $\ln(p)$；对于其它 n 取值为 0。运用 $\Psi(x)$，曼戈尔特证明了一个本质上与黎曼关于 $J(x)$ 的公式等价的公式：

$$\Psi(x)=x-\sum_{\rho}\left(\frac{x^{\rho}}{\rho}\right)-\frac{1}{2}\ln\left(1-x^{-2}\right)-\ln(2\pi)$$

其中有关 ρ 的求和与黎曼的 $J(x)$ 中的求和一样，也是先将 ρ 与 $1-\rho$ 配对，再依 $\mathrm{Im}(\rho)$ 从小到大的顺序进行。

注 7.1

比这更早一些，切比雪夫还证明了：如果$\lim_{x\to\infty}\{\pi(x)/[x/\ln(x)]\}$存在，它必定等于1。切比雪夫的研究对于黎曼的工作及后来人们对素数定理的证明都有影响。

Riemann

很明显，曼戈尔特的 $\Psi(x)$ 表达式比黎曼的 $J(x)$ 简单多了。时至今日，$\Psi(x)$ 在解析数论的研究中差不多已完全取代了黎曼的 $J(x)$。引进 $\Psi(x)$ 的另一个重大好处是早在几年前，上文提到的切比雪夫就已经证明了：素数定理 $\pi(x)\sim \mathrm{Li}(x)$ 等价于 $\Psi(x)\sim x$（为了纪念切比雪夫的贡献，曼戈尔特函数也被称为第二切比雪夫函数）。

将这一点与曼戈尔特的 $\Psi(x)$ 表达式联系在一起，不难看到素数定理成立的条件是 $\lim_{x\to\infty}\Sigma_\rho(x^{\rho-1}/\rho)=0$。但是要让 $x^{\rho-1}$ 趋于零，$\mathrm{Re}(\rho)$ 必须小于 1。换句话说黎曼 ζ 函数在直线 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上必须没有非平凡零点。这就是我们为证明素数定理而必须知道的有关黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的信息（不过由于所处理的是无穷级数，严格的证明并不如我们叙述的那样简单）。由于黎曼 ζ 函数的非平凡零点是以 ρ 与 $1-\rho$ 成对的方式出现的，因此这一信息也等价于 $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$。

读者们大概还记得，在第五节中我们曾经证明过黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于 $0\le\mathrm{Re}(s)\le1$ 的区域内。因此为了证明素数定理，我们所需知道的有关非平凡零点分布的信息要比我们已知的 (也是当时数学家们已知的) 略多一些（但仍大大少于黎曼猜想所要求的）。这样，在经过了切比雪夫、黎曼、哈达马和曼戈尔特等人的卓越努力之后，我们离素数定理的证明终于只剩下了最后一小步：即把已知的零点分布规律中那个小小的等号去掉。这也正是我们在第五节中提到的黎曼在计算 $J(x)$ 的过程中对与零点有关的级数进行单项积分时隐含的条件。这一小步虽也绝非轻而易举，却已难不住在黎曼峰上攀登了三十几个年头，为素数定理完整证明的到来等待了一个世纪的数学家们。

曼戈尔特的结果发表的第二年（1896 年），上节提到的哈达马与比利时数学家 Charles de la Vallée-Poussin 就几乎同时独立地给出了证明，从而完成了自高斯以来数学界的一个重大心愿。那时斯蒂尔吉斯已经去世两年了。即便如此，哈达马在发表他的结果时仍然谦虚地写道，他之所以发表有关黎曼 ζ 函数在 $\mathrm{Re}(s)=1$ 上没有零点的证明，是因为斯蒂尔吉斯有关半平面 $\mathrm{Re}(s)>1/2$ 上没有零点的证明尚未发表，并且那一证明可能要困难得多。

经过素数定理的证明，人们对于黎曼 ζ 函数非平凡零点分布的了解又推进了一步，那就是：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ 的区域内。在黎曼猜想的研究中数学家们把这个区域称为 critical strip。

素数定理的证明——尤其是以一种与黎曼的论文如此密切相关的方式所实现的证明——让数学界把更多的注意力放到了黎曼猜想上来。四年后（1900 年）的一个夏日，两百多位当时最杰出的数学家会聚到了巴黎，一位 38 岁的德国数学家走上了讲台，做了一次永载数学史册的伟大演讲。演讲的题目叫做“数学问题”，演讲者的名字叫做希尔伯特 (David Hilbert，1862-1943)，他恰好来自高斯与黎曼的学术故乡——群星璀灿的哥廷根 (Göttingen) 大学。他是哥廷根数学精神的伟大继承者，一位与高斯及黎曼齐名的数学巨匠。希尔伯特在演讲稿中列出了二十三个对后世产生深远影响的数学问题，黎曼猜想被列为其中第八个问题的一部分，从此成为整个数学界瞩目的难题之一。

二十世纪的数学大幕在希尔伯特的演讲声中徐徐拉开，黎曼猜想也迎来了一段新的百年征程。

8 零点在哪里？

随着黎曼论文中的外围命题——那些被黎曼随手写下却没有予以证明的命题——逐一得到证明，随着素数定理的攻克，也随着希尔伯特演讲的聚焦作用的显现，数学界终于把注意力渐渐投向了黎曼猜想本身，投向了那座巍峨的主峰。

不知读者们有没有注意到，我们谈了这么久的黎曼 ζ 函数，谈了那么久的 ζ 函数的非平凡零点，却始终没有谈及过任何一个具体的非平凡零点。这也是黎曼论文本身一个令人瞩目的特点：即它除了没有给所涉及的许多命题提供证明外，也没有给所提出的猜想提供数值计算方面的支持。黎曼叙述了许多有关 ζ 函数非平凡零点的命题（比如第五节中提到的三大命题），却没有给出任何一个非平凡零点的数值！

倘若那些非平凡零点是容易计算的，倒也罢了，可是就象被黎曼省略掉的那些命题个个都令人头疼一样，黎曼 ζ 函数的那些非平凡零点也个个都不是省油的灯。

它们究竟在哪里呢？

直到 1903 年（即黎曼的论文发表后的第 44 个

年头），丹麦数学家个格拉姆 (Jørgen Gram，1850-1916) 才首次公布了对黎曼 ζ 函数前 15 个零点的计算结果。由于黎曼 ζ 函数在上半复平面与下半复平面的非平凡零点是一一对应的（请读者自己证明），因此在讨论时只考虑虚部大于零的零点。我们把这些零点以虚部大小为序排列，所谓“前 15 个零点”指的是虚部最小的 15 个零点。

在这 15 个零点中，格拉姆对前 10 个零点计算到了小数点后第六位，而后 5 个零点——由于计算繁复程度的增加——只计算到了小数点后第一位。为了让读者对黎曼 ζ 函数的非平凡零点有一个具体的印象，我们把这 15 个零点列在下面。与此同时，我们也列出了这 15 个零点的现代计算值（保留到小数点后第七位），以便大家了解格拉姆计算的精度：

零点序号	格拉姆的零点数值	现代数值
1	1/2 + 14.134725 i	1/2 + 14.1347251 i
2	1/2 + 21.022040 i	1/2 + 21.0220396 i
3	1/2 + 25.010856 i	1/2 + 25.0108575 i
4	1/2 + 30.424878 i	1/2 + 30.4248761 i
5	1/2 + 32.935057 i	1/2 + 32.9350615 i
6	1/2 + 37.586176 i	1/2 + 37.5861781 i
7	1/2 + 40.918720 i	1/2 + 40.9187190 i
8	1/2 + 43.327073 i	1/2 + 43.3270732 i
9	1/2 + 48.005150 i	1/2 + 48.0051508 i
10	1/2 + 49.773832 i	1/2 + 49.7738324 i
11	1/2 + 52.8 i	1/2 + 52.9703214 i
12	1/2 + 56.4 i	1/2 + 56.4462476 i
13	1/2 + 59.4 i	1/2 + 59.3470440 i
14	1/2 + 61.0 i	1/2 + 60.8317785 i
15	1/2 + 65.0 i	1/2 + 65.1125440 i

几十年来，这是数学家们第一次拨开迷雾实实在在地看到黎曼 ζ 函数的非平凡零点，看到那些蕴涵着素数分布规律的神秘家伙。它们都乖乖地躺在四十四年前黎曼划出的那条奇异的 critical line 上。格拉姆的计算使用的是十八世纪三十年代发展起来的欧拉 - 麦克劳林 (Euler-Maclaurin) 公式。欧拉 - 麦克劳林公式为：

$$\sum_{k=m}^{n} f_k = \int_m^n f(k)\,dk + \frac{1}{2}\left[f(m)+f(n)\right] + \sum_{j=1}^{\infty}\frac{B_{2j}}{(2j)!}\left[f^{(2j-1)}(n)-f^{(2j-1)}(m)\right]$$

其中 B_{2k} 为伯努利 (Bernoulli) 数 ($B_2=1/6$，$B_4=-1/30$，$B_6=1/42$，…)。欧拉 - 麦克劳林公式的成立对 $f(k)$ 有一定的要求。

在只有纸和笔的年代里，这种计算是极其困难的，格拉姆用了好几年的时间才完成对这 15 个零点的计算。但即便付出如此多的时间，付出极大的艰辛，他在后五个零点的计算精度上仍不得不有所放弃。

在格拉姆之后，R. J. Backlund 于 1914 年把对零点的计算推进到了前 79 个零点。再往后，经过哈代 (Godfrey Hardy，1877-1947)、李特尔伍德 (John Littlewood，1885-1977) 及 Hutchinson 等人的努力（包括计算方法上的一些改进），到了 1925 年，人们已经知道了前 138 个零点的位置，它们都位于黎曼猜想所预言的 critical line 上。但是到了这个时候，建立在欧拉 - 麦克劳林 (Euler-Maclaurin) 公式之上的计算已经复杂到了几乎难以逾越的程度。

9 黎曼的手稿

随着数学界对黎曼猜想兴趣的日益增加，这个猜想的难度也日益显露了出来。当越来越多的数学家在高不可测的黎曼猜想面前遭受挫折的时候，其中的一些开始流露出对黎曼 1859 年论文的一些不满之意。我们在上面提到，黎曼的论文既没有对它所提到的许多命题给予证明，又没有给出哪怕一个 ζ 函数非平凡零点的数值。尽管黎曼在数学界享有崇高的声誉，尽管此前几十年里人们通过对他论文的研究一再证实了他的卓越见解。但在攀登主峰的尝试屡遭受挫折，计算零点的努力又举步维艰的情况下，对黎曼的怀疑终于还是无可避免地出现了。

于是在承认黎曼的论文为“最杰出及富有成果的论文”之后，艾德蒙 • 朗道 (Edmund Landau，1877-1938) 开始表示：“黎曼的公式远不是数论中最重要的东西，他不过是创造了一些在改进之后有可能证明许多其它结果的工具”；于是在为证明黎曼猜想度过一段“苦日子”之后李特尔伍德开始表示：“假如我们能够坚定地相信这个猜想是错误的，日子会过得更舒适些”；于是就连胆敢用黎曼猜想跟上帝耍计谋的哈代也开始认为黎曼有关零点的猜测只不过是个猜测而已，nothing more。“Nothing more”的意思便是纯

Riemann

哥廷根大学全貌

属猜测，没有任何计算及证明依据。换句话说数学家们开始认为黎曼论文中的一切大致也就是他在这一论题上所做过的一切，他的猜想其依据的只是直觉，而非证据。

那么黎曼猜想究竟只是凭借直觉呢还是有着其它的依据？黎曼的论文究竟是不是他在这方面的全部研究呢？ 既然黎曼的论文本身没有为这些问题提供线索，答案自然就只能到他的手稿中去寻找了。

我们曾经提到，在黎曼那个时代许多数学家公开发表的东西往往只是他们所做研究的很小一部分，因此他们的手稿及信件就成为了科学界极为珍贵的财富。这种珍贵绝不是因为如今人们习以为常的那种名人用品的庸俗商业价值，而是在于其巨大的学术价值。因为通过它们，人们不仅可以透视那些伟大先辈们的“Beautiful Mind”，更可以挖掘他们未曾发表过的研究成果，那是一种无上的宝藏。

不幸的是，黎曼手稿的很大一部分却在他去世之后被他可恶的管家付之了一炬，只有一小部分被他妻子爱丽丝 (Elise Koch) 抢救了出来。爱丽丝把那些劫后余生的数学手稿大部分交给了黎曼生前的挚友、数学家戴德金 (Richard Dedekind，1831-1916)。但是几年之后，爱丽丝又后悔了，因为她觉得那些数学手稿中还夹带着一些私人及家庭的信息，于是她向戴德金索回了一部分手稿。在这部分手稿中，有许多几乎通篇都是数学，只在其中夹带了极少量的私人信息，比如一位朋友的姓名等，其中更有一本小册子是黎曼 1860 年春天在巴黎时的记录。那正是他发表有关黎曼猜想的论文后的几个月。那几个月巴黎的天气十分糟糕，很多时候黎曼都待在住所里研究数学。许多人猜测，在那段时间里黎曼所思考的很可能与他几个月前研究的黎曼 ζ 函数有关联，因此那本被爱丽丝索回的小册子中很可能记录了与黎曼猜想有关的一些想法。可惜那本数学家们非常渴望获得的小册子从此就再也没有出现过，直到今天，它的去向依然是一个谜。有人说它曾被德国数学及数学史学家贝塞尔 - 哈根 (Erich Bessel-Hagen，1898-1946) 获得过，但是贝塞尔 - 哈根死于二战后的混乱年月中，他的遗物始终没有被人找到过。

那些有幸躲过管家的火把、又没有被爱丽丝索回的手稿，戴德金将它们留在了哥廷根大学图书馆，那

Riemann

就是数学家和数学史学家们可以看到的黎曼的全部手稿 (Nachlass)。

自黎曼的手稿存放在哥廷根大学图书馆以来，陆续有一些数学家及数学史学家前去研究。但是只要想一想黎曼正式发表的有关黎曼猜想的论文尚且如此艰深，就不难想象研读他那些天马行空、诸般论题混杂、满篇公式却几乎没有半点文字说明的手稿该是一件多么困难的事情。许多人满怀希望而来，却又两手空空、黯然失望而去。

黎曼的手稿就象一本高明的密码本，牢牢守护着这位伟大数学家的思维奥秘。

但是到了 1932 年，终于有一位数学家从那些天书般的手稿中获得了重大的发现！这一发现一举粉碎了那些认为黎曼的论文只有直觉而无证据的猜测，并对黎曼 ζ 函数非平凡零点的计算方法产生了脱胎换骨般的影响，让在第 138 个零点附近停滞多年的 Euler-Maclaurin 方法相形见绌。这一发现也将它的发现者的名字与伟大的黎曼联系在了一起，从此不朽。

这位破解天书的发现者叫做西格尔 (Carl Siegel，1896-1981)，他是黎曼的同胞——一位德国数学家。

10 探求天书

西格尔是一位非常反战的德国人，早年曾因拒服兵役而遭拘压，幸亏朗道的父亲出面帮助才得重归自由。他曾计划在柏林学习天文学，因为天文学是看上去最远离战争的学科。但是入学那年的天文学课程开得较晚，为了打发时光，他去听了弗罗贝尼乌斯 (Georg Frobenius，1849-1917) 的数学课，这一听很快改变了他的人生旅途，他最终成为了一名数学家。

西格尔 (Carl Siegel, 1896-1981)，德国数学家

西格尔于 1919 年来到哥廷根，跟随朗道研究数论。当时希尔伯特的二十三个数学问题已经非常出名，而朗道本人对黎曼猜想也颇有研究，在这种环境的影响下，西格尔也开始了对黎曼猜想——希尔伯特第八问题的一部分——的研究。他对黎曼猜想的一些想法得到了希尔伯特本人的赏识，在希尔伯特的支持下，西格尔于 1922 年获得了法兰克福大学的教职。

但尽管如此，西格尔对黎曼猜想的研究并没有取得突破性的进展。正当他为此苦恼的时候，一封来自数学及数学史学家贝塞尔 - 哈根的信寄到了他的案头。贝塞尔 - 哈根当时正在研究黎曼的手稿，但和西格尔研究黎曼猜想一样苦苦得不到进展。由于贝塞尔 - 哈根自身的背景侧重于数学史，对于破解黎曼的手稿来说这样的背景显然还嫌不够，于是他想邀请纯数学家来试试，看看他们是否能有所突破。哥廷根的数学家中对黎曼猜想感兴趣的当首推希尔伯特和朗道，但这两位都是大师级的人物，贝塞尔 - 哈根自不敢贸然相扰，于是他把目光投向了正在研究黎曼猜想的西格尔，邀请他来研究黎曼的手稿。

对西格尔来说贝塞尔 - 哈根的邀请不失为一个散心的机会。另一方面，如我们在上节所说，当时数学界对黎曼及其猜想的怀疑已经开始蔓延，这种氛围也影响到了哥廷根，黎曼是不是真的只凭直觉提出他的猜想？ 这也是西格尔有意一探究竟的谜团。于是西格尔写信向哥廷根图书馆索来了黎曼的手稿。

当那位已被岁月涂抹成只凭直觉研究数学的前辈宗师的手稿终于出现在西格尔眼前的时候，他不由地想起了高斯爱说的一句话：工匠总是会在建筑完成后把脚手架拆除的。现在他所看到的正是一位最伟大工匠的脚手架，任何人只要看上一眼就绝不会再相信那些有关黎曼只凭直觉研究数学的传言。只可惜那些散布传言的数学家们——包括与黎曼手稿近在咫尺的睿智的哥廷根数学家们——竟然谁也没有费心来看一眼这些凝聚着无比智慧的手稿！

在黎曼的手稿中，西格尔发现了黎曼论文中只字未提的黎曼 ζ 函数的前三个零点的数值！（后来的一

Riemann

哥廷根大学数学系

些数学史学家甚至认为，黎曼可能计算过多达 20 个零点。）很显然，这表明黎曼的论文背后是有着计算背景的。黎曼的这一计算比我们在第八节中提到的格拉姆的计算早了 44 年。这倒也罢了，因为格拉姆对零点的计算虽比黎曼的晚，但精度却比黎曼的高得多。但是西格尔对黎曼计算零点的方法进行了细致的整理研究，却吃惊地发现黎曼所用的方法不仅远远胜过了格拉姆所用的欧拉 - 麦克劳林公式，也远远胜过了哈代和李特尔伍德对欧拉 - 麦克劳林公式的改进。一句话，黎曼用来计算零点的方法远远胜过了数学界已知的任何方法！当时已是 1932 年，距离黎曼猜想的提出已有 73 个年头，距离黎曼逝世也已有 66 个年头，黎曼又一次跨越时间远远地走到了整个数学界的前面。而且黎曼的这一公式是如此的复杂[注 10.1]，有些数学家甚至认为假如不是西格尔把它从黎曼的手稿中整理出来的话，也许直到今天，数学家们都无法独立地发现它。

西格尔在整理这一公式上的功绩和所付出的辛劳是怎么评价也不过分的，如我们在上节中所说，黎曼的手稿上诸般论题混杂、满篇公式却几乎没有半点文字说明。而且黎曼晚年的生活很不宽裕，用纸十分节约，每张稿纸的角角落落都写满了东西，使得整个手稿更显混乱。再加上黎曼所写的那些东西本身的艰深。西格尔能从中整理出如此复杂的公式对数学界实是功不可没，为了表达对西格尔工作的敬意，数学家们把这一公式称为黎曼 - 西格尔公式。黎曼若泉下有知，也当乐见他的这位后辈同胞的名字通过这一公式与自己联系在一起，因为在这之后，再也没有人会怀疑他论文背后的运算背景了。

发表于 1932 年的黎曼 - 西格尔公式是哥廷根数学辉煌的一抹余辉。随着纳粹在德国日益横行，曾经是数学圣地的哥廷根一步步地走向了衰落。1933 年，朗道因其“ 犹太式的微积分与雅里安 (Aryan) 的思维方式背道而驰”被剥夺了授课资格，离开了他一生挚爱的数学讲堂。出于对战争的厌恶，西格尔于 1940 年离开了德国。哥廷根的衰落是德国文化史上最深重的悲剧之一。在这场悲剧中最痛苦的也许要算是希尔伯特，他是自高斯和黎曼之后哥廷根数学传统的灵魂人物，从某种意义上讲，哥廷根也是希尔伯特的灵魂。他一生为发扬哥廷根的数学传统尽了无数的心力，哥廷根记录了他一生的荣耀和自豪，而今在他年逾古稀的时候却要残酷地亲眼目睹这一切的辉煌烟消云散。1943 年，希尔伯特黯然离开了人世，哥廷根的一个时代走到了终点。

注 10.1

当然这种复杂性指的是推导上的复杂，而不是用来计算零点时的复杂——后者虽然也很复杂，却比传统的 Euler-Maclaurin 公式来得简单。

Riemann

11 黎曼－西格尔公式

黎曼 - 西格尔公式的推导极其复杂，不可能在本文中加以介绍。不过我们将简单叙述一下计算黎曼 ζ 函数非平凡零点的基本思路，并给出黎曼 - 西格尔公式的表达式，以便读者有一个大致的了解。

读者也许还记得，在第五节中我们曾引进过一个辅助函数：

$$\xi(s)=\Gamma(s/2+1)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)$$

它的零点与黎曼 ζ 函数的非平凡零点重合。因此，我们可以通过对 $\xi(s)$ 零点的计算来确定黎曼 ζ 函数的非平凡零点。这是计算黎曼 ζ 函数零点的基本思路。由于 $\xi(s)$ 满足一个特殊的条件：$\xi(s)=\xi(1-s)$，运用复变函数论中的反射原理 (reflection principle) 很容易证明（读者不妨自己试试），在 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线（即黎曼猜想中的 critical line）上 $\xi(s)$ 的取值为实数。因此在 critical line 上通过研究 $\xi(s)$ 的符号改变就可以确定零点的存在。这是利用 $\xi(s)$ 计算零点的一个极大的优势。在下文中我们将只考虑 critical line 上的情形，为此令 $s=1/2+it$。利用 $\xi(s)$ 的定义可以证明（请读者自行完成）：

$$\xi(1/2+it)=\left[e^{\mathrm{Re}\ln\Gamma(s/2)}\pi^{1/4}\frac{-t^2-1/4}{2}\right]\cdot\left[e^{i\,\mathrm{Im}\ln\Gamma(s/2)}\pi^{-it/2}\zeta(1/2+it)\right]$$

很明显，上式中第一个方括号内的表达式始终为负，因此在计算 $\xi(s)$ 的符号改变——从而确定零点——时可以忽略。因此要想确定黎曼 ζ 函数的零点，只需研究上式中第二个方括号内的表达式就可以了。我们用 $Z(t)$ 来标记这一表达式，即：

$$Z(t)=e^{i\,\mathrm{Im}\ln\Gamma(s/2)}\pi^{-it/2}\zeta(1/2+it)$$

至此，研究黎曼 ζ 函数在 critical line 上的零点就归结为研究 $Z(t)$ 的零点，而后者又可以归结为研究 $Z(t)$ 的符号改变。

黎曼 - 西格尔公式就是关于 $Z(t)$ 的渐进展开式，它可以表示为：

$$Z(t)=2\sum_{n^2<(t/2\pi)}n^{-1/2}\cos\left[\theta(t)-t\log n\right]+R(t),$$

其中：

$$\theta(t)=\frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi}-\frac{t}{2}-\frac{\pi}{8}+\frac{1}{48t}+\frac{7}{5760t^3}+\cdots$$

$$R(t)\sim(-1)^{N-1}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/4}\left[C_0+C_1\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-1/2}+C_2\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-2/2}+C_3\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-3/2}+C_4\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{-4/2}\right]$$

上面式子中的 $R(t)$ 被称为剩余项 (reminder)，其中的 N 为 $(t/2\pi)^{1/2}$ 的整数部分，$R(t)$ 中各项的系数分别为：

$$C_0=\Psi(p)\equiv\frac{\cos\left[2\pi\left(p^2-p-1/16\right)\right]}{\cos(2\pi p)}$$

$$C_1=-\frac{1}{2^5\cdot3\cdot\pi^2}\Psi^{(3)}(p)$$

$$C_2=\frac{1}{2^{11}\cdot3^2\cdot\pi^4}\Psi^{(6)}(p)+\frac{1}{2^6\cdot\pi^2}\Psi^{(2)}(p)$$

$$C_3=-\frac{1}{2^{15}\cdot3^4\cdot\pi^6}\Psi^{(9)}(p)-\frac{1}{2^8\cdot3\cdot5\cdot\pi^4}\Psi^{(5)}(p)-\frac{1}{2^6\cdot\pi^2}\Psi^{(1)}(p)$$

位于哥廷根的西格尔的墓地

$$C_4=\frac{1}{2^{23}\cdot 3^5\cdot\pi^8}\Psi^{(12)}(p)+\frac{11}{2^{17}\cdot 3^2\cdot 5\cdot\pi^6}\Psi^{(8)}(p)+\frac{19}{2^{13}\cdot 3\cdot\pi^4}\Psi^{(4)}(p)+\frac{1}{2^7\cdot\pi^2}\Psi(p)$$

其中 p 为 $(t/2\pi)^{1/2}$ 的分数部分，$\Psi^{(n)}(p)$ 为 $\Psi(p)$ 的 n 阶导数。

这就是西格尔从黎曼手稿中整理出来的计算黎曼 ζ 函数零点的公式 [注 11.1]。确切地讲它只是计算黎曼 ζ 函数数值的公式，要想确定零点的位置还必须通过多次计算逐渐逼近，其工作量比单单计算黎曼 ζ 函数的数值大得多。读者也许会感到奇怪，如此复杂的公式加上如此迂回的步骤，在没有计算机的年代里能有多大用处？的确，计算黎曼 ζ 函数的零点即使使用黎曼 - 西格尔公式也是极其繁复的，别的不说，只要看看 C4 中对 $\Psi(p)$ 的导数竟高达 12 阶之多就足令人头疼了。但是同样一件工作，在一位只在饭后茶余瞥上几眼的过客眼里与一位对其倾注生命、不惜花费时光的数学家眼里，它的可行性是完全不同的。就象在一位普通人、甚或是一位普通数学家的眼里黎曼能做出如此深奥的数学贡献是不可思议的一样。

不过，也不要把黎曼 - 西格尔公式看得太过可怕，因为在下一节中，我们就将一起动手用这一公式计算一个黎曼 ζ 函数的非平凡零点。当然，我们会适当偷点懒，也会用用计算器，甚至还要用点计算机软件。毕竟，我们与西格尔之间又隔了七十多个年头，具备了偷懒所需的信息和工具。然后，我们将继续我们的旅途，去欣赏那些勤奋的人们所完成的工作，那才是真正的风景。

注 11.1

有两点需要提醒读者：一是黎曼手稿中 C_4 中 $\Psi(p)$ 的系数与西格尔给出的不同；二是我们没有使用西格尔原始论文中的记号。

作者介绍：

卢昌海，哥伦比亚大学物理学博士，现旅居纽约，为本刊特约撰稿人。