



由克里斯托弗·诺兰编剧与导演的好莱坞大片《盗梦空间》2010年在全球热映，除了扣人心弦故事情节外，影片中充满众多数学元素，公理体系、不可能图形、分形几何等等，数不胜数。本文将剖析其包含的数学文化及其教学意义。

《盗梦空间》简介 >>>

《盗梦空间》又名《奠基》(Inception)，是由克里斯托弗·诺兰编剧与导演的，诺兰继《蝙蝠侠前传2：黑暗骑士》后再次给我们带来了惊喜，剧情扑朔迷离，悬念迭起，使观众游走于梦境与现实之间。多姆·科布是一个经验老道的窃贼，在人们精神最为脆弱的时候，他潜入别人梦中，窃取潜意识中有价值的信息和秘密。在他看来，人类思维所能产生的能量是不可限量的——人们靠思维就可以建造城市，可以穿越时空，回到过去重新制定社会的法则。人们甚至可以通过思维来进行犯罪。只可惜，面对如此宝贵的财富，大多数人不知道如何获取。而科布却恰巧拥有这样奇特的技能。他利用人们做梦的时候，从他们的潜意识里盗取秘密；因为往往人们在做梦的时候，精神防线是最脆弱的。科布把自己这种绝技称作“摄梦术”。

不过，虽然科布的特殊技能，令他在这个贪婪的世界中成为了一个成功的商业间谍，但他为此也付出了沉重的代价。科布成为企业间谍中令人垂涎的对象，也让他失去了所爱的人，并成为一名国际逃犯。如今，柯布接受了一项新任务，这是他一次救赎的机会，但是他要做的是潜意识犯罪中最不可能的境界：植入意念，要让一个大企业的继承人自愿解散公司。如果他们能够成功，这将会是一次史无前例的完美犯罪。但无论“盗梦小组”如何精心策划，这次任务过程中一直有一个神秘敌人如影随形，而这个神秘人只有柯布能够感应到其存在。因为犯罪现场存在于人的思想中，他找到了自己的伙伴，要制造出几乎不可能制造出的3层梦境，在不断躲避潜意识里的守护者的攻击中，他们有一些人进入了潜意识的边缘，看到了他潜意识里的妻子和孩子，他将会怎么选择？会留在那里和妻子在一起，还是会回到现实？无论答案是什么都让人揪心撕肺。

从公理体系到非欧几何 >>>

影片中柯布一直问：究竟什么是真实？这是一个哲学问题。转化成数学问题就如思考一个命题是否正

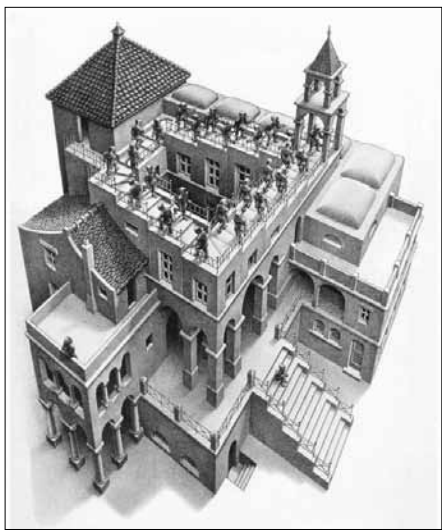


图1 升与降

确。当阐述一个命题正确的时候，我们的逻辑系统建立在几条公理之上，该命题可通过公理的推导得出，这便是我们所说的公理体系。只有接受公理的假设时，定理才是真的。问题在于公理本身往往也只是假设，真假是不可证明的。通常我们的逻辑认知都基于欧氏空间，而在一个弯曲的空间中，如果还用欧氏空间的逻辑进行思考，必定会产生悖论。在对欧氏几何平行公设的研究过程中，非欧几何诞生了。一维时，欧氏空间是直线，非欧空间可以是圆圈。二维时，欧氏空间是平面，非欧空间可以有多种。比如埃舍尔的“升与降”（如图1），其实就是数学中的麦比乌斯环面；而电影《盗梦空间》中整个巴黎街区上下对折的震撼场景，其实可以看成是一个球面。所以柯布真实的世界应是欧氏空间，而梦中的世界是非欧空间。如果我们为每一个空间都设置坐标系的话，欧氏空间的坐标系是直线，而非欧空间的坐标系会弯曲成一个圆。

在自然界，数学可以生动地推理出一些人们无论如何也无法想象的，或者在现实空间认为不可能的事实。柯布所展示的盒子世界，把巴黎折成了一个盒子，大地变成盒子的内表面，天空位于盒子的中心，世界变得像万花筒一样，其实就是球形的非欧空间。埃舍尔的“升与降”，指出了梦中悖论的存在。在那个空间的高度方向弯曲成了一个圆，这样楼梯的最高点和最低点具同一高度，所以才能连接上。在那样的空间中，依然有向上和向下的方向，但意义已不同，向上和向

下不代表高度的增减，而是指从两个不同的方向画圈^[1]。

《盗梦空间》中，造梦师设计迷宫的核心思想就是将敌人困在一个圈中。造梦师如果想把一个人困住，就要给他一种无限的错觉。其实我们也可以把人的思想描述成一种几何结构。迷宫般的逻辑结构是存在的，埃舍尔楼梯对应着逻辑上的循环悖论，最典型的便是“鸡生蛋，蛋生鸡”的例子，它们分开来看都是正确的，但是放在一起便出现了一个先有鸡还是先有蛋的问题。造梦师就利用非欧空间的弯曲性，将敌人永远地困在自己制作的梦境当中。

伽利略曾说：“我们生活在受精确的数学定律制约的宇宙中，而数学正是书写宇宙的文字。”数学是人类文化的重要力量，对人们的观念、精神、思维方式的养成起着重要的影响。特别是两千多年前古希腊文明的重大成果——欧几里得几何，作为其精髓的公理化方法，更是对人类理性思维的形成一直起着关键的作用。但欧氏几何研究的只是用圆规和直尺画出的图形，这样的图形是简单的或平滑的。受认识主、客体的限制，欧氏几何就具有很强的“人为”特征。这样，欧氏几何就只能是人们认识、把握客观世界的一种工具，而不是唯一的工具^[2]。

从分形世界到缩放时间 >>>

分形几何在《盗梦空间》中也得到了充分的应用。例如，阿里阿德妮把柯布带到某街区，关上门，变成两面对立的镜子。根据反射原理，两面镜子之中出现了数不清的人像。因为镜子可以在镜子中成像，于是就有了镜中镜……，随着镜子层数的加深，镜中像会越来越小，但即使是极小的一个像，经过放大，里面还是有镜中镜……，这种自相似性就是分形。

类似地，整部影片最让人难以理解的梦中梦，也有分形的逻辑特征。分形结构对应着无穷的递归逻辑。在分形理论中，分形是一种具有无限嵌套层次的结构，自相似是它最主要的特征。把分形分成大大小小的层次，各层次之间互相相似，并且都和整体相似。整体分成的部分之间不再是等同，而是相似，并且各个层次的部分都以不同的相似比存在于整体之中^[3]。分形几何目前广泛应用于日常生活和科学研究中，让学生学习分形几何的初步知识，将给学生带来一种全新的认识，帮助他们实现从欧氏几何领域向分形几何



领域认知的初步跨越,使得创新思维得到很好的培养。

《盗梦空间》里另一个有趣的设定就是梦中时间流逝变慢,而且梦中梦的时间的速度会更慢。例如现实时间的5分钟等于梦里时间的1小时,而5分钟的梦境时间又等于二级梦境中的1天,以此类推,时间随着梦的级数呈现几何级变长的状态。

其实日常生活中很多人都有体会,有时候明明做了一个很长的梦,醒来之后却发现自己只睡了很短的时间。事实上,不是时间变慢了,而是接受信息的速度变快了。梦境时间流逝变慢是一种错觉,是因为我们以清醒时的时间标准去感知梦中情节而产生的错觉。在《盗梦空间》中,梦境中的时间比现实世界要慢得多,而且还存在一个所谓的“缩放效应”,即如果梦境中又出现了梦,时间流逝的速度会更慢。

对数学教学的启示 >>>

《盗梦空间》是一部挑战人类固有思维的电影,乍看之下似乎与数学教育,尤其是中学数学毫无关系,其实不然。数学的高度抽象性,决定数学教育应该把发展学生的抽象思维能力定为其目标。从具体事物抽象出数量关系和空间形式,把实际问题转化为数学问题的科学抽象过程,可以培养学生的抽象能力^[4]。因此,结合对这部电影的分析,将从以下两方面阐述给中学数学教学带来的启示。



首先,有助于提升学生的数学情感教育——激发学生学习数学的兴趣,激励学生学会思考和提问。

《盗梦空间》作为好莱坞大片在我国热映,必当吸引众多学生观看影片,而以中学生目前的认知水平,要看懂影片是十分困难的。教师充分利用学生的好奇心,对影片作适当解释,可以活跃课堂气氛,学生将会大大拓展知识面,了解欧氏几何的公理体系以及非欧几何产生的原因。这对建立学生正确的

数学观将产生显著的影响,让学生看到数学神秘而有趣的一面。数学学习将不再是枯燥乏味的,以此激发学生学习数学的兴趣。另外,“学起于思,思源于疑”,如同非欧几何的发展,都是从思考与质疑开始的。以此激励学生学会思考,学会质疑和提问,真正学会数学,而不只是学会应试。

其次,有助于提升学生的数学思维能力——拓宽学生的思维,发展学生的抽象能力与辩证思维。

分形几何发展迅猛,让中学生初步了解分形几何知识是十分必要的。以影片中的镜像分形为例,引出分形的特点,通过计算机作分形图,让学生体会递归思想、掌握迭代方法;同时,在分形的计算机生成中,学生会发现许多结构复杂的分形图都能以非常简单的方法定义(即对应着一个简单的映射),经过反复的迭代而产生,从而昭示“简单中孕育着复杂”的深刻哲理,使学生的辩证思维得以发展。

除了分形之外,球面几何也在影片中多处展现。学习球面上的几何,如果直接画球体显得缺乏创造性的话,教师可以用电影中的情节导入,介绍球面上的

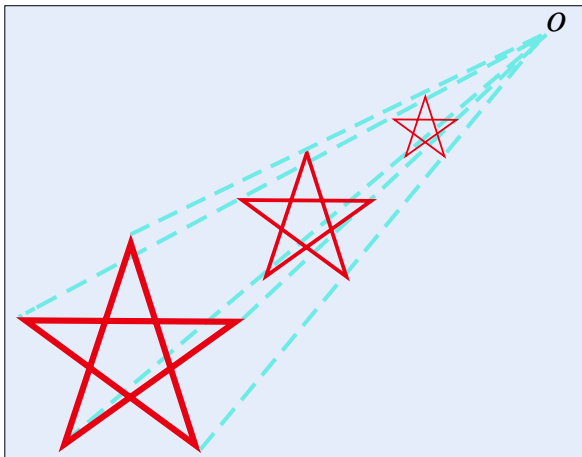


图 2. 五角星的位似



图 3. 电影中的位似视觉

距离和角等概念，并利用电影中迷宫的特点，让学生类比现实空间，探索球面上距离的求法，球面三角形的性质及正余弦定理等。

如果说分形几何和球面几何是高中数学的内容，有一定复杂性，运用不那么直观的话，那么，梦中时间与镜像在初中数学中将得到直观简单的运用。梦中时间与现实时间的关系，影片中运用了几何级数描述。通常学生对枯燥的数字计算不感兴趣，但如果给定前几层梦境的时间变化规律，让他们找出规律，并且计算现实世界的一分钟，相当于某一层梦境的多少时间，学生一定会非常感兴趣，不知不觉中巩固了找规律以及计算乘方的方法。

镜中镜成像可以作为中学教材中的图形的位似的情境导入。教材中的引入是运用图 2 五角星构成的位似。虽然简洁直观，但学生不免心中有疑问：为什么要将五角星按这样的位置摆放呢？这个图形看起来没有现实意义，因此学生不知道为什么要学习位似。而我们如果运用《盗梦空间》中的截图 3 引入课题就不一样了，无论是柯布本人还是旁边的柱子，都明显地表现出了位似的视觉特点。学生因为对镜中镜这一奇特现象的兴趣，可以很快记住位似的特点，并且知道学习位似是有现实意义的。

参考文献

1. 高斯控，隋波。《盗梦空间》用数学思想来理解。《新知客》，2010(9): 69-73。
2. 张维忠。文化视野中的数学与数学教育。北京：人民教育出版社，2005。
3. 舒昌勇，包韬略。分形的文化价值管窥。《数学通报》，2008，47(1): 19-21。
4. 俞求是。试论数学的科学性及其特点与数学教学。《数学教育学报》。2008，17(5): 13-18。

作者介绍：

陈虹兵，浙江师范大学教师教育学院在读教育硕士，现任教于浙江省遂昌县第三中学。张维忠，教育学博士。现为浙江师范大学教师教育学院教授，主要研究方向为数学课程与教学论。本文的写作获得教育部 2010 年人文社会科学一般项目——多元文化数学课程的理论与实践研究（10YJA880179）。