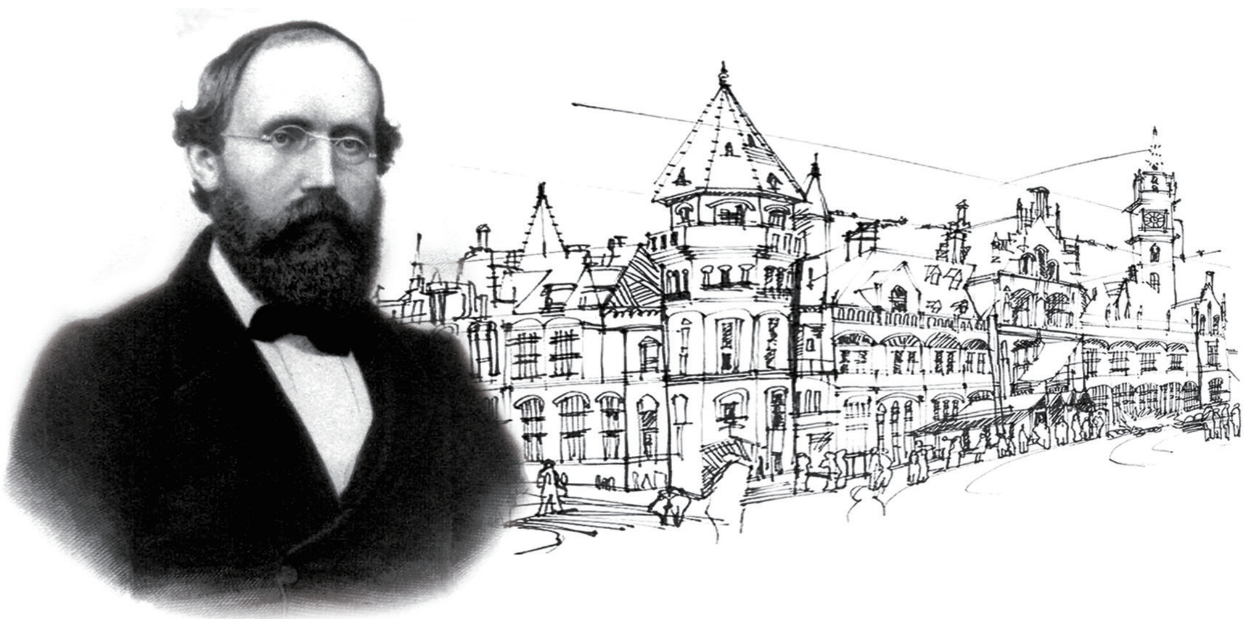
Riemann



黎曼猜想漫谈(一)

卢昌海

1 引言

让我们从一则小故事开始我们的黎曼(Riemann)猜想之旅吧。故事大约发生在八十年前，当时英国有一位很著名的数学家叫做哈代(Godfrey Hardy，1877-1947)，在我看来他是两百年来英国数学界的一位勇者。为什么说他是勇者呢？因为在十七世纪的时候，英国数学家与欧洲大陆的数学家之间发生了一场激烈的论战。论战的主题是谁先发明了微积分。论战所涉及的核心人物一边是英国的科学泰斗牛顿(Isaac Newton，1642-1727)，另一边是欧洲大陆德国的哲学家及数学家莱布尼兹(Gottfried Leibniz，1646-1716)。这一场论战打下来，两边筋疲力尽自不待言，还大伤了和气，留下了旷日持久的后遗症。自那以后，英国的许多数学家开始排斥起来自欧洲大陆的数学进展。一场争论演变到这样的一个地步，英国数学界的集体荣誉及尊严、牛顿的赫赫威名便都成了负资产，英国的数学在保守的舞步中走起了下坡路。

这下坡路一走便是两百年。

在这样的一个背景下，在复数理论还被一些英国数学家视为来自欧洲大陆的危险概念的时候，土生土长的英国数学家哈代却对来自欧洲大陆（而且偏偏还是德国）、有着复变函数色彩的数学猜想——黎曼猜想——产生了浓厚的兴趣，积极地研究它，并且——如我们将在后文中介绍的——取得了令欧洲大陆数学界为之震动的成就，算得上是勇者所为。

当时哈代在丹麦有一位很要好的数学家朋友

叫做哈拉尔德·玻尔（Harald August Bohr，1887-1951），他是著名量子物理学家尼尔斯·玻尔（Niels Bohr，1885-1962）的弟弟。小玻尔对黎曼猜想也有浓厚的兴趣，曾与德国数学家艾德蒙·朗道（Edmund Landau，1877-1938）一起研究黎曼猜想（他们的研究成果也将在后文中加以介绍）。哈代很喜欢与玻尔共度暑假，一起讨论黎曼猜想。他常常要待到假期将尽才匆匆赶回英国。结果有一次当他赶到码头时，发现只剩下一条小船可以乘坐了。没办法，他只得硬着头皮登上。在汪洋大海中乘坐小船可不是闹着玩的事情，弄得好算是浪漫刺激，弄不好就得葬身鱼腹。信奉上帝的乘客们此时都忙着祈求上帝的保佑。哈代却是一个坚决不信上帝的人，不仅不信，有一年他还把向大众证明上帝不存在列入自己的年度六大心愿之中，且排名第三（排名第一的是证明黎曼猜想）。不过在这生死攸关的时候哈代也没闲着，他给玻尔发去了一封简短的明信片，上面只有一句话：

“我已经证明了黎曼猜想！”

哈代果真已经证明了黎曼猜想吗？当然不是。那他为什么要发这么一个明信片呢？回到英国后他向波尔解释了原因，他说如果那次他乘坐的小船真的沉没了，那人们就只好相信他真的证明了黎曼猜想。但他知道上帝是肯定不会把这么巨大的荣誉送给他——一个坚决不信上帝的人的，因此上帝一定不会让他的小船沉没的。哈代的这个解释让我想起了一句有趣的无神论者的祈祷语：God, if there is one, save my soul if I have one（上帝啊，如果你存在的话，拯救我的灵魂吧，如果我有灵魂的话）。

上帝果然没舍得让哈代的小船沉没。自那以后又过了八十来个年头，吝啬的上帝依然没有物色到一个可以承受这么大荣誉的人。

2 黎曼 ζ 函数与黎曼猜想

那么这个让上帝如此吝啬的黎曼猜想究竟是一个什么样的猜想呢？在回答这个问题之前我们先得介绍一个函数：黎曼 ζ 函数。这个函数虽然挂着黎曼的大名，其实并不是黎曼首先提出的。但黎曼虽然不是这一函数的提出者，他的工作却大大加深了人们对这一函数的理解，为其在数学与物理上的广泛应用奠定了基础。后人为了纪念黎曼的卓越贡献，就用他的名字命名了这一函数。

远在黎曼之前，黎曼 ζ 函数（当然那时还不叫这个名字）的级数表达式就已经出现在了数学文献中，但是那些表达式中函数的定义域较小。黎曼把黎曼 ζ 函数的定义域大大地延拓了，这一点对于黎曼猜想的表述及研究具有重要的意义。仅凭这一点，即便把黎曼称为黎曼 ζ 函数的提出者之一，也并不过份。

那么究竟什么是黎曼 ζ 函数呢？黎曼 ζ 函数 $\zeta(s)$ 是级数表达式（n 为正整数）

$$\zeta(s)=\sum_n n^{-s} \qquad (\mathrm{Re}(s)>1)$$

在复平面上的解析延拓。之所以要对这一表达式进行解析延拓，是因为——如我们已经注明的——这一表达式只适用于复平面上 s 的实部 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的区域（否则级数不收敛）。黎曼找到了这一表达式的解析延拓（当然黎曼没有使用“解析延拓”这样的现代复变函数论术语）。运用路径积分，解析延拓后的黎曼 ζ 函数可以表示为：

$$\zeta(s)=\frac{\Gamma(1-s)}{2\pi i}\int_{\infty}^{\infty}\frac{(-z)^s}{e^z-1}\frac{dz}{z}。$$

这里我们采用的是历史文献中的记号，式中的积分实际是一个环绕正实轴（即从 $+\infty$ 出发，沿实轴上方积分至原点附近，环绕原点积分至实轴下方，再沿实轴下方积分至 $+\infty$——离实轴的距离及环绕原点的半径均趋于 0）进行的围道积分；式中的 Γ 函数 Γ(s) 是阶乘函数在复平面上的推广，对于正整数 $s>1$：$\Gamma(s)=(s-1)!$。可以证明，这一积分表达式除了在 $s=1$ 处有一个简单极点外在整个复平面上解析。这就是黎曼 ζ 函数的完整定义。

运用上面的积分表达式可以证明，黎曼 ζ 函数满足以下代数关系式：

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(1-s)。$$

从这个关系式中不难发现，黎曼 ζ 函数在 $s=-2n$（n 为正整数）取值为零——因为 $\sin(\pi s/2)$ 为零。复平面上的这种使黎曼 ζ 函数取值为零的点被称为黎曼 ζ 函数的零点。因此 $s=-2n$（n 为正整数）是黎曼

Riemann

ζ 函数的零点。这些零点分布有序、性质简单，被称为黎曼 ζ 函数的平凡零点 (trivial zeros)。除了这些平凡零点外，黎曼 ζ 函数还有许多其它零点，它们的性质远比那些平凡零点来得复杂，被称为非平凡零点 (non-trivial zeros)。对黎曼 ζ 函数非平凡零点的研究构成了现代数学中最艰深的课题之一。我们所要讨论的黎曼猜想就是一个关于这些非平凡零点的猜想，在这里我们先把它的内容表述一下，然后再叙述它的来龙去脉：

> 黎曼猜想：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 Re(s)=1/2 的直线上。

在黎曼猜想的研究中，数学家们把复平面上 Re(s)=1/2 的直线称为临界直线 (critical line)。运用这一术语，黎曼猜想也可以表述为：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于临界直线上。

这就是黎曼猜想的内容，它是黎曼在 1859 年提出的。从其表述上看，黎曼猜想似乎是一个纯粹的复变函数命题，但我们很快将会看到，它其实却是一曲有关素数分布的神秘乐章。

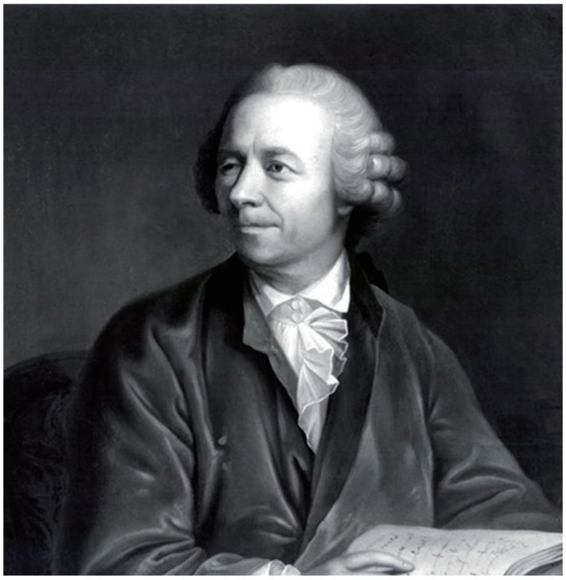
3 素数的分布

一个复数域上的函数——黎曼 ζ 函数——的非平凡零点（在无歧义的情况下我们有时将简称其为零点）的分布怎么会与风马牛不相及的自然数集中的素数分布产生关联呢？这还得从欧拉乘积公式谈起。

我们知道，早在古希腊时期，欧几里得就用精彩的反证法证明了素数有无穷多个。随着数论研究的深入，人们很自然地对这些素数在自然数集上的分布产生了越来越浓厚的兴趣。1737 年，著名数学家欧拉 (Leonhard Euler，1707-1783) 在圣彼得堡科学院发表了一个极为重要的公式，为数学家们研究素数分布的规律奠定了基础。这个公式就是欧拉乘积公式：

$$\sum_n n^{-s} = \prod_p \left(1-p^{-s}\right)^{-1}。$$

公式中左边的求和对所有的自然数进行，右边的连乘积则对所有的素数进行。可以证明，这个公式对所有 Re(s)>1 的复数 s 都成立。这个公式的左边正是我们在上文中介绍过的黎曼 ζ 函数，而右边则是一个纯粹有关素数（且包含所有素数）的表达式，这样的形式正是黎曼 ζ 函数与素数分布之间存在关联的征兆。那么这个公式究竟蕴涵着有关素数分布的什么样的信息呢？黎曼 ζ 函数的零点又是如何出现在这种关联之中的呢？这就是本节及未来几节所要介绍的内容。



欧拉（下图）的乘积公式为黎曼（上左）的研究奠定了基础。希尔伯特（上右）被问到 500 年后如重返人间最想知道的是什么？他回答说是黎曼的问题解决了没有。

欧拉本人率先对这个公式所蕴涵的信息进行了研究。他注意到在 s=1 的时候，公式的左边 $\Sigma_n n^{-1}$ 是一个发散级数（这是一个著名的发散级数，称为调和级数），这个级数以对数方式发散。这些对于欧拉来说都是不陌生的。为了处理公式右边的连乘积，他对公式两边同时取了对数，于是连乘积就变成了求和，由此他得到：

Riemann

$$\ln\left(\sum_n n^{-1}\right)=-\sum_p \ln\left(1-p^{-1}\right)$$
$$=\sum_p\left(p^{-1}+\frac{1}{2}p^{-2}+\frac{1}{3}p^{-3}+\cdots\right)$$

由于上式右端括号中除第一项外所有其它各项的求和都收敛，而且这些求和的结果累加在一起仍然收敛（有兴趣的读者不妨自己证明一下）。因此右边只有第一项的求和是发散的。由此 Euler 得到了这样一个有趣的渐近表达式：

$$\sum_p p^{-1}\sim\ln\ln\left(\infty\right),$$

或者，更确切地说：

$$\sum_{p<N} p^{-1}\sim\ln\ln\left(N\right)。$$

这个结果，即 $\Sigma_p p^{-1}$ 以 $\ln\ln(N)$ 的方式发散，是继欧几里得证明素数有无穷多个以来有关素数的又一个重要的研究结果。它同时也是对素数有无穷多个这一命题的一种崭新的证明（因为假如素数只有有限多个，则求和就只有有限多项，不可能发散）。但欧拉的这一新证明所包含的内容要远远多于欧几里得的证明，因为它表明素数不仅有无穷多个，而且其分布要比许多同样也包含无穷多个元素的序列——比如 n^2 序列——密集得多（因为后者的倒数之和收敛）。不仅如此，如果我们进一步注意到上式的右端可以改写为一个积分表达式：

$$\ln\ln\left(N\right)\sim\int x^{-1}\ln^{-1}\left(x\right)dx。$$

而左端通过引进一个素数分布的密度函数 $\rho(x)$——它给出在 x 附近单位区间内发现素数的概率——也可以改写为一个积分表达式：

$$\sum_{p<N} p^{-1}\sim\int x^{-1}\rho\left(x\right)dx。$$

将这两个积分表达式进行比较，不难猜测到素数的分布密度为 $\rho(x)\sim1/\ln(x)$，从而在 x 以内的素数个数——通常用 $\pi(x)$ 表示——为：

$$\pi(x)\sim\mathrm{Li}(x)。$$

其中 $\mathrm{Li}(x)\equiv\int\ln^{-1}(x)\,dx$ 是对数积分函数[注 3.1]。这正是著名的素数定理（当然这种粗略的推理并不构成对素数定理的证明）。因此欧拉发现的这个结果可以说是一扇通向素数定理的暗门。可惜欧拉本人并没有沿着这样的思路走，从而错过了这扇暗门，数学家们提出素数定理的时间也因此而延后了几十年。

提出素数定理的荣誉最终落到了另外两位数学家的肩上：他们是德国数学家高斯（Friedrich Gauss，1777-1855）和法国数学家勒让德（Adrien-Marie Legendre，1752-1833）。

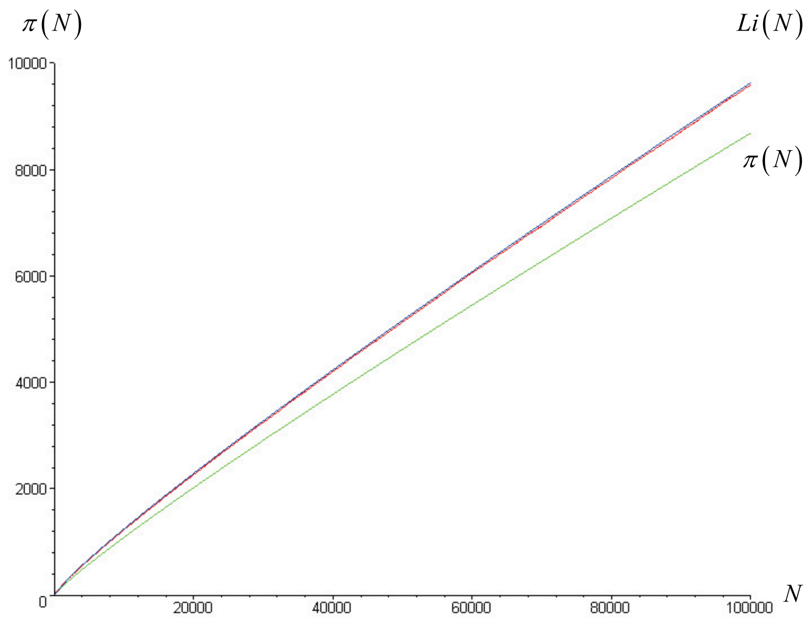
高斯对素数分布的研究始于 1792 到 1793 年间，那时他才 15 岁。在那期间，每当“无所事事”的时候高斯就会挑上几个长度为一千的自然数区间，计算这些区间中的素数个数，并进行比较。在做过了大量的计算和比较后，高斯发现素数分布的密度可以近似地用对数函数的倒数来描述，即 $\rho(x)\sim1/\ln(x)$，这正是上面提到的素数定理的主要内容。但是高斯并没有发表这一结果。高斯是一位追求完美的数学家，他很少发表自己认为还不够完美的结果，而他的数学思想与灵感犹如浩瀚奔腾的江水，汹涌激荡，常常让他还没来得及将一个研究结果完美化就又展开了新课题的研究。因此高斯一生所做的数学研究远远多过他正式发表的。但另一

大数学家高斯 (1777-1855) 是最早研究素数分布的数学家之一

注 3.1

对数积分函数 $\mathrm{Li}(x)$ 的确切定义是 $1/\ln(x)$ 在 0 到 x 之间定积分的柯西主值。对于素数定理来说，人们关心的是 $\mathrm{Li}(x)$ 在 $x\to\infty$ 时的渐近行为，这时候积分的下限并不重要，因此人们在素数定理的研究中有时把 $\mathrm{Li}(x)$ 的积分下限取为 2 而不是 0，这样可以使被积函数在积分区间内没有奇点。

方面，高斯常常会通过其它的方式——比如书信——透露自己的某些未发表的研究成果，他的这一做法给一些与他同时代的数学家带来了不小的尴尬。其中“受灾”较重的一位便是勒让德。这位法国数学家在 1806 年率先发表了线性拟合中的最小平方法（即最小二乘法），不料高斯在 1809 出版的一部著作中提到自己曾在 1794 年（即比勒让德早了 12 年）就发现了同样的方法，使勒让德极为不快。



素数分布与素数定理

有道是：不是冤家不聚首。在素数定理的提出上，可怜的勒让德又一次不幸地与数学巨匠高斯撞到了一起。勒让德在 1798 年发表了自己关于素数分布的研究，这是数学史上有关素数定理最早的文献[注 3.2]。由于高斯没有发表自己的研究结果，勒让德便理所当然地成为了素数定理的提出者。勒让德的这个优先权一共维持了 51 年。但是到了 1849 年，高斯在给德国天文学家恩克（Johann Encke，1791-1865）的一封信中提到了自己在 1792 至 1793 年间对素数分布的研究，从而把尘封了半个世纪的优先权从勒让德的口袋中勾了出来，挂到了自己已经鼓鼓囊囊的腰包上。

幸运的是，高斯给恩克写信的时候勒让德已经去世十六年了，他用最无奈的方式避免了再次遭受残酷打击。

无论高斯还是勒让德，他们对于素数分布规律的研究都是以猜测的形式提出的（勒让德的研究带有一定的推理成份，但离证明仍然相距甚远）。因此确切地说，素数定理在那时只是一个猜想——素数猜想，我们所说的提出素数定理指的也只是提出素数猜想。素数定理的数学证明直到一个世纪之后的 1896 年，才由法国数学家雅克•阿达马（Jacques Hadamard，1865-1963）与比利时数学家普 森（Charles de la Vallée-Poussin，1866-1962）彼此独立地给出。他们的证明与黎曼猜想有着很深的渊源，其中阿达马的证明出现的时机和场合还有着很大的戏剧性，这些我们将在后文中加以叙述。

素数定理是简洁而优美的，但它对于素数分布的描述仍然是比较粗略的，它给出的只是素数分布的一个渐近形式——也就是当 N 趋于无穷时的分布形式。从前面有关素数分布与素数定理的图示中我们也可以看到，$\pi(x)$ 与 $\mathrm{Li}(x)$ 之间是有偏差的，而且这种偏差的绝对值随着 x 的增加似有持续增加的趋势（所幸的是，这种偏差的增加与 $\pi(x)$ 与 $\mathrm{Li}(x)$ 本身的增加相比仍是微不足道的——否则素数定理也就不成立了）。从图上以及从更大范围的计算中人们发现 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ 总是大于零，这使得有人猜测 $\mathrm{Li}(x)$ 不仅是素数分布的渐近形式，而且还是其严格上界。这种猜测在 1904 年被英国数学家李特尔伍德（John Littlewood，1885-1977）所推翻。李特尔伍德证明了 $\mathrm{Li}(x)-\pi(x)$ 是一个在正与负之间震荡

注 3.2

勒让德提出的素数定理采用的是代数表达式：$\pi(x)\sim x/[\ln(x)-1.08366]$，它与积分形式的素数定理在渐近意义上是等价的。

无穷多次的函数。

那么有没有一个公式可以比素数定理更精确地描述素数的分布呢？这便是黎曼在 1859 年想要回答的问题。那一年是高斯去世后的第五年，32 岁的黎曼继狄利克雷（Johann Dirichlet，1805-1859）之后成为了高斯在格丁根（Göttingen）大学的继任者。同年 8 月 11 日，他被选为柏林科学院的通信院士（Corresponding Member）。作为对这一崇高荣誉的回报，黎曼向柏林科学院提交了一篇论文。这是一篇只有短短八页的论文，标题是：论小于给定数值的素数个数。正是这篇论文将欧拉乘积公式蕴涵的信息破译得淋漓尽致，也正是这篇论文将黎曼 ζ 函数的零点分布与素数的分布联系在了一起。

这篇论文注定要把人们对素数分布的研究推向壮丽的巅峰，并为后世的数学家们留下一个魅力无穷的伟大谜团。

4 黎曼的论文——基本思路

终于到了黎曼的论文登场的时候！如果让数学家们来评选几篇数学史上意义深远而又最为难读的论文，那么我想黎曼 1859 年的那篇“论小于给定数值的素数个数”就算不名列榜首，起码也要挤身三甲[注 4.1]。现在就让我们来一起领略一下那篇数学史上出名难啃的论文的主要内容。我们的叙述将采用较为现代的术语及表述方式，所用的记号将与前文保持一致——因此与黎曼的原始论文不尽相同（但主要思路是一致的）。这一点要提醒有兴趣阅读黎曼原文的读者注意。

如上节所述，Euler 乘积公式：

$$\zeta(s)=\sum_n n^{-s}=\prod_p\left(1-p^{-s}\right)^{-1},$$

是研究素数分布规律的基础。黎曼的研究也以这一公式作为起点。为了消除右边的连乘积，欧拉曾经对公式两边取对数，黎曼也如法炮制（看来连乘积真是人见人恨），从而得到：

$$\ln\zeta(s)=-\sum_p\ln\left(1-p^{-s}\right)=\sum_p\sum_n\left[(1/n)p^{-ns}\right]。$$

过了这一步，两人就分道扬镳了：欧拉——如我们在上节所见——小试身手，证明了素数有无穷多个，然后就鸣金收兵了；而黎曼则沿着一条布满荆棘的道路继续走了下去，走出了素数研究的一片崭新的天地。

可以证明，上式右边的双重求和在复平面上 $\mathrm{Re}(s)>1$ 的区域内是绝对收敛的，并且可以改写成斯蒂尔吉斯积分（有兴趣的读者可自行证明）：

$$\ln\zeta(s)=\int_0^\infty x^{-s}dJ(x)。$$

其中 $J(x)$ 是一个特殊的阶梯函数，它在 $x=0$ 取值为零，以后每越过一个素数就增加 1，每越过一个素数的平方就增加 1/2，...，每越过一个素数的 n 次方就增加 $1/n$,...。在 $J(x)$ 不连续的点（即 x 等于素数、素数的平方、...、素数的 n 次方 ... 的点）上其函数值用 $J(x)=[J(x-)+J(x+)]/2$ 来定义。显然，这样的一个阶梯函数可以用素数分布函数 $\pi(x)$ 表示为：

$$J(x)=\sum_n\left[\frac{1}{n}\pi\left(x^{1/n}\right)\right]。$$

对上述斯蒂尔吉斯积分进行一次分部积分便可得到：

$$\ln\zeta(s)=s\int_0^\infty J(x)x^{-s-1}dx。$$

这个公式的左边是黎曼 ζ 函数的自然对数，右边则是对 $J(x)$——一个与素数分布函数 $\pi(x)$ 有直接关系的函数——的积分，它可以被视为欧拉乘积公式的积分形式。我们得到这一结果的方法与黎曼有所不同，黎曼发表论文时还没有斯蒂尔吉斯积分——那时候斯蒂尔吉斯（Thomas Stieltjes，1856-1894）才三岁。

如果说传统形式下的欧拉乘积公式只是黎曼 ζ 函数与素数分布之间存在关联的征兆，那么在这个积分形式的欧拉乘积公式下这两者之间的关联就已是确凿无疑并且完全定量了。接下来首先要做的显然是从上述积分中解出 $J(x)$ 来，这在当时的数学背

注 4.1

当然，所谓“难读”是一个相对概念，是相对于论文发表时数学界的水平而言的。

Riemann

景下并不容易，但却难不倒象黎曼这样的复变函数论大师。他解出的 $J(x)$ 是（学过复变函数论的读者不妨试着证明一下）：

$$J(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\frac{\ln\zeta(z)}{z}x^{z}dz$$

其中 a 为大于 1 的实数。这是一个条件收敛的积分，它的确切定义是从 $a-ib$ 积分到 $a+ib$（b 为正实数），然后取 $b\to\infty$ 的极限。当黎曼写下这个公式时，只是轻描淡写地提了一句：这是完全普遍的。听上去象是在叙述一个尽人皆知的简单事实。而事实上，与黎曼所说的普遍性相匹配的完整结果直到四十年后才由芬兰数学家梅林（Robert Mellin，1854-1933）所发表，现在被称为梅林变换（Mellin Transform）。象这样一种被黎曼随手写下、却让数学界花费几十甚至上百年的时间才能证明的命题在黎曼的那篇论文中还有好几处。这是黎曼那篇论文的一个极为突出的特点：它有一种高屋建瓴的宏伟视野，远远地超越了同时代的其它数学文献。它那高度浓缩的文句背后包含着的极为丰富的数学结果，让后世的数学家们陷入了漫长的深思之中。直到今天，我们的数学在整体上虽已远非黎曼时代可比，但数学家们仍未能完全理解黎曼在那篇短短八页的简短论文中显露出的全部智慧。$J(x)$ 的表达式是我们碰到的黎曼那篇论文中的结果超前于时代的第一个例子，在下一节中我们将遇到其它例子。这里需要说明一下，为了先把黎曼论文的思路表述清楚，我们对叙述的顺序作了调整，因此这里所说的“第一个例子”是相对于我们的叙述而言的。在黎曼的原始论文中其它的一些例子出现得更早。

在一代代的后世数学家们为那些被黎曼省略掉的证明而失眠的时候，他们中的一些也许会联想到费尔马（Pierre de Fermat，1601-1665）。这位法国数学家在丢番图的《算术》(«Arithmetica») 页边上写下著名的费尔马猜想（Fermat’s Last Theorem）的时候，随手加了一句话：“我发现了一个真正出色的证明，可惜页边太窄写不下来”[注 4.2]。令人尴尬的是，费尔马的猜想自 1670 年被他儿子公诸于世（那时他本人已经去世）以来，竟然难倒了整个数学界长达 324 年之久，直到 1994 年才被英国数学家怀尔斯（Andrew Wiles）所证明。但怀尔斯的证明篇幅浩繁，莫说在《算术》的页边上写不下来，即便把整个大英百科全书的页边加起来，也未必写得下来。现在人们普遍认为，费尔马并没有找到费尔马猜想的证明，他自以为找到的那个“真正出色的证明”只是三百多年间无数个错误证明中的一个。那么黎曼的情形会不会也象费尔马一样呢？他的那些省略掉的证明会不会也象费尔马的那个“真正出色的证明”一样呢？从目前人们对黎曼的研究来看，答案基本上是否定的。黎曼作为堪与高斯齐名的有史以来最伟大的数学家之一，他的水平远非费尔马可比。而且人们在对黎曼的部分手稿进行研究时发现，黎曼对自己论文中的许多语焉不详的命题是做过扎实的演算和证明的，只不过他和高斯一样追求完美，发表的东西远远少于自己研究过的。更令人钦佩的是，黎曼手稿中一些演算和证明哪怕是时隔了几十年之后才被整理出来，却往往还是大大超越当时数学界的水平。因此我们有一定的理由相信，黎曼在论文中以陈述而不是猜测的语气表述的内容——无论有没有给出证明——都是有着深入的演算和证明背景的。

好了，现在回到 $J(x)$ 的表达式来，这个表达式给出了 $J(x)$ 与黎曼 ζ 函数之间的确切关联。换句话说，只要知道了 $\zeta(s)$，通过这个表达式原则上就可以计算出 $J(x)$。知道了 $J(x)$，下一步显然就是计算 $\pi(x)$。这并不困难，因为上面提到的 $J(x)$ 与 $\pi(x)$ 之间的关系式可以通过所谓的莫比乌斯反演（Möbius Inversion）解出，其结果为：

$$\pi(x)=\sum_{n}\left[\frac{\mu(n)}{n}\right]J\left(x^{1/n}\right)$$

这里的 $\mu(n)$ 被称为莫比乌斯函数，它的取值如下：

- $\mu(1)=1$
- $\mu(n)=0$（如果 n 可以被某个素数的平方整除）
- $\mu(n)=-1$（如果 n 是奇数个不同素数的乘积）
- $\mu(n)=1$（如果 n 是偶数个不同素数的乘积）

注 4.2

费尔马猜想（现在被称为费尔马大定理）的内容是：方程 $x^n+y^n=z^n$ 在 $n>2$ 时没有非零整数解。

因此知道了 $J(x)$ 就可以计算出 $\pi(x)$，即素数的分布函数。把这些步骤连接在一起，我们看到，从 ς(s) 到 $J(x)$，再从 $J(x)$ 到 $\pi(x)$，素数分布的秘密完全定量地蕴涵在了黎曼 ζ 函数之中。这就是黎曼研究素数分布的基本思路。在下一节中，我们将进一步深入黎曼的论文，让那些千呼万唤犹未露面的黎曼 ς 函数的非平凡零点显露在我们的镁光灯下。

5 黎曼的论文——零点分布与素数分布

在上节中我们看到，素数的分布与黎曼 ζ 函数之间存在着深刻的关联。这一关联的核心就是 $J(x)$ 的积分表达式。由于黎曼 ζ 函数具有极为复杂的性质，这一积分同样也是极为复杂的。为了对这一积分做进一步的研究，黎曼引进了一个辅助函数 $\xi(s)$ [注 5.1]：

$$\xi(s)=\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)(s-1)\pi^{-s/2}\zeta(s)\text{。}$$

引进这样一个辅助函数有什么好处呢？可以证明，由上式定义的 $\xi(s)$ 是一个整函数（Entire Function），即在复平面上所有 $s\neq\infty$ 的点上都解析的函数。这样的函数在性质上要比黎曼 ζ 函数简单得多，处理起来也容易得多。事实上，在所有非平庸的复变函数中，整函数是解析区域最为宽广的（解析区域比它更大——即包括 s=∞——的函数只有一种，那就是常数函数）。这是引进 ξ(s) 的好处之一。

利用这一辅助函数，我们在第二节中提到的黎曼 ζ 函数满足的代数关系式

$$\zeta(s)=2\Gamma(1-s)(2\pi)^{s-1}\sin(\pi s/2)\zeta(1-s),$$

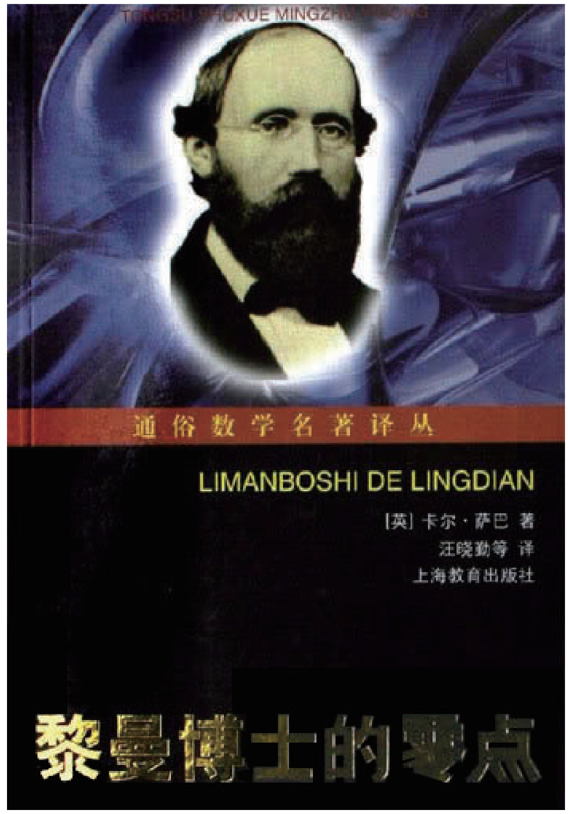
可以表述为一个对于 s 与 $1-s$ 对称的简单形式：

$$\xi(s)=\xi(1-s)\text{。}$$

这是引进 ξ(s) 的好处之二。

注 5.1

黎曼对 ξ 函数的定义与我们所用的略有差异，他的 ξ 函数用我们的 ξ 函数可以表示为 $\xi(s)=\xi(1/2+is)$。



从 $\xi(s)$ 的定义中不难看到，$\xi(s)$ 的零点必定是 ς(s) 的零点 [注 5.2]。另一方面，ς(s) 的零点除了平凡零点 $s=-2n$（n 为自然数）由于恰好是 Γ(s/2+1) 的极点，从而不是 ξ(s) 的零点外，全部都是 ξ(s) 的零点，因此 $\xi(s)$ 的零点与黎曼 ζ 函数的非平凡零点重合。换句话说，$\xi(s)$ 将黎曼 ζ 函数的非平凡零点从全体零点中分离了出来，这是引进 $\xi(s)$ 的好处之三。

由于我们已经知道，$\zeta(s)$ 在 Re(s)>1 没有零点（证明见《Euler 乘积公式》一文，http://www.changhai.org），因此 $\xi(s)$ 在 Re(s)>1 也没有零点；又由于 $\xi(s)=\xi(1-s)$，因此 ξ(s) 在 Re(s)<0 也没有

注 5.2

这是由于 Γ 函数没有零点，而 s-1 的唯一零点 s=1 又不是 ξ(s) 的零点（因为 ξ(1)=ξ(0)=-ζ(0)=1/2）。因此 ξ(s) 的零点只能出现在 ζ(s) 的零点处。

零点。这表明 $\xi(s)$ 的所有零点——从而 $\zeta(s)$ 的所有非平凡零点——都位于 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ 的区域内。由此我们得到了一个有关黎曼 ζ 函数零点分布的重要结果，那就是：黎曼 ζ 函数的所有非平凡零点都位于复平面上 $0 \le \mathrm{Re}(s) \le 1$ 的区域内。这一结果虽然离黎曼猜想要求的所有非平凡零点都位于复平面上 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上还相距甚远，但起码也算是万里长征的第一步。

黎曼接着用 $\xi(s)$ 的零点对 $\ln \xi(s)$ 进行了分解：

$$\ln \xi(s) = \ln \xi(0) + \sum_{\rho} \ln\left(1-\frac{s}{\rho}\right)。$$

其中 ρ 为 $\xi(s)$ 的零点（也就是黎曼 ζ 函数的非平凡零点——这些家伙终于出场了！）。分解式中的求和对所有的 ρ 进行，并且是以先将 ρ 与 $1-\rho$ 配对的方式进行的(由于 $\xi(s)=\xi(1-s)$，因此零点总是以 ρ 与 $1-\rho$ 成对的方式出现的)。这一点很重要，因为上述级数是条件收敛的，但是在将 ρ 与 $1-\rho$ 配对之后则是绝对收敛的。这一分解式也可以写成等价的连乘积关系式：

$$\xi(s) = \xi(0)\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)。$$

这样的连乘积关系式对于有限多项式来说是显而易见的（只要 $\xi(0)\neq 0$），但对于无穷乘积来说却绝非一目了然，它有赖于 $\xi(s)$ 是一个整函数这一事实，其完整证明直到 1893 年才由阿达马在对整函数的无穷乘积表达式做系统研究时给出。阿达马的这个证明是黎曼的论文发表之后 34 年间在这一领域的唯一一个重要进展 [注 5.3]。

注 5.3

黎曼虽然没有详细讨论上述无穷乘积表达式的证明，但他在写下与之等价的 $\ln\xi(s)$ 的级数分解式之前提了一句：$\xi(s)$ 是一个关于 $(s-1/2)^2$ 的收敛极快的级数。这似乎暗示 $\xi(s)$ 作为 $(s-1/2)^2$ 的级数的收敛方式与它的无穷乘积表达式之间存在着联系。阿达马的证明确立了这种联系。此外，黎曼通过讨论 $\xi(s)$ 的零点分布对 $\ln\xi(s)$ 级数分解式的收敛性作了说明。虽然所有这些都因过于粗略，不足以构成证明，但这一暗一明两条思路后来都被证明是可以实现的。

很明显，上述级数分解式的收敛与否与 $\xi(s)$ 的零点分布有着密切的关系。为此黎曼研究了 $\xi(s)$ 的零点分布，并由此而提出了三个重要的命题：

1. 在 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的区间内，$\xi(s)$ 的零点数目大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。

2. 在 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的区间内，$\xi(s)$ 的位于 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上的零点数目也大约为 $(T/2\pi)\ln(T/2\pi)-(T/2\pi)$。

3. $\xi(s)$ 的所有零点都位于 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。

在这三个命题中，第一个命题是为了证明级数分解式的收敛性所需要的(不过黎曼建立在这一命题基础上的说明——如我们在[注 5.3]中评述的——因过于简略，不足以构成证明)。对于这个命题黎曼的证明是指出在 $0<\mathrm{Im}(s)<T$ 的区间内 $\xi(s)$ 的零点数目可以由 $d\xi(s)/2\pi i\xi(s)$ 沿矩形区域 $\{0<\mathrm{Re}(s)<1,\ 0<\mathrm{Im}(s)<T\}$ 的边界作路径积分得到。在黎曼看来，这点小小的积分算不上什么，因此他直接写下了结果(即命题一)。黎曼并且给出了该结果的相对误差为 1/T。但黎曼显然大大高估了他的读者的水平，因为直到 46 年后 (1905 年)，他所写下的这一结果才由德国数学家曼戈尔特 (von Mangoldt，1854-1925) 给出了证明(这一结果因此而被称为黎曼 - 曼戈尔特公式)。

不过黎曼留给读者们的这点智力挫折与他的第二个命题相比却又小巫见大巫了。将黎曼的第二个命题与前一个命题相比较可以看到，这第二个命题表明 $\xi(s)$ 的几乎所有的零点都位于 $\mathrm{Re}(s)=1/2$ 的直线上。这是一个令人吃惊的命题，因为它比迄今为止——也就是黎曼的论文发表一百五十多年以来——人们在黎曼猜想上取得的所有结果都要强得多！黎曼在叙述这一命题的时候用的是完全确定的语气，这似乎表明，当他写下这一命题的时候，他认为自己对此已经有了证明。可惜的是他完全没有提及证明的细节，因此他究竟是怎么证明的？他的证明究竟是正确的还是错误的？我们就无从得知了。除了 1859 年的论文外，黎曼还曾在一封信件中提到过这一命题，他说这一命题可以从对 ξ 函数的一种新的表达式中得到，但他还没有将之简化到

可以发表的程度。这就是后人从黎曼留下的片言只语中得到的有关这一命题的全部信息。

黎曼的这三个命题就象是三座渐次升高的山峰，一座比一座巍峨，攀登起来一座比一座困难。他的第一个命题让数学界等待了四十六年；他的第二个命题已经让数学界等待了一百四十多年；而他的第三个命题——读者想必都看出来了——正是大名鼎鼎的黎曼猜想！它要让大家等待多久呢？没有人知道。但是据说著名的德国数学家希尔伯特(David Hilbert，1862-1943)有一次曾被人问到如果他能在 500 年后重返人间，他最想问的问题是什么？希尔伯特回答说他最想问的就是：是否已经有人解决了黎曼猜想？

有意思的是，希尔伯特一度曾对黎曼猜想的解决抱有十分乐观的看法。他在 1919 年的一次演讲中表示在他自己的有生之年可望见到黎曼猜想的解决；在年轻听众的有生之年可望见到费尔马大定理的解决；而另一个问题——希尔伯特第七问题——才是最为困难的，因为谁也没有希望看到它的解决。不料仅仅过了十几年，希尔伯特就活着见到了他的第七问题的解决；七十五年后，费尔马大定理也被解决了；而黎曼猜想却是谁也没能活着见到它的解决。

正所谓山雨欲来风满楼，一直游刃有余、惯常在谈笑间让定理灰飞烟灭的黎曼到了表述这第三个命题——也就是黎曼猜想——的时候也终于一改举重若轻的风格，用起了象“非常可能”这样的不确定语气。黎曼并且写道：“我们当然希望对此能有一个严格的证明，但是在经过了一些快速而徒劳的尝试后，我已经把对这种证明的寻找放在了一边，因为它对于我所研究的直接目标不是必须的”。黎曼把证明放在了一边，整个数学界的心弦却被提了起来，直到今天还提得紧紧的。黎曼猜想的成立与否对于黎曼的“直接目标”——即证明 $\ln\xi(s)$ 的级数分解式的收敛性——的确不是必须的（因为那只要上述第一个命题就够了），但对于今天的数学界来说却是至关重要的。粗略的统计表明，在当今的数学文献中已经有超过一千条数学命题或“定理”以黎曼猜想的成立作为前提。黎曼猜想的命运与提出这些命题或“定理”的所有数学家们的“直接目标”息息相关。另一方面，黎曼对于黎曼猜想的表述方式也从一个侧面表明黎曼对于自己写下的命题是属于猜测性的还是肯定性的是加以区分的。因此他对于那些没有注明是猜测性的命题——包括迄今无人能够证明的上述第二个命题——应该是有所证明的（尽管由于他省略了证明，我们无从知道那些证明是否正确）。

现在让我们回到对 $J(x)$ 的计算上来。利用 $\xi(s)$ 的定义及其分解式，可以将 $\ln\zeta(s)$ 表示为：

$$\ln\zeta(s)=\ln\xi(0)+\prod_{\rho}\left(1-\frac{s}{\rho}\right)-\ln\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)-\frac{s}{2}\ln\pi-\ln(s-1)。$$

对 $\ln\zeta(s)$ 作这样的分解目的是为了计算 $J(x)$，但是将这一分解式代入 $J(x)$ 的积分表达式后所得的各单项的积分并不都收敛，因此黎曼在代入前先对 $J(x)$ 作了一次分部积分，由此得到（读者可自行证明）：

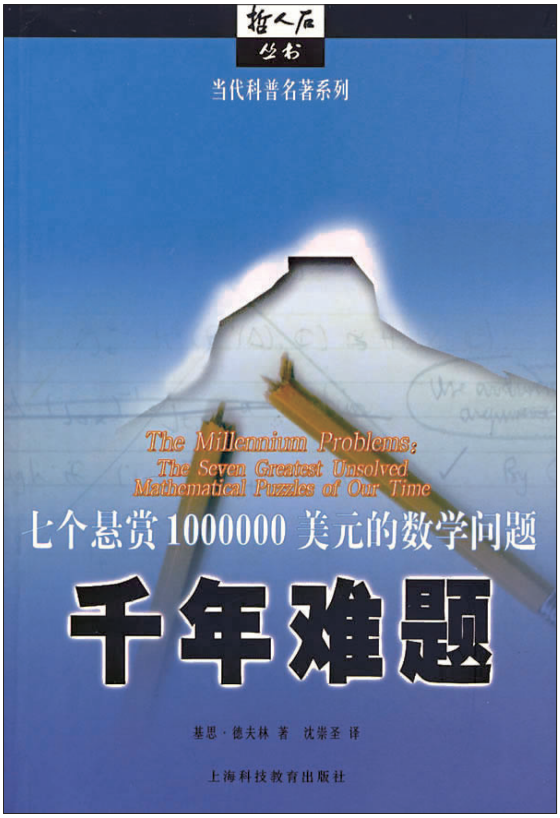
$$J(x)=-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\ln x}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}\frac{d}{dz}\left[\frac{\ln\zeta(z)}{z}\right]x^z dz。$$

将 $\ln\zeta(s)$ 的分解式代入上式，各单项可以分别积出，其结果如下表所列：

$\ln\zeta(s)$ 分解式中的项	对应的积分结果
$-\ln(s-1)$	$\mathrm{Li}(x)$
$\Sigma_\rho\ \ln(1-s/\rho)$	$-\Sigma_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^\rho)+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$
$-\ln\Gamma(s/2+1)$	$\int_x^\infty\frac{dt}{t(t^2-1)\ln t}$
$\ln\xi(0)$	$\ln\xi(0)=-\ln 2$
$-(s/2)\ln\pi$	0

在上述这些结果中，对 $\Sigma_\rho\ln(1-s/\rho)$ 的积分最为复杂，其结果 $-\Sigma_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^\rho)+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$ 是对级数逐项积分的结果。这一结果是条件收敛的，不仅要如 $\ln\xi(s)$ 的级数表达式中一样将 ρ 与 $1-\rho$ 进行配对，而且还必须依照 $\mathrm{Im}(\rho)$ 从小到大的顺序求和。黎曼在给出这一结果时承认逐项积分的有效性有赖于对 ξ 函数的“更严格”的讨论，但他说这是容易证明的。这一“容易证明”的结果在 36 年后（1895 年）被

Riemann



黎曼猜想和庞加莱猜想均属于七个悬赏百万美元的难题。后者已被俄国数学家佩雷尔曼解决，但他拒绝了百万美元。

曼戈尔特所证明。另外值得指出的一点是，在黎曼对这一级数的各单项进行积分时隐含了一个要求，那就是对所有的零点 ρ，$0<\mathrm{Re}(\rho)<1$[注 5.4]，这比我们在前面已经证明的 $0\le\mathrm{Re}(\rho)\le1$ 要强。这一加强看似细微（不过是将等号排除掉而已），其实却——如我们在后文中将会看到的——是数论中一个非同小可的结果。黎曼在文章中不仅没有对这一结果加以证明，连暗示性的说明也没有，这是他论文的一个漏洞。这个漏洞在曼戈尔特的证明中也同样存在。这里要区分两个不同的问题：一个是证明逐项积分的可行性，另一个是计算级数各单项的积分。这个漏洞是出现在后一个问题中的。不过这一漏洞只是论证方法上的漏洞，是可以弥补的，论证的结果本身并不依赖 $0<\mathrm{Re}(\rho)<1$ 这样的条件。由上面这些结果黎曼得到了 $J(x)$ 的显形式：

$$J(x)=Li(x)-\sum_{\mathrm{Im}\,\rho>0}\left[Li\left(x^{\rho}\right)+Li\left(x^{1-\rho}\right)\right]+\int_x^{\infty}\frac{dt}{t\left(t^2-1\right)\ln t}-\ln 2。$$

这个结果，连同上节给出的 $\pi(x)$ 与 $J(x)$ 的关系式：

$$\pi(x)=\sum_n\left[\frac{\mu(n)}{n}\right]J\left(x^{1/n}\right),$$

便是黎曼所得到的素数分布的完整表达式，也是他1859年论文的主要结果。黎曼的这个结果给出的是素数分布的精确表达式，它的第一项（由 $J(x)$ 及 $\pi(x)$ 的第一项共同给出）正是当时尚未得到证明的素数定理所预言的结果 $\mathrm{Li}(x)$。

细心的读者可能会问：黎曼的结果既然给出了素数分布的精确表达式，却没能直接证明远比该结果粗糙的素数定理，这是为什么呢？这其中的奥秘就在于黎曼ζ函数的非平凡零点，在于 $J(x)$ 的表达式中那些与零点有关的项：$-\Sigma_{\mathrm{Im}(\rho)>0}[\mathrm{Li}(x^{\rho})+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})]$。在 $J(x)$ 的表达式中，所有其它的项都十分简单，也比较光滑，因此素数分布的细致规律——那些细致的疏密涨落——主要就蕴涵在了这一个与黎曼ζ函数非平凡零点有关的级数中。如上所述，这个级数是条件收敛的，也就是说它的收敛有赖于参与求和的各项——即来自不同零点的贡献——之间的相互抵消。这些来自不同零点的贡献就象一首盘旋起伏的舞曲，引导着素数的细致分布。而这首舞曲的奔放程度——也就是这些贡献相互抵消的方式和程度——决定了素数的实际分布与素数定理给出的渐近分布之间的接近程度。所有这一切都定量地取决于黎曼ζ函数非平凡零点的分布。黎曼给出的素数分布的精确结果之所以没能立即使对素数定理的直接证明成为可能，原因正是因为当时人们对黎曼ζ函数非平凡零点的分布还知道的太少（事实上当时人们所知道的也正是我们在上面已经证明的 $0\le\mathrm{Re}(\rho)\le1$），无法有效地估计来自零点的那些贡献的大小，从而也就无法有效地估计素数定理与素数

注 5.4

确切地说是 $\mathrm{Re}(\rho)>0$，但由于 ρ 与 $1-\rho$ 总是同为零点，因此 $\mathrm{Re}(\rho)>0$ 也意味着 $\mathrm{Re}(\rho)<1$。

Riemann

实际分布——即黎曼的结果——之间的偏差。

那么黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布对素数定理与素数实际分布之间的偏差究竟有什么样的影响呢？数学家们已经取得了一系列结果。素数定理的证明本身就是其中一个，我们将在后文中提及。在素数定理的证明之后，1901 年，瑞典数学家科赫（von Koch，1870-1924）证明了，假如黎曼猜想成立，那么素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差为 $O(x^{1/2}\ln x)$[注 5.5]。另一方面，$\mathrm{Li}(x^\rho)$ 的模随 x 的增加以 $x^{\mathrm{Re}(\rho)}/\ln x$ 的方式增加，因此任何一对零点 ρ 与 $1-\rho$ 给出的渐近贡献 $\mathrm{Li}(x^\rho)+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})$ 起码是 $\mathrm{Li}(x^{1/2}) \sim x^{1/2}/\ln x$。这一结果暗示素数定理与素数实际分布之间的偏差不可能小于 $\mathrm{Li}(x^{1/2})$。事实上，英国数学家李特尔伍德（John Littlewood）曾经证明，素数定理与素数实际分布之间的偏差起码有 $\mathrm{Li}(x^{1/2})\ \ln\ln\ln x$。这与科赫的结果已经非常接近 (其主项都是 $x^{1/2}$)。因此黎曼猜想的成立意味着素数的分布相对有序；而反过来，假如黎曼猜想不成立，假如黎曼 ζ 函数的某一对非平凡零点 ρ 与 $1-\rho$ 偏离了 critical line (即 $\mathrm{Re}(\rho)>1/2$ 或 $\mathrm{Re}(1-\rho)>1/2$)，那么它们所对应的渐近贡献 $\mathrm{Li}(x^\rho)+\mathrm{Li}(x^{1-\rho})$ 的主项就会大于 $x^{1/2}$，从而素数定理与素数实际分布之间的偏差就会变大。在不假定黎曼猜想成立的情况下，目前所能证明的素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差的主项为 $o(x)$，远远差于黎曼猜想成立情况下的 $o(x^{1/2+\varepsilon})$，这里 ε 是任意小的正数。

注 5.5

这一结果反了过来也成立，即假如素数定理与素数实际分布之间的绝对偏差为 $O(x^{1/2}\ln x)$(这个条件还可以减弱为 $O(x^{1/2+\varepsilon})$)，则黎曼猜想必定成立。

因此，对黎曼猜想的研究使数学家们看到了貌似随机的素数分布背后奇异的规律和秩序。这种规律和秩序就体现在黎曼 ζ 函数非平凡零点的分布之中，它让数学家们目驰神移。

作者介绍：

卢昌海，哥伦比亚大学物理学博士，现旅居纽约，为本刊特约撰稿人。