理性文明两千年
——概述与重访（上）

项武义

>> 本文将以简朴平实的表述，概括其精要；并且再以简洁易懂的途径和数理分析重访前述三个重大突破。我觉得唯有如此才能让有智而且有志的中华儿女，踏着巨人的脚印，迈步奋进，投身于承先启后，继往开来的理性文明之长河。

§1. 引言

理性文明 (Civilization of Rational Mind) 的启蒙，至少可以追溯到纪元前六、五世纪的毕达哥拉斯学派 (Pythagoreans)；世代相承，逐步演进，一直到四百年前开普勒 (Kepler) 的《新天文学》(Astronomia Nova) 和 1687 年牛顿 (Newton) 的《自然哲学的数学原理》(Philosophiae Naturalis Principia Mathematica)，才奠定了现代科学蓬勃进展的基础。纵观这两千多年理性文明的发展史，其主轴与重大进展主要在几何学、天文学与物理学；古希腊的几何基础论，开普勒的《新天文学》和牛顿的《原理》乃是在上述三者的重大突破，是理性文明史上三个光芒万丈的伟大里程碑！再者，太阳系永恒之舞的研究则又是一个贯串几何、天文、物理两千年的核心议题和主角。

我们所在的地球和其它行星 (planets) 如金、木、水、火、土等星绕日运行，如今已是众所周知的常识。但是，此事一直到四百年前开普勒行星定律的伟大发现才真相大白！各个行星漫游于星际的行踪奇特各异，其理何在？此乃古天文学的核心议题，也是希腊几何学之量天巨梦，堪称“千古之谜”！开普勒的伟大发现不但使得困惑理性文明两千多年的“千古之谜”真相大白，也圆了希腊几何学的量天巨梦。我们所在的地球和地球所在的太阳系的永恒之舞，其实是如此精简完美！大自然的至善、至美、至精、至简，令人叹为观止！再者，由如此简朴精到的实验性定律 (Empirical Laws)，再加以精益求精的数理分析，就不难探本究源顺理成章地认识到行星定律的“数理本质”在于个别行星运行的加速度(acceleration) 指向太阳而且其大小和“日 - 星距”的平方成反比（参看 §6)，此乃天上之理。若将它和伽利略 (Galileo）的重力实验 (人间之理) 相比较，则天上人间合而为一，即得牛顿万有引力定律 (Law of Universal Gravitation)。太阳系永恒之舞的千古之谜，引人入胜，贯串几何、天文、物理两千年的进展，令人神往！发人深思！本文将以简朴平实的表述，概括其精要；并且再以简洁易懂的途径和数理分析重访前述三个重大突破。我觉得唯有如此才能让有智而且有志的中华儿女，踏着巨人的脚印，迈步奋进，投身于承先启后，继往开来的理性文明之长河。

>> 理性文明两千年是一个极大的题目，在目下创刊的期刊中，肯定还会涌现很多这个题材的论著，试写这篇短文，只是一种 砖引玉。为我们相互切磋，返璞归真地研讨这个大题目起个头绪。

本文有很多素材取自张海潮、姚珩和本文作者合写的小册子《千古之谜与几何、天文、物理两千年》（高教出版社）2010 年出版。可以说本文实乃它的摘要和另一侧面，而上述小册子则是本文的主要参考文献。理性文明两千年是一个极大的题目，在今后出版的刊物中，肯定还会涌现很多这个题材的论著，试写这篇短文，只是一种抛砖引玉之举。为我们相互切磋，返璞归真地研讨这个大题目起个头绪。

毕达哥拉斯 (Pythagoras) 所创导的哲理：宇宙的和谐与精要在于数、比值和完美的几何形体之妥善配合。若改用现代的说法和后见之明，毕达哥拉斯当年的灼见就是：数理分析乃是认知大自然的不二法门，而大自然的至精至简则是以数学形式表现者 (written in mathematics)。总之，一方面，基础数学在文明中扮演着核心的角色；而另一方面，基础数学教育与学习，当然要从它和理性文明的水乳交融中才能平实近人，引人入胜。

§2. 古希腊几何学与天文学——概述其要

古希腊文明是在继承古埃及和古巴比伦文明的基础之上，特别在天文学和几何学方面力求精进更上一层楼。早在纪元前六、五世纪，毕达哥拉斯本人创导宇宙具有和谐的内在结构的宏伟哲理；并且提出数、比值和简朴完美的几何形体是研究自然的主要途径。这个含义深远的卓见，不但启发其门人 (世称 Pythagoreans) 致力于数与几何的研究，也启示着两千多年世世代代的文明继承者，定量的数理分析乃是探索自然内在结构的不二法门。

2. 1 定量平面几何基础（初）论

古希腊几何学是在继承古埃及和古巴比伦的几何知识的基础之上再更上层楼逐步精进发展而成的。在其启蒙阶段先行研讨定性平面几何 (qualitative plane geometry)，主要是对于三角形的几个叠合条件 (congruence conditions) 如边角边、角边角、边边边的等价性，等腰三角形定理和基本作图的讨论；所得者可以说乃是平面对于轴对称的诸多反映。

及至纪元前六、五世纪，特别是毕达哥拉斯学派开始致力于定量平面几何基础论的建立，从古埃及和巴比伦文明的考古发现，可以推想定量平面几何的好些基本公式，如矩形面积等于长乘宽，三角形面积等于二分之一底乘高，甚至于直角三角形的边长平方和关系式（亦即勾股定理）在当年业已是常用的通识，但是并没有给以严格论证；而当年古希腊几何学家们所致力者就是给这些基本公式给出系统的严格论证。当他们着手研讨定量平面几何基本公式的论证的起步时刻，很自然地认识到下述两点，即

其一：长度是一切几何量中的最基本者，所以长度度量的概念当然得先行严格定义。在此他们引进可公度性 (commensurability) 这一概念，即 a,b 同为另一公尺度 (common yardstick) c 的整数倍，亦即 $a=m\cdot c$，$b=n\cdot c$，则 a,b 长度之比值定义为 $a:b=m/n$。再者他们还判定任何两个线段总是可公度的，并以此判定 (即 universality of commensurability) 作为基础论的头号公设（或公理）。

其二：他们认识到基于平行性的平行分割乃是论证这些基本公式的必经之途，所以在进而研讨定量几何基础论之起步，引入现在称之谓第五公设 (fifth postulate) 者，作为论证之依据，即如图 - 1 所示之同傍内角 $\angle 1, \angle 2$ 之和，若小于一个平角，则 l_1 和 l_2 必相交于 l 之该侧。

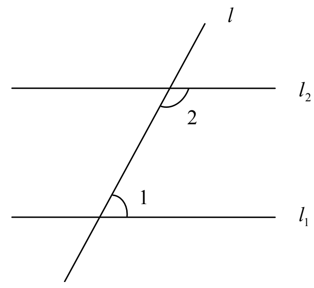

图 - 1

> **历史的注记**
>
> (i) 众所周知，易证上述第五公设和三角形内角和恒等于一个平角是逻辑相等的。
>
> (ii) 当年的定性平面几何并没有发现下述不难证明的两个定理，即（参看图 -1）
>
> **定理 1**：*三角形内角和恒小于或等于平角。*
>
> **定理 2**：*若有一个三角形 ABC 的内角和等于平角，则所有三角形的内角和皆恒等于平角。*
>
> (iii) 由此可见，当我们由定性平面几何向定量平面几何推进时，在三角形内角和上有唯二的两种选项，即恒等于 π 或恒小于 π；前者是当年选用的欧氏几何，而后者则是一直到十九世纪才发现的非欧几何 (Non-Euclidean Geometry)。

2. 2 石破天惊，几何巨震——希帕索斯

发现不可公度比：

上述古希腊的基础论的两个基石之中，“平行公设”是使得定量平面几何的基本公式如面积公式等等都既精且简的必要选项，但是可公度性的普遍成立这个头号公设却根本是谬误的！这就是下述希帕索斯 (Hippasus）在纪元前五世纪的伟大发现：不可公度线段的存在！如图 - 2 所示，设 a 和 b 分别是一个正五边形的边长和对角线长，则 $\lambda_1=(b-a)$ 和 a 又是一个小一号的正五边形的边长

>> 早在纪元前六、五世纪，毕达哥拉斯本人创导宇宙具有和谐的内在结构的宏伟哲理；并且提出数、比值和简朴完美的几何形体是研究自然的主要途径。这个含义深远的卓见，不但启发其门人致力于数与几何的研究，也启示着两千多年世世代代的文明继承者，定量的数理分析乃是探索自然内在结构的不二法门。

和对角线长。由此可见，a 和 b 的辗转丈量在长度上的表式如下：

$$b = a + \lambda_1, \quad a = \lambda_1 + \lambda_2, \quad \ldots \quad , \quad \lambda_{k-1} = \lambda_k + \lambda_{k+1}, \quad \ldots$$

其中 $\{\lambda_k, \lambda_{k+1}\}$ 总是一个愈来愈小的正五边形的对角线长和边长，永无止休！所以是不可公度的！

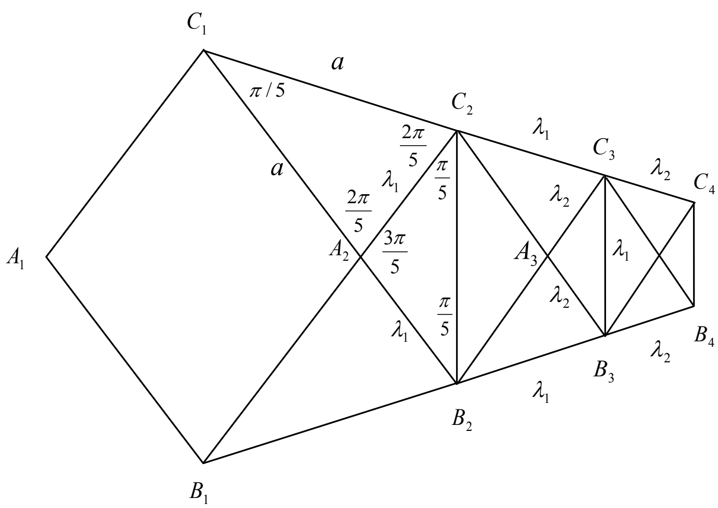

图 - 2

2. 3 几何基础论的震后重建——脱胎换骨，得见精深：欧多克索斯逼近论的伟大创见

话说当年，希帕索斯的伟大发现，雄辩地指出当年希腊文明引以自豪的几何基础论乃是建立在一个根本错误的头号公设之上者。这个石破天惊的几何巨震 (geoquake) 使得当代的几何基础论摇摇欲坠，整个希腊几何学界无比难堪！

其实，不可公度量的发现，并非全面否定初论的成就，此事只不过明示原先认为完整无缺的论证乃是仅仅对可公度这种特殊情形的证明，而一般不可公度的情形，则尚有待补证，这就是当年希腊几何学亟待补救的震后重建之任务。大约经历了大半世纪的努力，此事终于促使欧多克索斯 (Eudoxus, 408-355 BC) 创建逼近论 (Theory of Approximation) 而完满达成。它不但使得几何学脱胎换骨，浴火重生，而且使得理性文明得以连续世界之精深，奠定了分析学的重要基石，是理性文明发展上第一个光芒万丈的里程碑。兹概述其要如下：

>> 希帕索斯的伟大发现，指出当年希腊文明引以自豪的几何基础论乃是建立在一个根本错误的头号公设之上者。这个石破天惊的几何巨震 使得当代的几何基础论摇摇欲坠，整个希腊几何学界无比难堪！

相信当年很可能是下述“相似三角形定理如何补证”这个问题，促使欧多克索斯创建其逼近论：

相似三角形定理：

设 ΔABC 和 $\Delta A'B'C'$ 的对应角分别相等，则其对应边成比例，亦即

$$\angle A = \angle A', \quad \angle B = \angle B', \quad \angle C = \angle C'$$

$$\Rightarrow \quad a : a' = b : b' = c : c'$$

〔分析〕：当上述三角形有一对对应边的比值是分数 m/n 时 (亦即可公度)，当年业已用平行分割法证明其余两对对应边的比值也等于 m/n。由此可见，所需要加以补证的情形乃是三对对应边皆为不可公度的情形，如何证明它们的“比值”依然相等？

首先，欧多克索斯认识到两对不可公度的线段的“比值”，例如 $a:a'$ 和 $b:b'$，其相应的概念尚有待明确。因为它们不再是分数，在本质上还是一种有待理解的“新东西”。上述情况可以概括成：可公度比是“已知”的分数；而不可公度比则是有待理解的“未知”。两者不相等但是其大小关系的实质内涵却又其义甚明，这就是下面叙述的欧多克索斯逼近论的起点：

比较原则：设 a 和 a' 不可公度，则

$$a : a' \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} \frac{m}{n} \quad \Leftrightarrow \quad a \begin{Bmatrix} \text{长于} \\ \text{短于} \end{Bmatrix} \frac{m}{n} a'$$

$$\Leftrightarrow \quad n \cdot a \begin{Bmatrix} \text{长于} \\ \text{短于} \end{Bmatrix} m \cdot a'$$

由此顺理成章，使得他认识到不可公度比之间的大小和相等的定义如下：

(i) 若有分数使得

$$a : b \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} \frac{m}{n} \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} c : d$$

则有 $a : b \begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix} c : d$，反之亦然。

(ii) 若对于任给正分数 m/n，它和 $a:a'$ 和 $b:b'$ 的大小关系总是同步的，则定义

$a:a'=b:b'$，亦即

$$na\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}ma' \quad 和 \quad nb\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}mb'。$$

对于任给 m， n 皆为同步，则定义 $a:a'=b:b'$。再者，为了使得上述简朴、精到的定义更有说服力，他还论证了下述逼近定理：

逼近定理：

对于一个给定的不可公度比 $a:b$ 和一个任意大的正整数 N，恒有另一正整数 m 使得 $\frac{m}{N}<a:b<\frac{m+1}{N}$。

有鉴于证明是不可能无中生有的，所以上述定理的证明当然也要有所本。为此，他提出现今误称为阿基米德（Archimedes）公理者，作为上述论证之依据，即

Eudoxus 公设：任给两个线段 l 和 s，不论 l 有多长，s 有多短，恒有足够大的整数 n 使得 $n\cdot s$ 比 l 长。

〔逼近定理的证明〕：取 $l=a,\ s=\frac{1}{N}b$。令 $m+1$ 为使 $n\cdot s>l$ 的最小正整数，则有

$$m\cdot\frac{1}{N}b<a<(m+1)\cdot\frac{1}{N}b，亦即 \frac{m}{N}<a:b<\frac{m+1}{N}。$$

这样就证明了逼近定理。□

推论 1：设 $a:b$ 和 $c:d$ 是两个不相等的不可公度比，即

$$a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d，$$

则存在有分数 m/n，使得

$$a:b\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}\frac{m}{n}\left\{\begin{matrix}>\\<\end{matrix}\right\}c:d。$$

〔证〕：两种情形的证法完全一样，只证 $a:b<c:d$ 的情形。取 N 足够大，使得 $1/N$ 小于其差 $(c:d-a:b)$。则前述 $(m+1)/N$ 必然满足

$$a:b<\frac{m+1}{N}<c:d。假若不然，则有$$

$$\frac{m}{N}<a:b<c:d<\frac{m+1}{N} \Rightarrow (c:d-a:b)<\frac{1}{N}$$

和所取 $1/N$ 小于 $(c:d-a:b)$ 矛盾。□

推论 2：设 $a:a'$ 和 $b:b'$ 对于任给分数的大小关系相同，则 $a:a'=b:b'$。由上述逼近定理，$a:a'$ 和 $b:b'$ 之间的差别要比任给 $1/N$ 还要小，它只能是零！

欧多克索斯对于相似三角形定理之补证：

对于任意大的 N，取 m 使得

$$\frac{m}{N}<a:a'<\frac{m+1}{N}$$

如图 -3 所示，取 C_N 和 C_N^* 使得

$$\overline{BC_N}=\frac{m}{N}a',\quad \overline{BC_N^*}=\frac{m+1}{N}a'$$

而且 $\overline{A_NC_N}\,//\,\overline{AC}\,//\,\overline{A_N^*C_N^*}$。

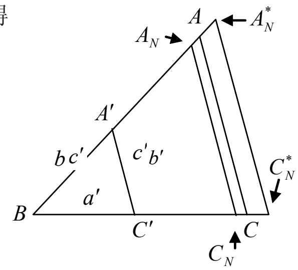

图 - 3

由可公度比的相似三角形定理，即有

$$\frac{m}{N}=\overline{BA_N}:\overline{BA'}<c:c'<\overline{BA_N^*}:\overline{BA'}=\frac{m+1}{N}，$$

$$\frac{m}{N}=\overline{A_NC_N}:\overline{A'C'}<b:b'<\overline{A_N^*C_N^*}:\overline{A'C'}=\frac{m+1}{N}。$$

所以 $b:b'$ 和 $a:a'$（以及 $c:c'$ 和 $a:a'$）之间的差别必须是零，因为它们都要比可以小到任意小的 $1/N$ 还要小！□

历史的注记

（i）当年欧多克索斯就是用同样的逼近论证，简朴精到地把原先只是在可公度比的特殊情形下具有证明的基本公式逐一补证，使得它们在不可公度比的一般情形也都普遍得证。重建几何基础论的丰功伟业，得以简洁完美地达成。

（ii）如今回顾反思，在定性平面几何中，我们基本上只用对称性，但是到了定量平面几何，平直性（亦即平行性或三角形内角和恒为平角）和连续性就自然而然地展现其重要性；前者是可公度比的情形的论证之所基，而后者则是进而推广到不可公度比的一般情形的论证之所本。

逼近与极限，连续性的认知与拓展：

希帕索斯的不可公度比的发现，深刻地触及空间连续性的本质；而欧多克索斯的逼近论则开拓了理解连续世界的简洁途径；前者为理性文明发现了连续世界，而后者则教导我们如何去认知天衣无缝的连续世界。改用现代常用的术语，就是妥用比较原则和上、下夹逼数列，以“已知之简”去逼近“未知（亦即待知事物）”；其实就是通常“以简御繁”，以已知理解未知这种简朴的哲理的量化和精确化。回顾当年欧多克索斯在重建几何基础论中，他所一再运用者乃是被夹逼于妥加构造的一对夹逼数列之间的数 α 之唯一性，即若有

α 和 α' 满足

$$a_n \to \left\{ \begin{matrix} \alpha \\ \alpha' \end{matrix} \right\} \leftarrow b_n \text{，} (b_n - a_n) \to 0 \text{，则} \alpha = \alpha' \text{。}$$

$$\text{因为} |\alpha - \alpha'| \le (b_n - a_n) \to 0 \Rightarrow |\alpha - \alpha'| = 0 \text{。}$$

在此，当然还会想到被夹逼于一对上、下夹逼数列之间的 α 的存在性问题，即

> *设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 分别是递增和递减数列，而且 $b_n \ge a_n$，$(b_n - a_n) \to 0$，是否恒有一个实数 α 被它们夹逼于其间？亦即 $a_n \le \alpha \le b_n, \forall n$。*

在此不妨设想当年几何大师欧多克索斯在讲述逼近论时，曾有一位听者有此一问，大师的回答又将如何？我觉得不论他自己是否业已想过上述存在性问题，他都会先说：这倒是一个好问题！然后在稍加思考后，用下述图解说明其答案是肯定的。

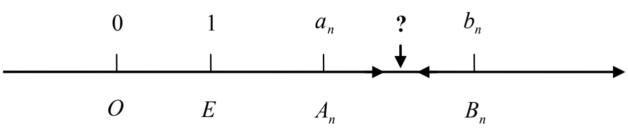

图 - 4

因为假若不存在，则直线岂不是在那里缺了一点！此事和直线连续不断但是一剪就断的直观本质相矛盾！换言之，上述存在性其实就是上述直观本质的解析描述。直线连续不断，但是一剪就断乃是空间连续性直观简朴的刻画，通过逼近法把它转化成夹逼数列的存在性这种解析描述（又是几何直观的量化和精确化！），它就可以用来论证分析学、几何学、代数学中各种各样的存在性定理之所基，洋洋大观，多彩多姿令人叹为观止！连续世界之美妙，有如无缝天衣；欧多克索斯的逼近思想，简朴精到，大智若愚，大巧若拙。大师风范高山仰止，令人神往心仪，自当学而时思之！在此不禁赞叹：无缝天衣尚须匠心裁！

2.4 古希腊天文学简介

天文学是古希腊文明世代相承用力最多、最深的学科。量天巨梦直接促进了古希腊几何学的发展；天文与几何，相辅相成齐头并进，乃是古文明中最为辉煌的两大支柱，此事至少可以追溯到希腊文明所继承的古埃及与古巴比伦文明。对于日、月、星象周而复始的运行的长期观察与详细纪录，其中最令人难以理解者是有五颗明亮的行星，即中国古代称之谓金星、木星、水星、火星和土星而西文称之谓 Venus，Jupiter，Mercury，Mars 和 Saturn 者，它们漫游于黄道十二宫 (zodiac zones) 的星座之间，行踪独特怪异（例如各有其逆行现象），其理何在？令古天文学家们困惑难解，堪称“千古之谜”！它也就自然而然地成为古希腊天文学的核心议题。世代相承想方设法以妥加组合的几何模型来解说行星的视运动（亦即行星漫游星际的独特行踪）。在这方面历经六、七个世纪所得的成果，在托勒密 (Ptolemy) 的巨著《至大论》(Almagest) 中集其大成。如今回顾它所达成者，乃是对于日、月、行星的视运动具有相当不错的可预测性的一套几何模型，但是在本质上却是一种和实况不符的地心论 (geocentric theory)。我们在此仅简略的介绍其梗概，给下一节所要讨论的天文学文艺复兴提供一个参照的历史背景。

在长达六、七个世纪世代相承对于行星之谜的探讨之中，古希腊两位最杰出的几何大师欧多克索斯和阿波罗尼斯 (Apollonius, 262-190 BC) 先后提出当代最有影响的几何模型，即前者的同心球天体模型和后者的本轮—均轮天体模型：

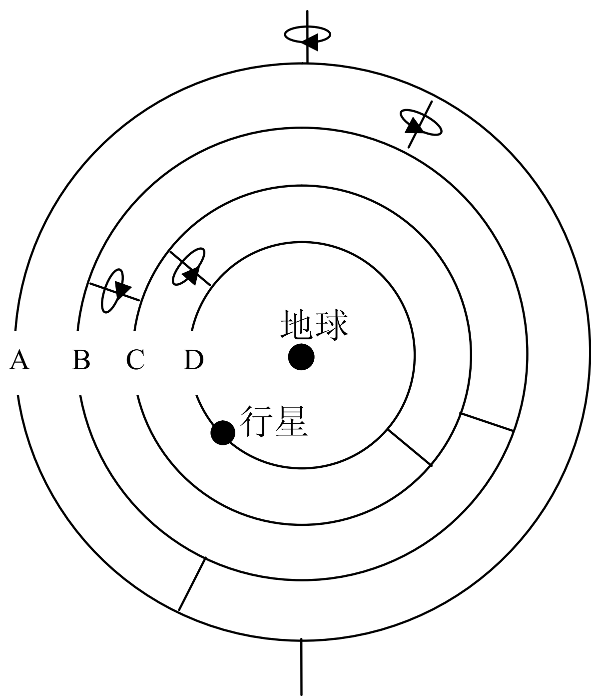

图 - 5

欧多克索斯的原著早已失传，但其基本想法由亚里斯多德 (Aristotle, 384-322 BC) 保留了下来。如图 - 5 所示，由四个同心球组成，各球以互相倾斜的轴，以不同的速度旋转。最外者绕南北间的轴自转，每日一周，次外者之转轴倾斜 23.5°，以“行星年”为周期；第三、第四者各自围绕着彼此倾斜一个小角度的轴，前者和第二轴垂直，而最内层的赤道上则镶嵌着行星。

欧氏的同心球模式有一个缺陷，由于它的行星和地球的距离不变，无法解释为何行星逆行时会显得更亮。托勒密在他的著作《系统》(Syntaxis) 中指出，阿波罗尼斯的本轮一均轮模型，可以解说上述逆行变亮现象，而《至大论》中所采用的几何模型，则是上述阿氏模型的简单改进。（参看图 - 6 和图 - 8）

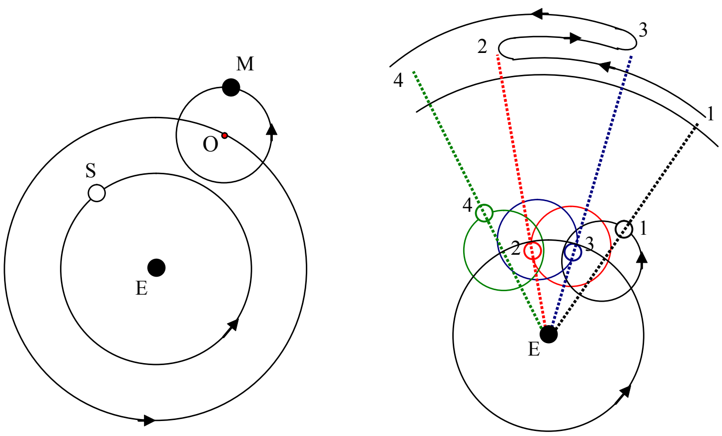

图 - 6

古代天文学的奠基——希帕克斯
(Hipparchus 190-120 BC)

有鉴于行星的行踪各异，上述欧多克索斯或阿波罗尼斯的几何模型只能对于行星运行作定性而非定量的解释。希帕克斯认识到当时的天文观测非常不足，因而无法为理论的检验、修正或改进提供实质依据。所以他主张改弦更张：不应专注以形成完全的行星理论为梦想，而应实事求是，致力于有系统的天文观察，力求精准，夜以继夜地累积大量天文数据。他所完成的代表作包括：

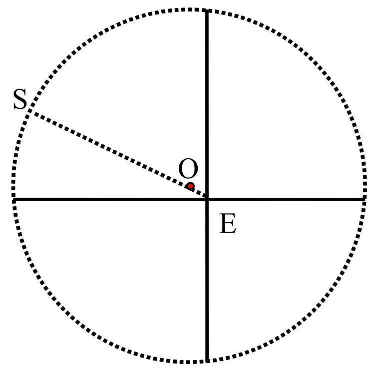

图 - 7

(1) 四季的长短与太阳的偏心圆：

在希氏之前，已知四季之长短不同，他通过精心观测四季长短的差别，对于当代太阳绕地球作等距圆周运动的学说提出定量的修正，主张地球偏离圆心者约为半径之 1/24，（参见图 - 7）。

(2) 月亮的周转圆（本轮）与偏心圆的定量测算：

月亮环绕地球的运动很早便已知不是等速。他进而测算，得出下述定量的推论：

若以本轮均轮描述，则其半径之比应为 247：3122；若以偏心圆描述，则其半径与偏心距之比应为 3144：327。

(3) 进动（或岁差） (Precession of equinoxes)：

在希氏著作《春分点与夏至点之移动》中，他测量室女星 (Spica) 和其它恒星之经度，并与前人所测者作比较，发现室女星对秋分点而言，业已移动 2°。另外根据巴比伦的观测资料，他算出赤道年 (太阳回到春分点的周期) 较 365.25 天要少 1/300 天；而恒星年 (太阳回到一恒星之周期) 较 365.25 天要多 1/144 天，其间有微小的差别，称之谓岁差。希氏认为：这是由于春分点会绕着垂直于黄道面的轴作非常小的进动 (precession)。他的测算是每世纪约为 1°（现代之实测为每七十二年进动 1°，即二万六千年为其周期）。希氏精准观察的能力和敏锐的思想，令人叹为观止！

>> 希氏的天文宝库，一直到三百多年后才在托氏的《至大论》中开花结果，提出了解说行星运行的全套技巧，将古天文学的理论系统化。

(4) 发明、改良天文观测仪器和恒量表：

希氏利用他自己发明的一系列天文观测仪器如浑天仪 (armillary sphere)、星盘 (astrolabion) 等等，标出至少 850 颗恒星的位置，它是天际的“地图”。托勒密自述他所使用的恒星表，几乎全部来自于希氏者。

总之，希帕克斯是古天文学的伟大奠基者，他的工作乃是托勒密集古天文学之大成的《至大论》的前身和实质基础。

托勒密的《至大论》(Almagest)

希氏的天文宝库，一直到三百多年后才在托氏的《至大论》中开花结果，提出了解说行星运行的全套技巧，将古天文学的理论系统化，以清晰的几何论述集其大成，提供相当令人满意的可预测性之几何模型与数理表述。

《至大论》内含十三章，前八章分别描述日、月运动及恒星表，后五章则探讨行星运动，此部分也是托勒密最杰出的贡献，因在此之前并未有令人满意的行星理论。虽然书中大部分内容由三角表、图形、公式和证明组成，充满了冗长的演示性计算，以及大量观测数据表，但其基本的创见主要则在偏心匀速点 (equant) 的引入。即均轮不是对圆心 C，而是对偏离圆心的偏心匀速点以固定的角度变化等速率旋转（图 - 8），而地球则在圆心的另一边点上。托勒密便是增加了此模型，而可以解释行星运动中更多的不规则性。

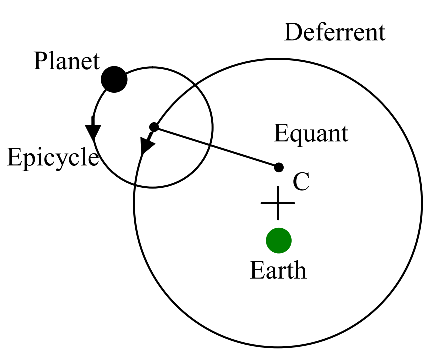

图 - 8

>> 自西罗马帝国灭亡一直到十五世纪，古希腊文明总算熬过了漫长的黑暗时代，先在意大利开始复苏逐渐扩及欧洲各大学，全面开展了对于古希腊文明的重建与复兴，史称文艺复兴。

由行星的观测数据，托勒密计算出每个行星的本轮大小、偏心距大小（皆以均轮半径表示），以及行星逆行的时间长短。他所欲呈现的为数学精确性、而非物理原因，《至大论》严格之数学论证，与将天文现象和有序的圆周运动妥加结合，成效卓著，方法有力，让其后十三个世纪，历经阿拉伯世界与中世纪的欧洲天文学家，均沿袭着其基本形式，只是另加上一些小本轮，做一些技术上的修正，而从未想到需要做根本的修改。

古天文学的绝响：阿利斯塔克的日心说

在古天文学中，阿利斯塔克 (Aristarchus 310-230 BC) 是独树一帜的日心论者。可惜他的著作《论太阳、月亮的大小及距离》早已失传。我们仅仅从阿基米德 (Archimedes 287-212 BC) 的《数沙术》(The Sand Reckoner) 中略窥其梗概：

“盖伦王阁下想必已知多数天文学家所主张宇宙是以地球为中心的圆球，……您之所闻为天文学家的共识。但是阿利斯塔克曾发表其著作，内含一些假设，显示宇宙要比刚才所提之‘宇宙’大上数倍。他假设恒星与太阳皆不动，而地球围绕着太阳作圆周运动，太阳位于此轨道中心。包含恒星圆球的中心与包含太阳圆球的中心位置相同，恒星圆球非常大，因此地球的旋转效应与它至恒星距离相较，有如球心与球面之对比。”

§3. 天文学的文艺复兴：哥白尼、第谷、开普勒天文学三接力

自西罗马帝国灭亡一直到十五世纪，古希腊文明总算熬过了漫长的黑暗时代，先在意大利开始复苏逐渐扩及欧洲各大学，全面开展了对于古希腊文明的重建与复兴，史称文艺复兴。但是在早期，天文学上乃是以学习《至大论》为主，并将其奉为经典。

3.1 哥白尼 (Copernicus，1473-1543)：日心学说的文艺复兴

在意大利的波隆纳（Bologna）大学求学期间，哥白尼深受天文学家诺瓦拉（Novara，1454-1504）

的影响，并且成为他的助理。他们一起研读佩尔巴赫 (Peurbach) 的《至大论节录》，共同进行天文观测。例如托勒密体系给月球一个很大的本轮，使得其月、地距离在满月与上弦月时有甚大差别。而他们对于月球轨道的测算，则确认月、地距其实是几乎不变的！哥白尼在意大利六年，深受这位良师益友的教导，熟习了托勒密天文学并且深刻了解其中的缺陷与危机。诺瓦拉不但批判托勒密体系的烦琐有违天文宇宙应该是一个有序的和谐体；而且深信数学为真实之体现和宇宙之本质。此种新柏拉图主义的信念教导且启示了哥白尼渴望去构想、探索由简单的数学关系所构成的宇宙。他曾如此写下对于托勒密体系的批判：

> “托勒密和其它许多天文家的行星理论，虽因能与观测资料吻合，而似乎没有甚么呈现的困难，但当偏心匀速点被构想出来，且要求行星既不是围绕着均轮，亦非本轮的中心，在做均匀速率运动；这样的系统似乎不够绝对，也很难使人心灵愉悦。”

> “同心圆、偏心圆和本轮，……引用了许多与均匀运动的基本原则，显然抵触的概念，……也不能得出……对称性，……彼此不协调。……那些人采用偏心圆论证的过程或方法，如果不是遗漏了某些重要的东西，就是塞进了一些外来的毫不相关的东西。”

托勒密系统引入偏心匀速点、本轮、均轮所造成理论的过度复杂性与人为性，显然并不符合数学的简单性与自然的对称性。哥白尼因而欲删去偏心匀速点，以还原自然的本质，并重建和谐的天文学。

> “了解这些缺陷后，我经常思考是否可能发现一个更合理的圆的安排，从这里现象的不规律将被排除，在这里万物将对着真正的中心均匀地运动，如同绝对运动所需的规则。”

如果，以地球为宇宙中心并不能给出完美均匀的圆形，那么，要以什么为天体的中心才可达成此理想？

由此可见，当他在希腊古藉中读到阿利斯塔克的日心主张和论述时，有如拨云见日，豁然顿悟！理性文明史中，被冷冻了一千七百年的“真知灼见”——阿氏的日心说——终于在哥白尼的努力下萌芽，茁壮；不但使得天文学经历了上千年的迷途，终于知返；而且也直接激发起波澜壮阔的天文学全面革新——开普勒新天文学。他在 1515 年的《概要》(Commentariolus) 中，以下述七点概括了当年“顿悟”之后的所思所见：

1. 所有天球或圆没有唯一的中心。
2. 地球的中心并非宇宙的中心，仅是重力的中心，和月球轨道的中心。
3. 所有天体以太阳为中点绕行，因此太阳是宇宙的中心。
4. 地球到太阳的距离和苍天的高度的比例远小于地球半径和地日距离的比例，地日距离与苍天的高度相比是极微小的。
5. 天空中任何运动的发生并不是由于天空的旋转，而是地球的旋转。地球同时连带其周围的元素进行完全的旋转，每天对着固定的极点运动，而苍天和最高的天空未曾改变。
6. 我们所见太阳发生运动并非由于它本身的运动，而是由于地球在运动，同时天球和行星与我们一样都绕着太阳旋转。地球不只有一种运动。
7. 行星的逆行和顺行运动的原因并非行星的运动，而是地球的运动。因此，地球的运动足够去解释许多星体看起来不均匀的现象。

第 7 点所言，行星不规则的运动都归因于地球的运动，而非天体本身进行不完美的运动，因此行星逆行的谜题也可迎刃而解。

有鉴于天体运行，特别是行星在天际的视运动，是夜夜可测者，所以任何天体运动的理论当然都必须具有足够好的可预测性才有其实质意义。如今回顾，托勒密的《至大论》之所以盛行一千三百

>> 诺瓦拉不但批判托勒密体系的烦琐有违天文宇宙应该是一个有序的和谐体；而且深信数学为真实之体现和宇宙之本质。此种新柏拉图主义的信念教导且启示了哥白尼渴望去构想、探索由简单的数学关系所构成的宇宙。

>> 理性文明史中，被冷冻了一千七百年的“真知灼见”终于在哥白尼的努力下萌芽，茁壮；不但使得天文学经历了上千年的迷途，终于知返；而且也直接激发起波澜壮阔的天文学全面革新——开普勒新天文学。

>> 从纯几何的观点来看，“日心论”和原先的“地心论”其实只是“原点”选取上的差别；但是在理解大自然（此处是太阳系永恒之舞），则“日心”还是“地心”乃是天差地别的。

年奉为经典的主要原因乃是它具有相当好的可预测性。所以哥白尼要贯彻他顿悟的日心观点，就必须下苦功建立一个具有良好可预测性的日心体系。这个艰巨浩大的苦功——《天体运行论》（On the Revolutions of the Heavenly Spheres），在瑞提克斯（Rhecticus）的大力协助之下，一直到 1543 年才得以完成。

从纯几何的观点来看，“日心论”和原先的“地心论”其实只是“原点”选取上的差别；但是在理解大自然（此处是太阳系永恒之舞）这个问题上，则“日心”还是“地心”乃是天差地别的！唯有正确的原点才能展现其精简的本质与规律，所以正确的观点是探索自然规律至关重要的起步！再者，我们观测天象的“天文台”只能位于地球，亦即所有天文资料（例如行星的视运动）都必然是“地心”者。若要改用“日心”观点就必须作工程浩大的“坐标变换”。长话短说，当年哥白尼和他的助手所要逐步构造的日心体系，在本质上乃是对于原先的托勒密地心体系做庞大的“几何变换”之所得。在此限于篇幅，我们将略去对此一划时代巨著实质内容的介绍，而仅仅作下述概括：

在《天体运行论》中的日心体系，依然采用均轮和本轮描述法（只是本轮的个数减少了），而且太阳的位置并非居于均轮之圆心。大体上来说，它在行星的周期性和行星逆行现象的解释等定性层面上远比原先的地心体系简朴自然；但是在定量层面的可预测性上，则和原先的地心体系互有出入，实为伯仲之间。由此可见，它和日心论的全面贯彻，行星运行的千古之谜的真正得解，相去尚远，还有待第谷、开普勒各尽其毕生之力的巨棒接力，才能克竟其功！

>> 第谷出生于丹麦的一个贵族家庭，他似乎在天意安排下，注定了要毕生奉献给天文观测者。他的处女作《Der Stella》使得他名满欧洲，所以在他游学回国时，腓德列大帝不但斥资为他建造尤拉尼斯堡天文台，而且把整个海芬岛都赐为他的领地。

3.2 第谷（Tycho de Brahe，1546-1601）：天文观测宝库

如今回顾反思，任何天文学理论的实质基础必然在于天文观测之数据。当年托勒密的《至大论》的基础在于希帕克斯的天文宝库；而哥白尼的《天体运行论》的实测基础其实还是同样的希氏宝库，因为当年哥白尼和瑞提克斯乃是通过托氏体系的几何变换来构造日心体系的！由此可见，唯有在天文实测方面更上层楼，才有可能产生更上层楼的天文学理论。纵观天文学发展史，由希帕克斯到第谷相隔一千七百年，才达成天文实测上可贵的更上层楼。

第谷 (Tycho de Brahe，1546-1601) 出生于丹麦的一个贵族家庭，他似乎在天意安排下，注定了要毕生奉献给天文观测。话说当年，在他还是年少的高中生时，在丹麦的哥本哈根观测到日偏蚀，此事对于常人也许不足为奇，但是却使他认识到天象之可预测性，从此立志钻研天文学，购置天文仪器和书籍，醉心于斯，及至他转到莱比锡念大学的时代，在他热衷的夜以继夜的观察中，看到土星和木星几乎相重的“土、木冲”，当他去查看当代的星表对于此事的预测时日，发现比他看到的时日要晚了好些天。此事让他认识到古往今来天文观测的精度不足，他这位丹麦贵族在这一点上有用武之余地，于是开始自行设计，构造更高精度的天文仪器，他在这方面的努力与准备使得他能够比别人更加精准地进行观测。

1572 年出现的新星 (Nova) 之诞生，在众说纷纭、莫衷一是的氛围中，他脱颖而出，根据他的观测可以确认它是一颗新的恒星，并以此写了他的处女作《Der Stella》，此书使得他名满欧洲，成为丹麦王国的骄傲，所以在他游学回国时，腓特烈大帝不但斥资为他建造尤拉尼斯堡 (Uranisborg) 天文台（图 3-17），而且把整个海芬岛都赐为他的领地，让这位丹麦王国的天文骄子，能够数十年如一日，优裕地夜以继夜热衷于他力求精准的天文观测，累积了当代空前未有的天文宝库。

他是所有肉眼观测者中最伟大的。他设计和制造了许多更大、更稳定、校正得更准确的新仪器。凭借无比的天才，他检查并纠正了在这些仪器的使用中发生的许多错误，建立起一整套关于搜集行星和恒星位置的精确信息的方法。最重要的是，他开始对行星实行定期观测，只要行星穿过天际，而不只是在某些特别有利的位置才观测。……他对行星位置的观测精度通常可靠至 4′，是古代最好的观测者所达到的精度的两倍多。不过比第谷的个人观测的精度更重要的，是他所积累的数据整体的可信度

和广度。在他的一生中，他和他训练的观测者，把欧洲天文学从对古代数据的依赖中解放了出来，并且消除了一系列由于错误数据产生的表面的天文学问题。

3.3 开普勒（Kepler，1571-1630）：千古之谜真相大白，新天文学

开创新天文学的主角开普勒出身于当时南德新教区域威尔的一个贫困家庭，幸赖当地的统治者重视教育，奖励学术，开普勒才能凭借着他优秀的成绩，靠奖学金逐步念到大学，就读于新教的学术中心杜宾根大学，甚得该校天文学教授梅思特林（M. Maestlin，1550-1631）的赏识，而梅思特林则是一个哥白尼日心论的鼓吹者。当年在天文学上，日心论和根深蒂固的托勒密地心论是学术界争论不休的热门议题，开普勒就曾经以日心论者参加这种辩论会，但是他当时主修的是往后作新教传教士的学位（也拿着攻读这种学位的奖学金）。也许是“天意”或者是命运的安排，1594-95 年的两件偶发事件使得开普勒踏上毕生致力于天文学的征程，数十年如一日，锲而不舍，百折不馁地探索太阳系的千古之谜。

其一是在 1594 年，位于新教区域格拉兹的一所高中的一位数学老师突然病故，于是迫切地向当时新教学术中心杜宾根大学的教授团求助，希望为该校推荐一位能胜任的替补者，大家一致认为青年才俊开普勒是适当人选。因此当年原本想以传教士为职业的开普勒就改行到格拉兹去做数学教师，而在当时，他还得兼教天文课程。

其二是在 1595 年 7 月 19 日的天文课课堂上，他突发异想，发现一个正三角形的内切圆半径和外接圆半径之间的比值，大致等同于当年哥白尼《天体运行论》中木星和土星的均轮半径之比，此事使得开普勒大为兴奋，进而探讨当年的六个行星（即地球和金、木、水、火、土）之轨圆大小关系之间的规律何在？对于既笃信天主又是哥白尼学说的鼓吹者，此事着实耐人寻味。当年年少气盛的开普勒还认定整个太阳系乃是天主的杰出创造，所以包括行星个数为什么恰好是六个（当年所知者只有六个，

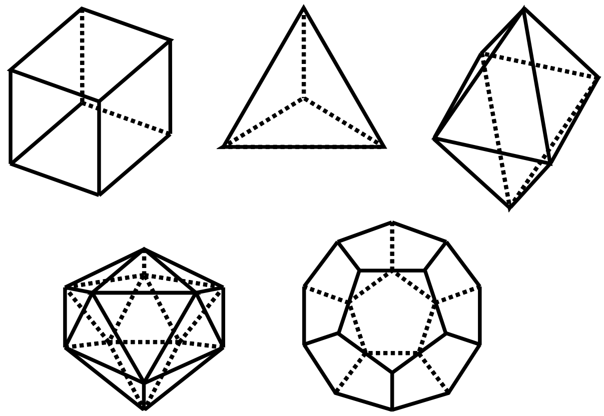

图 - 9 五个正多面体

后来发现了天王星、海王星和冥王星等）也一定有其“道理”，究竟其理何在呢？据开普勒自己的日记记载，经过那些时日的沉思狂想，突然“顿悟”到其中的“奥秘和天意”：为什么行星的个数不多不少，恰恰是六个呢？那是因为立体几何中恰恰有五个正多面体；即正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体和正廿面体 (图 - 9)。

>> 开创新天文学的主角开普勒出身于当时南德新教区域威尔的一个贫困家庭，幸赖当地的统治者重视教育，奖励学术，开普勒才能凭借着他优秀的成绩，靠奖学金逐步念到大学。

而上述立体几何的“五”和行星个数的“六”又有何关联呢？他说他可以清楚地想到六个行星绕日运行的轨道可以看成是位于六个有些厚度的同心球壳之内者，而在它们之间，恰恰可以妥加安置五个各别的正多面体，每个和其内的球壳外切而和其外者内接。他觉得此事实在太奇妙了！他不但解释了行星个数恰好是六个，而且也确定了上述同心球壳的大小、厚度！年少的开普勒认定这是天主的“启示”(revelation)，让他得窥宇宙的奥秘，问题只是在如何妥善配置五个正多面体于六个轨球薄壳之间（可说是一种几何的植树问题）。因此，他狂热地投身于哥白尼天体运行体系之中，研究六个行星各别的轨道所“属于”的球壳之大小、厚度和正多面体的妥为配置，其结果就是开普勒的处女作《宇宙的奥秘》。

下述图解所展现者，就是他的少年狂想曲的要点，按照他本人的自述，这就是驱策他终其一生，探索太阳系永恒之舞的规律的原动力！也是这位新天文学的创建者的奇妙启蒙（图 - 10）。

>> 据开普勒自己的日记记载，经过那些时日的沉思狂想，突然“顿悟”到其中的“秘奥和天意”：为什么行星的个数不多不少，恰恰是六个呢？那是因为立体几何中恰恰有五个正多面体。

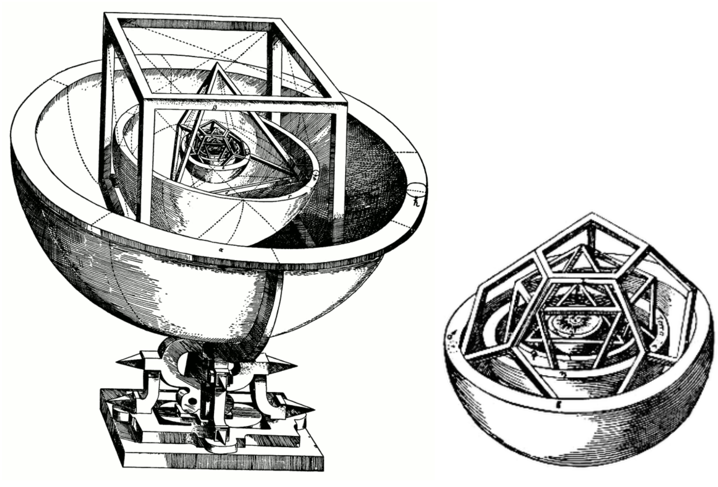

图 - 10 《宇宙奥秘》中六颗行星轨球模型

>> 太阳系永恒之舞竟是如此精简美妙，长达几千年的困惑，豁然得解，开氏伟大的实验性定律是理性文明第二个光芒万丈的里程碑。

当年开普勒当然把他的少年狂想曲《宇宙奥秘》寄赠给当代的天文学大师第谷，请他指正。想必第谷也只把它看成少年狂想曲，但是对于这位少年的才气和冲劲则留有深刻印象。而开普勒则一直狂热地要证实他伟大的“猜想”，但是凑来凑去还是不如他所想象那样完美无缺。他当时的想法是：这种缺失不可能在于他伟大的猜想有问题，而是当代对于行星轨道的大小测算有误，需要用更加精确的实测数据去重新计算，他当然知道当代精确的天文宝库乃是第谷所拥有。总之，第谷和开普勒都逐渐意识到彼此的互补性，携手合作才是有所进展的迫切需要。由此看来，这两位一老一少、互补互需的天文学家的合作理当是天作之合，但是他们在 1600 年初到 1601 年 10 月 24 日第谷逝世的共处却远非融洽，所以只能说是天作之遇，冥冥之中，似有天意，要他们达成天文巨棒的交接，其中某些细节难明也无关文明之发展，在此略过不谈。重要的是，第谷毕生累积的天文宝库由旷世奇才开普勒传承，千古之谜得以真相大白，人类的理性文明得以突飞猛进，唯有天意，才可能有此天作之遇和奇特的巨棒交接。

由于第谷的突然逝世，开普勒被任命为皇家数学家，继承第谷的职位和其天文宝库之使用权，从此开普勒运用他超群的几何分析能力探索第谷宝库所蕴含的行星运行规律，艰苦卓越，百折不馁，廿年有成；终于从第谷的实测数据总结出其所隐含的实验性定律：开普勒行星运动三定律，即

椭圆律：地球和金、木、水、火、土星绕日运行的轨道各为椭圆，太阳位居其焦点之一。

面积律：上述六个行星的日—星连线在单位时间中扫过的面积守恒，亦即各有$\frac{1}{2}R^2\omega=$常数。

周期律：上述六个行星之椭圆轨道的长轴之立方和其周期之平方之比值皆相同。

太阳系永恒之舞竟是如此精简美妙，长达几千年的困惑，豁然得解，开氏伟大的实验性定律是理性文明第二个光芒万丈的里程碑。

未完待续

作者介绍：

项武义，台湾大学本科毕业，普林斯顿大学博士，著名数学家，美国伯克利加州大学教授。研究领域为微分几何。除学术成就外，在数学教学法上也颇有建树。经常于两岸三地讲学与交流。教学心得包括在《基础数学讲义》的三卷本《基础代数学》、《基础几何学》与《基础分析学》等。