数学聊斋连载

（连载三）

李尚志

足球的圆与方

——概率

人们常说“足球是圆的。”就是说足球比赛的胜负有偶然性。比如，在2006年世界杯的小组赛中，巴西一路顺风，法国勉强出线，但在淘汰赛中巴西却输给了法国。意大利是世界杯冠军，但是在世界杯结束之后世界足球队排名中，意大利还是只能排第二，巴西排第一，法国排第四。排名第四的队可以打败排名第一的队，这说明“足球是圆的”。这就是足球的魅力。如果都像隋唐演义里面写的，第二条好汉永远打不过第一条好汉，第三名以下的所有的好汉再加上千军万马都绝对打不过第二条好汉，一点悬念都没有，那还有什么意思？

我们有些人很喜欢说“足球是圆的”这句话。既然足球是圆的，中国队与巴西队比赛也有可能进球啊！也许有可能，但实际上一个球也没有进。既然足球是圆的，中国队有可能打赢韩国队呀！确实有可能，但实际上从来没有赢过。照此说来，圆圆的足球一遇到中国队就变成方的了？不然，每当中国队遇到弱队，媒体将这些弱队称为“鱼腩之旅”的时候，足球就变圆了，中国队几乎每次都是因为输给“鱼腩之旅”而失去了世界杯的出线权。

“足球是圆的”就是说足球比赛的输赢是不确定的，具有偶然性，在数学上叫做“随机事件”。既然胜负是偶然的，强队可能战胜弱队，弱队也有可能战胜强队，岂不是大家平等，没有区别了？于是，米卢带领中国队打进了世界杯，并不是他的水平高，而是因为他的运气好，是“神奇教练”。中国队输了不该输的球，也不是因为发挥不好或者指挥失当，而是因为运气不好。赢了是神奇，输了是“魔咒”起作用，因此也就没有什么经验或者教训可以吸取，只要像赌博一样一次又一次地赌下去就行了。

足球是圆的，输赢有偶然性。然而偶然性也服从一定的规律。我写过下面一首诗：“沙场百胜古来稀，九密一疏已足奇。祸福偶然存概率，风云多变泄天机”来说明世间万事万物的偶然性以及偶然性中的规律。打仗的胜负有偶然性，不可能百战百胜。出主意不可能不犯错误，九次考虑得周密，一次有疏漏，就可以说是神机妙算了。天有不测之风云，人有旦夕之祸福，都有偶然性，然而又都有规律——概率、天机都是规律。

比如，假定两个足球队在某一段时间内的水平基本保持稳定，在这段时间内两队的比赛中，如果甲队取胜的场数占70%，乙队取胜的场数占30%，就可以粗略地说甲队取胜概率为70%，乙队取胜的概率为30%，甲队比乙队实力强。如果两队再比赛若干场，胜负比例大体上仍会在这个比例附近波动。在每一次比赛中谁胜谁负具有偶然性，但也与两队教练的指挥是否恰当、队员发

挥是否正常密切相关。乙队发挥正常，就能实现30%的取胜概率，不至于场场皆输；如果发挥得好，还可能再向上波动超过30%，但想超过得越多就越困难。比如可以达到35%或者40%。但如果想要达到60%，70%，靠临场发挥恐怕就做不到了，必须要提高取胜概率，这只能通过相当一段时间补充人才、训练、参赛锻炼来提高技术、战术、战略水平才能实现。

施拉普纳、霍顿是搞素质教育的，希望提高国足的取胜概率，但这在短时间内难以见效。米卢搞应试教育，让国足实现了已有的取胜概率，赢了该赢的队，唯一一次到世界杯去走了一遭。可米卢还是挨骂，骂他带领中国队到世界杯一球未进，一分未得。这就好比你是一个成绩差的中学生，请了一位“神奇教练”辅导你考上了大学，你却骂这位教练没有让你得诺贝尔奖。

骂米卢的人说米卢只不过是运气好，躲掉了韩国日本，才让中国队出了线。他们忘了，米卢之前的中国队每一次失去出线权都不是因为输给韩国日本，而是因为输给了“鱼腩之旅”。可以说，米卢之前的中国队似乎只怕日本、韩国、伊朗、沙特，取胜概率已经达到了世界杯出线应有的水平，只可惜在比赛时没有实现这个概率而向下波动了，因此“痛失”了出线权。米卢并不神奇，他只是让中国队正常发挥，实现了该实现的概率，并且向上波动了一点。骂米卢的人以为，米卢以后中国队的任务就不是从世界杯出线，而是到世界杯去进球和得分。结果怎么样呢？现在中国队已经不只是怕日本、韩国等四五个强队，而是不知道还有什么不怕的队了。也就是说，取胜概率不断下降，离出线的要求越来越远，失去出线权已经是正常发挥而不能说是“痛失”了，不能怪阿里汉和杜伊。

现在应当怎样办？应当先请施拉普纳或霍顿这样的“素质教育”教练将中国足球队的取胜概率恢复到米卢时代或米卢之前的水平，恢复到只怕四五个强队的水平。再让米卢这样的教练去实现这个取胜概率，重回世界杯。哪怕仍然一球未进、一分未得，也应当谢天谢地了。不过，实现这个计划需要时间，恐怕4年不够，需要两个4年。两个4年岂不是太久了吗？请回忆一下历史的教训：从1982年的第12届世界杯开始，就是因为不愿意等两个4年，我们付出了5个4年，才终于在2002年到世界杯去走了一遭。更何况，足球是圆的，如果准备等8年，说不定4年就成功了呢？

“没收非法所得”是惩罚吗
——数学期望

商家卖了假货，被市场管理部门发现了，要进行处罚。一种常见的“处罚”是“没收非法所得”。

卖假货的目的当然是为了赚钱。合法经营也能赚钱，但商家嫌赚得太少，通过卖假货（降低成本）来赚更多的钱。卖假货比不卖假货多赚的那部分钱就是非法所得。比如某件商品成本400元，合法经营卖500元，利润100元。如果假货的成本是100元，仍然卖500元，就赚了400元，比合法经营多赚400－100=300元，这就是非法所得。

卖假货被抓住了，当然应当没收这300元非法所得。但这是处罚吗？

“处罚”就是让干坏事的人遭受损失，使他以后不敢再干坏事。干坏事受到的损失怎样计算？应当与不干坏事相比较。干了坏事被抓住，与他不干坏事相比吃了亏，这才是“遭受损失”。以上述情况为例，合法经营卖一件商品赚100元；卖假货赚400元，被抓住之后没收了非法所得的300元，仍然赚100元，与不卖假货的收益相同，一点不吃亏，这能叫做惩罚吗？如果只是这样“惩罚”，商家一定会继续卖假货。

如果商家每次卖假货都被抓住，虽然每次都不吃亏，但也没有占便宜，他也就不必再干下去了。但事实上他不可能每次都被抓住。卖假货被抓住不是必然事件，而是随机事件。即使被抓住的概率很大，比如为90%，平均每卖十次被抓住9次，这9次的非法所得都被没收了，但还有一次没被抓住，赚了300元，那么这十次卖假平均每次还赚300/10＝30元。这相当于将每次非法所得的10%返还给他作为奖励了，他肯定还会继续干下去。更何况，众所周知，商家卖假货被抓住的概率并没有高

达 90%，能够有 10% 就不错了。平均起来每卖十次假货只有一次被抓住。被抓住的这次收益为 0，其余 9 次每次赚 300 元，共赚了 300×9 元，十次卖假货平均每次收益为 300×9/10 = 300×90% = 270 元。所以，被抓住的那一次只没收本次的非法所得，不但不是处罚，反而是将其余 9 次的非法所得奖励给他。也就是只没收非法多得的 10%，将其余 90% 奖励给他。受到这样的奖励，他当然再接再厉继续干下去。

怎样才能让他卖假货没有收益呢？很简单：既然他被抓住的概率只有 10%，平均每十次被抓住一次，就应当在这一次抓住时将总共十次的非法所得全部没收。如果每次的非法所得是 300 元，就要没收 300 元的 10 倍。这就是“假一罚十”。他有 9 次没有被抓住，每次的非法所得 300 元，共得 300×9 元；被抓住这次，本来赚了 300 元，却被没收了 300×10 元，收益为 300 − 300×10 =− 2700 元。因此十次的总收益为 300×9 + (−2700) = 0 元，刚好持平，既没有占便宜也没有吃亏。

有些“维护人权人士”很反对“假一罚十”，说：虽然卖假货不对，没收这一次的非法所得也就行了，罚十倍是侵犯了他的合法权益。其实，如果他被抓住的概率确实是 10%，罚十倍他也没有吃亏，因此也不是处罚，只不过是将他十次的非法所得全部没收。反正不吃亏，他就会继续干下去。因此，只有罚到十倍以上，才能让他吃亏，才是对他的处罚，才有可能让他不敢再干下去。或者保持“假一罚十”的处理办法，但是加大查处力度，提高卖假货被抓住的概率，比如被抓住的概率由 10% 提高到 20%。假设商家每次卖假的非法所得为 a，每次被抓罚款 10a，损失为 10a − a = 9a，也就是说收益为−9a。平均每十次有 8 次没有被抓，收益 a×8；2 次被抓，收益 (−9a)×2。十次总收益为 a×8 + (−9a)×2，平均每次收益为

$$
\begin{aligned}
&(a\times 8 + (-9a)\times 2)/10\\
&\quad = a\times 80\% + (-9a)\times 20\%\\
&\quad = -10a
\end{aligned}
$$

也就是说：平均起来每次的损失为非法所得的 10 倍，这才是真正的“假一罚十”，对于卖假的商家才有一点震慑作用，使他以后不敢再干下去。更重要的是，一个商家受处罚，会对另外的商家产生震慑作用。这才是处罚的真正目的。

在以上的例子中，商家卖假，有两种可能的结果：被抓或者不被抓。不被抓的概率为 80%, 被抓的概率为 20%。不被抓的收益为 a，被抓的收益为− 9a，

平均收益 =
不被抓的收益 × 不被抓的概率
+ 被抓的收益 × 被抓的概率

这样算出来的平均收益称为他的收益的“数学期望”。我们希望打击卖假行为，就一定要让卖假收益的数学期望为负。而且，数学期望越小，也就是损失越大，打击的效果越佳。

一般地说，凡是在面临风险的情况下作决策，都需要用数学期望来衡量方案的优劣。

比如，有些人疯狂地参加买彩票之类的“博彩”活动，就是因为他们只想到自己中了奖能够赚多少钱，不考虑自己没中奖有多大损失。如果他算一算数学期望：

中奖的概率 × 中奖所得 +
不中奖概率 × （−不中奖的损失），

大概就不会那么狂热了。即使不做这么复杂的计算，只算一下在最坏的情况自己损失多少，衡量一下自己是否乐于承担这个损失。如果觉得还可以承担，输了也可以不必遗憾，输的钱就当是买了门票逛公园。

杯中水面与墙上光影

——生活中的圆锥曲线

如果问什么是圆锥曲线，很多中学生就会马上回答：到一个定点和一条定直线的距离之比为定值的点的轨迹，称为圆锥曲线。这是书上写的，当然不会错。但是，如果再问一句：“既然叫做圆锥曲线，总应当与圆锥有关系吧。这样定义的轨迹与圆锥有什么关系？”能够回

答出来的中学生就会少得多了。

如果知道圆锥曲线可以用一个平面去截一个圆锥来得到，将它们称为圆锥曲线就很自然了。但是，很多学生不知道这件事。这不能怪学生，因为书上不讲。即使有的书上讲了，也不是教材的正文，至多是个阅读材料，因为不考试，所以老师也不讲。为什么不能作为正文来讲？我猜想：课本正文的内容大概都必须“既要知其然，还要知其所以然”，反过来就是“如果不能知其所以然，就不让你知其然。”如果只知道“不经过圆锥顶点的平面截圆锥得到的曲线是圆锥曲线”，这只能算是“知其然”。要“知其所以然”，就必须给出证明。但是，这个证明比较难，不宜作为教材正文的内容。既然不能讲“所以然”，因此就将“然”也一刀砍了！

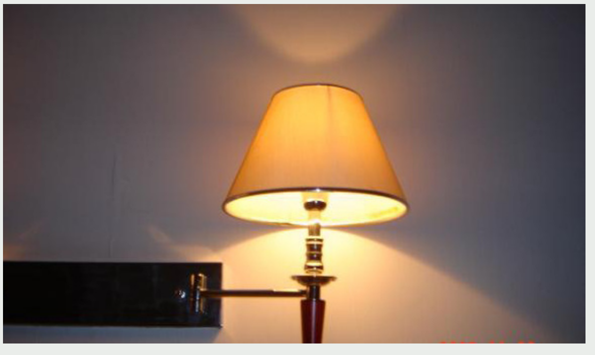
“知其所以然”，当然是好事情。但是，好事情做得太过分就会变成坏事。比如你去买一个电视机，目的就是用它来看电视节目。如果还要求你“知其所以然”，了解电视机的内部构造和元件原理，甚至了解无线电原理、麦克斯韦尔方程，一般老百姓做不到。是否就不准这些“不知其所以然”的人们买电视机了呢？当然不是。只要他会插电源，打开电视，会用遥控器调整频道，就能看电视了。如果有的人想学修电视机，那就需要了解元件。如果想发明新型的电视机，那才需要精通无线电原理等更深的科学知识。在每一个人的知识结构中，能够知其所以然的只能是少数核心的知识，大量的知识只能是知其然而不知其所以然，其中有的知识在需要的时候再去知其所以然。

平面截圆锥得到圆锥曲线，要“知其所以然”虽然比较困难，但要“知其然”却很容易。一句话就讲了，并且也很容易理解。不过，只是宣布一个结论让学生去死记硬背，也不是好办法。能不能有一个折衷办法，不讲严格证明，但还是给一点理由让学生相信、并且留下深刻印象？有一个办法，就是做实验。拿一个圆锥和一个平面，用平面截圆锥让学生观察截痕，看它的形状是否像圆锥曲线。

这个实验说起来容易，真做起来就不那么容易。用什么做圆锥？用木头、金属吗？老师和学生要加工出一个比较精确的圆锥恐怕很难。将圆锥加工好了，再用平面去截也很难实现。用泥巴做圆锥，加工起来倒是容易，不过很难保持精确的形状。

老子说“上善若水”。比泥巴更容易加工的原料是水。能不能用水做一个圆锥，再用平面去截它？可以。水的形状由容器的形状决定。只要容器的形状是圆锥的一部分，其中装的水的形状也就是圆锥的一部分。比如，喝水用的一次性杯子，上面粗，下面细，可以看作圆台形，其内表面可以看作圆锥面的一部分，其中装的水的外表面也就是圆锥的一部分。由于重力的作用，水面可以看成平面。水面与容器分界线就自然是平面与圆锥面的交线。当杯子平放时，水平面与圆锥的轴垂直，交线是圆。将杯子倾斜，交线就是椭圆。如果想得到抛物线或者双曲线，水就不能装在杯子里而要“装”在杯子外，也就是将水装在盆或桶里，再将杯子泡在水里，让水平面与杯子的外表面相交得到交线，就可以得到抛物线或者双曲线（的一支）。

比水更容易“加工”的原料是光。光不能装在容器里，但可以从“容器”“倾泻”出来形成一定的形状。比如，手电筒射出来的光束，圆形灯罩里的台灯照出来的光束，天花板上的筒灯里照出来的光束，就都是圆锥形。光束照到墙上，就好比用平面（墙）去截圆锥，光照到的亮处与没有照到的地方的暗处的分界线就是平面与圆锥的交线，就是圆锥曲线。调整手电筒照射的方向，可以得到圆、椭圆、抛物线、双曲线。台灯和筒灯照出来的圆锥形光束的轴基本上与墙平行，得到的交线是双曲线（的一支）。如下图：



很多学生知道平面与圆锥面的交线是圆锥曲线。但在它们心目中，只有考卷上给出的“已知一个圆锥”才是圆锥，手上拿的杯子、台灯射出的光束就不是圆锥。我在对学生进行口试时问过倾斜的杯中的水面边缘的形状是什么曲线，很多学生认为当杯子上下一样粗、形状是圆柱时水面边缘是椭圆，而当杯子上面粗下面细时就认为不是椭圆，而是一头尖一些、一头平一些、像鸡蛋那样的曲线。他们把书上的知识与现实生活完全割裂开来。我们必须帮助他们改变这个不良习惯。还有的学生看见筒灯在墙上照出的光影边缘就认为是抛物线。我问他抛物线与双曲线有什么区别。他回答说：到一个定点和定直线的距离之比等于 1 的点的轨迹是抛物线，距离之比是大于 1 的常数的点的轨迹是双曲线。这当然不错。但是，在墙上找不到所说的定点、定直线，也很难度量距离之比，所以不能用这样的定义来作出判断。其实，抛物线与双曲线有一个重大区别是：双曲线有渐近线，抛物线没有。我们在墙上不能直接看见双曲线的渐近线，但可以间接看到：既然双曲线无限趋近于这两条渐近线，也就是无限趋近于两条相交直线，那么当双曲线向两端无限延伸时，自身的形状就应当越来越接近两条相交直线。而抛物线则不然，越来越接近于两条相互远离的平行直线。

不小心搞乱了行李箱的密码，怎么办？

2008 年 8 月 6 日晚，北京奥运会前夕，我在青海西宁完成了高教司组织的国家精品课程《高等数学》的培训讲课任务之后飞回北京。同行的还有承担培训会议组织工作的高等教育出版社的几位工作人员。正在排队等候办理登机手续时，高教社的一位同志说她不小心将行李箱密码锁的号码搞乱了，箱子打不开了。问我是否有办法尽快找到正确的密码？行李箱密码锁的号码由三个数字组成，总共可以有一千个不同的号码。如果一个一个号码试验，需要试验一千次，时间太长。但是，考虑到她不是故意将号码弄乱，而是不小心碰到了某个号码才弄乱的，我假定她最多将三个号码中的某一个弄乱了，而不大可能同时弄乱两个号码或者三个号码。这样，在试验时就可以只限于与原来的号码只有一个数字不同的那些号码。与原来的三位号码只有第一位数字不相同的号码只有 9 个，只有第二位数字不相同的也是 9 个，只有第三位数字不同的还是 9 个。只要试验这 27 个号码，就可能找到正确的号码。

她按照我说的这个方法试验，果然很快就找到了正确的密码，打开了箱子。原来，她的初始密码是 000，弄乱之后变成了 900。如果按从小到大的顺序穷举 1 千个号码进行试验，从 000 开始要试验 900 次才能到 900。而且还有可能一不小心将 900 跳过去。而按照我所说方法先固定后两位数字，只试验了 10 次就找出了正确答案。

我告诉她，其实还可以做进一步假设：不小心弄乱号码，最有可能只弄乱一个数字，而且可能性最大的是将这个数字只改变一“格”，也就是说将这一个数字加 1 或者减 1。按照这样的假设，只要试验 6 次就行了：在原来密码的基础上将第一位、第二位、第三位分别加 1 或减 1。比如，她的原始密码是 000，弄乱之后的密码很有可能 100,900,010,090,001,009 这 6 个号码之一。

最近，同样的故事在我自己身上又发生了一次，我自己也在机场办登机手续之前发现自己的箱子的密码被弄乱了，原来的密码打不开箱子。我胸有成竹地按照所说的方法试验，试验了 6 次果然打开了箱子。

有人告诉我：“千万不要将这个办法告诉别人。否则，你会被怀疑有本事打开别人的箱子偷东西；如果小偷知道了你这个方法，也可以用来打开箱子偷东西。”我告诉他：这个担心是多余的。箱子的主人知道原来的密码，所以可以采用我的这个方法只实验少数几次 就找到新的密码。只要行李箱的主人将原来的密码保密，别的人都不知道原来的密码，就不能在保持原来密码两位数字不变的基础上搜索出新的密码。