

从历史角度讲微积分与数学分析

陈 跃

最近，科学出版社推出了柯朗(R. Courant)与约翰(F. John)撰写的两卷本名著《微积分和数学分析引论》的重排本。虽然这两卷本名著的英文首版在大约半个世纪前问世，但是其生命力经久不衰，全世界范围内无数的学生和教师从中受益，已经被公认为是一套大学数学的经典传世名著。

微积分可以说是人类科学思想史上最伟大的创造，凭借着微积分这一有力工具，人们可以计算大自然和人类社会中各种数量的精确值，以及用来发现和表达各种量化的规律，从而为造就和支撑现代科学技术和人类文明的宏伟大厦奠定了坚实雄厚的数学基础。另一方面，数学家们还进一步从微积分中发展出了严格的数学分析理论，而这个理论后来又成为了庞大的现代数学理论的出发点。

目前，几乎每一位理科大学生都要学习微积分，并且每一位数学与物理方面专业的大学生都要学习比微积分更深的数学分析理论。由于微积分与数学分析课程凝聚了近四百年来的大批数学家们的聪明才智，到了现在，该课程的结构已经变得极其复杂，理论体系非常庞大，初学者们在学习的过程中不可避免地会遇到许多困难。为此人们写了许多关于微积分与数学分析的教材与读物，试图来帮助学生们渡过难关。

在1927年，德国的著名数学家柯朗用德语撰写了一部微积分教材，其目的是为了改变当时的微积分教学现状。长期以来，微积分的“著作家总是把微分学与积分学分开来论述，从而就

掩盖了一个关键性问题，即微分和积分之间的互逆关系。只是到了1927年，柯朗的 *Vorlesungen über Differential und Integralrechnung*（《微分学与积分学讲义》）一书德文第一版（斯普林格出版社）发行以后，这种隔离才消除了，微积分才成为一门统一的学问。”（见《微积分和数学分析引论》的前言）1934年，该书在作了重大增订后在美国发行了英文版，书名改为 *Calculus*（微积分），获得了很大的成功。

到了上世纪60年代初，为了进一步满足美国高等教育发展的需要，柯朗与另一位美国数学家约翰一起，决定写一套全新的微积分与数学分析教材，该套书一共有两卷，书名为 *Introduction to Calculus and Analysis*（《微积分和数学分析引论》，以下简称《引论》）。在1965年，该套书的第一卷由 John Wiley & Sons 出版社出版，内容主要是一元微积分和级数理论，篇幅有661页。1974年出版了第二卷，内容主要是多元微积分，篇幅有954页。该套书的全部内容基本上涵盖了现在我们国内大学里高等数学课程与数学分析课程中的全部内容。在1989年，著名的斯普林格出版社重印了全套的两卷本《引论》，并且将其列入了重要的“Classics in Mathematics（数学经典）”系列丛书之中。

自从《引论》出版以后，在世界范围内取得了巨大的成功。著名的数学杂志 *The Mathematical Gazette* 曾经这样高度评价《引论》的第一卷：“这是一本讲得很清楚的书，充满了给出思想动机的解释，并且提供了相当多很有

好书推荐

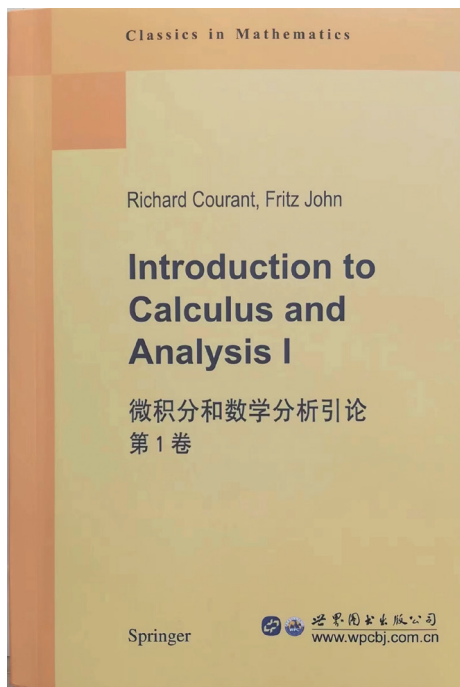


图 1.《引论》第一卷的英文影印版

用的可以入手做的习题……。该书还有三个不同于同类书的突出特点：(1)有许多关于数学历史背景的介绍；(2)用一整章来专门讲数值计算方法；(3)用一整章来讲微积分对物理学和几何学的重要应用。该书挑选习题的指导方针是：既在数值方面看上去很有意思、又能够体现直观的数学思想，并且最终指向了实际应用。该书在本评论者看来，它对于任何想使数学分析课程不那么抽象的人们来说，是最好的一本分析教材……。尽管其中所讲的数学都是严格的，但是通过给出了许多例子和面向实际的应用，使得该书非常具有可读性，并且它所给出的论证过程也十分容易理解。”

学生们在学习微积分与数学分析时，要接触到大量的数学概念与定理，他们中的许多人在听课或读书时，经常会不太理解在这么多的概念与定理背后的思想动机是什么，为什么要学习与研究它们。限于篇幅的原因，大多数的教材

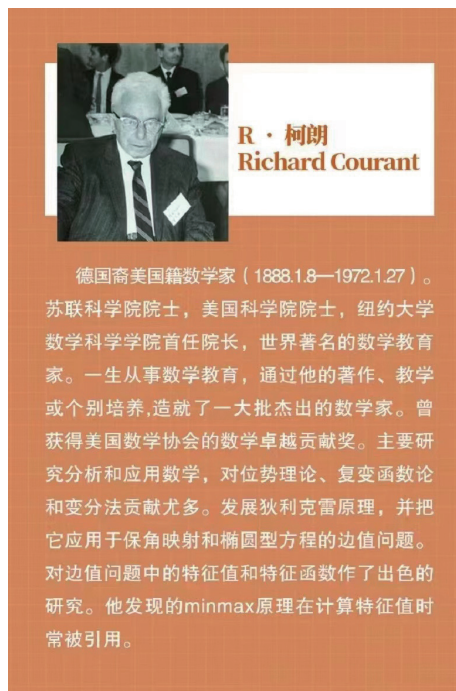


图 2. 科学出版社制作的《引论》海报中对柯朗的介绍

最多只能给出少量概念与定理的思想动机介绍，而两卷本《引论》则几乎对微积分与数学分析中所有重要的概念、例子与定理，都详细地给出了它们的动机和基本思想的描述，以及具体的计算与论证过程。学生们通过仔细阅读和思考，然后再做完《引论》精心挑选和编排的练习和问题（第二卷有全部问题的解答），就能够加深对于微积分与数学分析中基本内容的理解。

柯朗与约翰对微积分与数学分析的理解极其透彻，同时他们又擅长于数学教学和数学写作，因此他们就能够写出与众不同的两卷本《引论》。柯朗长期在纽约大学任教，主要从事分析学方面的研究，他早年曾经担任过希尔伯特的助手，与希尔伯特一起撰写出了两卷举世闻名的著作《数学物理方法》¹。柯朗还和罗宾(H.

¹ 有科学出版社的中译本。

好书推荐

Robbins)一起,写出了脍炙人口的名著《什么是数学》²。约翰也主要研究分析学,他曾经写过一本很受欢迎的名著《偏微分方程》³。

在《引论》的前言中,柯朗与约翰非常精辟地给出了他们对于大学数学教育的观点或信仰:

数学,作为一种自封的、一环接一环的真理系统,而不涉及其起因和目的,也是有着它的诱惑力的,并且还能满足某种哲学上的需要。但是,这种在学科本身中作内省的态度和方法,对于那些想要获得独立的智能而不要训条式的教导的学生们是不适宜的;不顾及应用和直观,将导致数学的孤立和衰退,因此,使学生和教师们不受这种自我欣赏的纯粹主义的影响,看来是非常重要的。

柯朗与约翰都认为,微积分与数学分析的讲解,不能仅仅从逻辑论证出发,从定理到定理,而是要在讲定理与公式的推演证明的同时,还要充分地讲解隐藏在数学理论背后的直观思想,这是因为正是这些杰出的思想,才引导历史上的大数学家们做出了重要的发现,它们可以帮助学生们更好地理解 and 掌握这门课程的内容。柯朗与约翰在《引论》的前言中这样说到:

本书在形式和内容方面虽与原书⁴显著不同,但都产生于同一的意愿,即直接把学生引向这门学科的核心,并为他们去积极运用所学到的知识做好准备。本书避免教条式的文风,因为那样的文风不利于揭示微积分在直观现实中使之发生的动力和根源。同时,阐明数学分析与其各种应用之间的相互作用,并强调感性

认识的意义,仍然是我们这本新书的重要目的。当然,我们也希望能稍微加强一些严格性,这并不妨碍前一目的。

柯朗与约翰的这套《引论》的一个突出优点是:将微积分与数学分析的逻辑推演,与历史上重要数学思想的发展有机地结合起来,由浅入深地合理编排有关教学内容。例如《引论》的第一卷在讲一元微积分时,与其他同类课程先讲微分学、后讲积分学不同,而是先讲积分,然后再讲导数,目的是让学生尽早地接触微积分基本定理,这样就紧紧抓住了整个微积分的根本思想——微分与积分的互逆关系,由此出发就不难理解微积分与数学分析理论的各个组成部分之间的有机联系。

《引论》先讲积分后讲微分(导数)的顺序,符合历史上人们对微积分的认识过程,将两者放在一起讲,能够更好地揭示积分和微分的本质。以阿基米德为代表的古代数学家早在两千年前,就开始用以直代曲、无穷累加的思想来计算几何量的精确值。在《引论》第一卷的第二章中,先讲黎曼积分的定义及其计算,并且像历史上的数学家一样,用不等分的小区间对指数 α 是有理数的情形,来计算幂函数 x^α 的积分值,由此来认识和推导定积分的基本性质。然后用变动上限的定积分来定义指数函数 e^x ,这不仅能够论证在初等数学中无法严格解释的初等函数基本性质,而且也为学生以后学习用变动上限的定积分来定义的新函数(例如很重要的椭圆函数)埋下了伏笔。

在讲完了定积分的基本概念与性质后,《引论》才开始从切线引入差商,讲导数的基本概念与具体计算,并且还讲了很基本的中值定理和微分概念。在微积分与数学分析的发展历史上,微分与积分的互逆关系不仅是最主要的直观思想,而且也是最重要的发现。《引论》在这

² 有复旦大学出版社的中译本。

³ 有上海科学技术出版社的中译本。

⁴ 指前面提到的 *Calculus* (《微积分》)。